Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 131-140

ROSA ESPOSITO

Sui k - insiemi di tipo $(0, 1, m_d)_d$ di uno spazio di Galois $S_{r,q}$ $(2 \leqslant d < r,\ r \geqslant 3)$. (**)

1. - Introduzione.

Sia $S_{r,q}$ $(r \geqslant 2)$ uno spazio di Galois d'ordine $q = p^t$ (p primo). In [2]₁ e [2]₂, G. Tallini ha posto il problema di studiare i k-insiemi di $S_{r,q}$ rispetto al comporta-con essi degli spazi subordinati S_d $(1 \leqslant d < r)$. A tale scopo sono state date le seguenti definizioni (cfr. $[2]_1$ n. 1, $[2]_2$ n. 1): posto $\theta_d = \theta_{d,q} = \sum_{s=0}^{d} q^s$, se $n_0, n_1, \ldots, n_l$ sono interi tali che $0 \leqslant n_0 < n_1 < \ldots < n_l \leqslant \theta_d$, si dice che un *$k$-insieme K di $S_{r,q}$ è di classe* $[n_0, n_1, \ldots, n_l]_d$ se ogni S_d di $S_{r,q}$ ha con K in comune $n_0, n_1, \ldots$ ovvero n_l punti; si dice che *K è di tipo* $(n_0, n_1, \ldots, n_l)_d$ se è di classe $[n_0, n_1, \ldots, n_l]_d$ ed esistono di fatto degli S_d che intersecano K in $n_0, n_1, \ldots, n_l$ punti. Se K è di tipo $(n_0, n_1, \ldots, n_l)_d$, gli interi $n_0, n_1, \ldots, n_l$ saranno detti *caratteri di K in dimensione d*; un S_d che sia 1-secante lo diremo anche *tangente*. Sia K di classe $[0, 1, n, q+1]_1$; si dice che *K è regolare* se per ogni punto P di K l'unione delle rette tangenti oppure appartenenti a K per P, se non è vuota, è uno spazio subordinato (cfr. $[2]_3$). Si dice che *K è singolare* se K ammette almeno un punto singolare, cioè tale che ogni retta per esso o è tangente o appartiene a K (cfr. $[2]_1$ n. 2, $[2]_2$ n. 2).

Richiamiamo ora risultati già noti al riguardo (cfr. $[2]_1$, $[2]_2$, $[2]_3$, $[4]_2$) che utilizzeremo nel seguito:

(1.1) *Se $K \neq \Phi$ e $K \neq S_{r,q}$, K ha almeno due caratteri in ogni dimensione* (cfr. $[2]_1$ e $[2]_2$ prop. I);

(*) Indirizzo: c/o prof. G. Tallini, Istituto Matematico «Guido Castelnuovo», Università, 00100 Roma, Italia.

(**) Ricevuto: 16-XII-1976.

(1.2) *Se è* $r \geqslant 3$ *e* K *è di tipo* $(0, n)_d$ *è necessariamente* $n = 1$ *oppure* $n = q^d$ *e* K *risulta rispettivamente un punto o il complementare di un iperpiano* (cfr. [2]$_1$, prop. XIV).

(1.3) *Se è* $r \geqslant 3$ *e* K *è di tipo* $(1, n)_{r-1}$, K *è una retta di* $S_{r,q}$ *oppure una* (q^2+1)*-calotta di* $S_{3,q}$ (cfr. [4]$_2$).

(1.4) *Se è* $r \geqslant 3$ *e* K *è di classe* $[0, 1, n]_1$ *con* $2 \leqslant n \leqslant q-1$, *regolare e non singolare, deve essere necessariamente* $r = 3$ *e* K *risulta una* (q^2+1)*-calotta di* $S_{3,q}$ (cfr. [2]$_3$, prop. V).

(1.5) *Se è* $r \geqslant 3$ *e* K *è di classe* $[0, 1, q, q+1]_1$, *regolare e non singolare, allora* K *è di tipo* $(0, q)_1$ *e quindi per la* (1.2) *è il complementare di un iperpiano* (cfr. [2]$_3$).

In questo lavoro si studiano i k-insiemi di $S_{r,q}$ $(r \geqslant 3)$ di tipo $(0, 1, m_d)_d$ con $2 \leqslant d < r$. Riassumeremo ora i risultati ottenuti.

Nel numero **2** ci si occupa in un primo tempo dei k-insiemi K di classe $[0, 1, m_d]_d$ per un fissato d. Si caratterizzano quelli per cui $k = m_d$; supposto poi $k > m_d$, si prova che K è di fatto di classe $[0, 1, m_h]_h$ per ogni $h = 1, 2, \ldots, d$ e che se K è di tipo $(0, 1, m_d)_d$, risulta di tipo $(0, 1, m_h)_h$ per ogni $h = 1, 2, \ldots, d$, per cui un k-insieme di classe $[0, 1, m_d]_d$ risulta anche di classe $[0, 1, m_1, q+1]_1$.

Si passa poi ad esaminare i k-insiemi K di tipo $(0, 1, m_d)_d$. Si dimostra che K risulta non singolare e che se è $r \geqslant 4$, K risulta anche regolare con $2 \leqslant m_1 \leqslant q-1$. Sfruttando questi risultati e la (1.4), si prova quindi che K può esistere solo in $S_{3,q}$.

Lo studio dei k-insiemi di tipo $(0, 1, m_d)_d$, $2 \leqslant d < r$, si riduce pertanto allo studio dei k-insiemi di $S_{3,q}$ di tipo $(0, 1, m_2)_2$.

Nel numero **3** si studiano appunto questi ultimi. Si prova che essi sono non regolari e che l'unione delle rette tangenti in un punto è costituita da n piani con $n \geqslant 2$. Si danno poi delle condizioni a cui devono soddisfare i caratteri m_1 ed m_2 di K ed infine si prova la non esistenza di K per particolari valori di m_1, m_2 e q.

2. - Proprietà generali dei k-insiemi di tipo $(0, 1, m_d)_d$ di $S_{r,q}$ $(2 \leqslant d < r;\ r \geqslant 3)$.

Sia K un k-insieme di $S_{r,q}$ $(r \geqslant 3,\ q = p^t,\ p$ primo) di classe $[0, 1, m_d]_d$ $(2 \leqslant d < r)$ diverso dal vuoto e diverso da $S_{r,q}$; detto m_1 il massimo numero di punti allineati esistenti su K, cominciamo a provare che

$$k = m_d \Longleftrightarrow m_d = m_1 . \tag{2.1}$$

Se K è costituito da un sol punto, la (2.1) è evidente, possiamo pertanto supporre $k \geqslant m_d$. Sia allora per ipotesi $m_d = m_1$ ed l una retta m_1-secante K. Gli S_d per la retta l non hanno ovviamente punti in comune con K fuori della retta stessa. Ne segue che K si riduce a $m_d = m_1$ punti allineati.

Sia ora $k = m_d$. Esiste allora un S_d tale che $K \subset S_d$. Per provare l'asserto basterà provare che

$$K \subset S_h (2 \leqslant h \leqslant d) \Rightarrow \exists S_{h-1}\colon K \subset S_{h-1} . \tag{2.2}$$

Infatti, se vale la (2.2), risulta per un certo S_1, $K \subset S_1$.

Sia $K \subset S_h$; essendo $1 < h \leqslant d < r$, è possibile trovare un S_d avente in comune con K almeno due punti e tale che $S_d \not\supset S_h$. Un tale S_d deve essere necessariamente m_d-secante e quindi $K \subset S_d$. Ne segue che $K \subset S_h \cap S_d \subset S_{h-1}$ in quanto $S_d \not\supset S_h$.

Dalla (2.1) si ha subito che:

I. *Un k-insieme di $S_{r,q}$ di classe $[0, 1, m_d]_d$ con $k = m_d$, risulta costituito da m_d punti su una retta e viceversa.*

Osserviamo che se $k < m_d$, K risulta di tipo $(0, 1)_d$ (cfr. (1.1)) e si riduce ad un sol punto; pertanto, in forza della precedente proposizione, nel seguito supporremo sempre

$$k > m_d . \tag{2.3}$$

Daremo ora alcune proprietà di tali insiemi.

II. *Se K è un k-insieme di classe $[0, 1, m_d]_d$, qualunque sia S_h $(h < d)$, si ha: $|S_h \cap K| < m_d$.*

Dimostrazione. È ovvio che $|S_h \cap K| \leqslant m_d$. Supponiamo $|S_h \cap K| = m_d$; essendo $k > m_d$, esiste $P \in K - S_h$. Detto S_{h+1} lo spazio congiungente il punto P ed S_h, risulta $h + 1 \leqslant d$ e $|K \cap S_{h+1}| \geqslant m_d + 1$, che è assurdo.

III. *I punti di un k-insieme di classe $[0, 1, m_d]_d$ $(2 \leqslant d < r)$ sono congiunti da $S_{r,q}$.*

Dimostrazione. Supponiamo $K \subset S_c$ $(d \leqslant c < r)$. Sia $P \in S_r - S_c$ e S_d uno spazio subordinato contenente P ed almeno due punti di K. S_d deve allora risultare m_d-secante ed essendo $K \subset S_c$, $|S_d \cap K \cap S_c| = m_d$. Per la proposizione II si ha un assurdo in quanto, essendo $S_d \not\subset S_c$, la dimensione di $S_d \cap S_c$ è minore di d.

IV. *Sia K di classe $[0, 1, m_d]_d$ $(2 \leqslant d < r)$. K risulta di classe $[0, 1, m_h]_h$ per ogni $h = 1, 2, \ldots, d$ ed è sempre $m_h < m_{h+1}$. Se poi K è di tipo $(0, 1, m_d)_d$, allora risulta anche di tipo $(0, 1, m_h)_h$ per ogni $h = 1, 2, \ldots, d$.*

Dimostrazione. Sia K di classe $[0, 1, m_d]_d$; per provare che K è di classe $[0, 1, m_h]_h$ per ogni $h = 1, 2, \ldots, d$, basterà provare che

$$K \text{ di classe } [0, 1, m_h]_h \text{ con } h > 1 \Rightarrow K \text{ di classe } [0, 1, m_{h-1}]_{h-1}\,. \tag{2.4}$$

Sia m_{h-1} il massimo numero di punti che K ha in comune con gli S_{h-1} e sia $\bar{S}_{h-1}$ un qualsiasi S_{h-1} avente più di un punto in comune con K; posto $m'_{h-1} = |\bar{S}_{h-1} \cap K|$, sarà $2 \leqslant m'_{h-1} \leqslant m_{h-1}$. Consideriamo gli S_h passanti per $\bar{S}_{h-1}$, essi sono in numero di θ_{r-h}, sono tutti m_h-secanti e a due a due si intersecano in $\bar{S}_{h-1}$, ne segue che

$$k = (m_h - m'_{h-1})\theta_{r-h} + m'_{h-1}\,. \tag{2.5}$$

Analogamente, a partire da un S_{h-1} che sia m_{h-1}-secante (esistente per ipotesi), si ha

$$k = (m_h - m_{h-1})\theta_{r-h} + m_{h-1}\,. \tag{2.6}$$

Confrontando (2.5) e (2.6) si ha $m'_{h-1} = m_{h-1}$. La (2.4) è pertanto provata.
Se K è di tipo $(0, 1, m_d)_d$, per provare l'asserto, basterà provare che

$$K \text{ di tipo } (0, 1, m_h)_h \text{ con } h > 1 \Rightarrow K \text{ di tipo } (0, 1, m_{h-1})_{h-1}\,. \tag{2.7}$$

Per la (2.4) K è di classe $[0, 1, m_{h-1}]_{h-1}$; d'altra parte, l'esistenza di S_{h-1} 0-secanti e di S_{h-1} tangenti è ovvia conseguenza dell'esistenza di S_h 0-secanti e di S_h tangenti; essendo poi $k > m_d > 1$, esistono senz'altro S_{h-1} aventi più di un punto in comune con K e quindi m_{h-1} punti.

Infine è $m_h < m_{h+1}$ per la proposizione II. La proposizione IV è così completamente provata.

D'ora in poi ci occuperemo soltanto dei k-insiemi di $S_{r,q}$ di tipo $(0, 1, m_d)_d$ con $2 \leqslant d < r$ e li indicheremo semplicemente con K.

Sia P un punto di K, dalla proposizione IV si ha che un S_h per il punto P $(h = 1, 2, \ldots, d)$ può risultare tangente oppure m_h-secante K; poichè K non si riduce ad un sol punto, è chiaro che gli S_h per P non possono essere tutti tangenti; la proposizione che segue mostra che essi non possono essere nemmeno tutti m_h-secanti.

V. *Dato K e dato $P \in K$, per P passa almeno un S_h tangente per ogni $h = 1, 2, \ldots, d$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su h. Proviamo che l'asserto è vero per $h = 1$. Se per assurdo esistesse $P \in K$ tale che ogni retta per P fosse m_1-secante, contando da P i punti di K si avrebbe

$$k = (m_1 - 1)\theta_{r-1} + 1 . \tag{2.8}$$

Data poi una retta tangente l (esistente per la proposizione IV) e detto P_1 il punto di l appartenente a K, contando da P_1 i punti di K si ha

$$k = (m_1 - 1)v + 1 , \tag{2.9}$$

dove v è il numero delle rette m_1-secanti per P_1. Poichè almeno la retta l per P_1 è tangente risulta $v < \theta_{r-1}$ e le (2.8) e (2.9) sono incompatibili. Il punto P non può quindi esistere.

Supponiamo ora vero l'asserto per h $(1 \leqslant h < d)$ e dimostriamo che esso è vero per $h+1$. Per assurdo, sia $P' \in K$ tale che ogni S_{h+1} per P' sia m_{h+1}-secante, per ipotesi sappiamo che per P' passa almeno un $\bar{S}_h$ tangente a K. Si possono allora contare i punti di K considerandoli distribuiti sugli S_{h+1} per $\bar{S}_h$ e si ha

$$k = (m_{h+1} - 1)\theta_{r-1-h} + 1 . \tag{2.10}$$

Dato poi un S'_{h+1} tangente (esistente per la proposizione IV) e un $S'_h \subset S'_{h+1}$ che risulti anch'esso tangente, si possono nuovamente contare i punti di K considerandoli distribuiti sugli S_{h+1} per S'_h e si ha

$$k = (m_{h+1} - 1)v' + 1 , \tag{2.11}$$

dove v' è il numero degli S_{h+1} per S'_h che risultano m_{h+1}-secanti. Poichè almeno S'_{h+1} è tangente, risulta $v' < \theta_{r-1-h}$ e le (2.10) e (2.11) sono incompatibili. Si ha così l'asserto.

Dato K, per la proposizione IV, restano individuati d interi $m_1, m_2, \ldots, m_d$ che sono i caratteri di K diversi da 0 e da 1 rispettivamente nelle dimensioni $1, 2, \ldots, d$; tali interi saranno detti *parametri* di K.

Proviamo che

VI. *I parametri m_1 ed m_2 di K verificano la relazione*

$$m_2 - 1 \equiv 0 \bmod (m_1 - 1) .$$

Dimostrazione. Sia P un punto di K e S_2 un piano m_2-secante per P. Poniamo $K' = K \cap S_2$; K' risulta un m_2-insieme di S_2. Poichè tutte le rette per P sono tangenti oppure m_1-secanti K, le rette di S_2 per P risultano tangenti oppure m_1-secanti K'. Detto v il numero delle rette di S_2 passanti per P ed m_1-secanti, si possono contare i punti di K' e si ha: $m_2 = (m_1 - 1)v + 1$, da cui $m_2 - 1 = (m_1 - 1)v$ e quindi l'asserto.

VII. *Un k-insieme K di $S_{r,q}$ $(r \geqslant 4)$ è regolare.*

Dimostrazione. Consideriamo un iperpiano S_{r-1} e un punto $P \in K - S_{r-1}$ (esistente per la proposizione III). Proiettiamo da P i punti di $K - \{P\}$ sull'S_{r-1}. Poichè le rette per P sono tangenti oppure m_1-secanti K, si ottiene in tal modo un k'-insieme K' di S_{r-1} con $k' = (k-1)/(m_1 - 1)$. Proviamo che K' è di tipo $(0, (m_2 - 1)/(m_1 - 1))_1$ in S_{r-1}.

Sia s una retta di S_{r-1}; il piano congiungente s con P può risultare tangente oppure m_2-secante K e quindi la retta s risulterà rispettivamente 0-secente oppure $(m_2 - 1)/(m_1 - 1)$-secante K'.

Poichè $K' \neq \Phi$ (in quanto $k > 1$) e $K' \neq S_{r-1}$ (in quanto per la proposizione V esiste almeno una retta per P tangente a K), per la (1.1) K' è di tipo $(0, (m_2 - 1)/(m_1 - 1))_1$ in S_{r-1}. Ma è $r - 1 \geqslant 3$ e quindi per la (1.2) K' si riduce ad un sol punto ovvero è il complementare di un iperpiano S_{r-2} di S_{r-1}. Se K' fosse un sol punto, i punti di K sarebbero tutti allineati e questo è contro l'ipotesi $k > m_d$ (cfr. prop. I); K' è allora del tipo $S_{r-1} - S_{r-2}$. Questo vuol dire che l'unione delle rette tangenti in P a K risulta l'iperpiano che congiunge S_{r-2} e P e quindi K è regolare.

Osserviamo che nel corso della precedente dimostrazione, indipendentemente dall'ipotesi $r \geqslant 4$, si è provato che K determina per proiezione da un suo punto P su un $S_{r-1,q} (P \notin S_{r-1,q})$ un k'-insieme di tipo $(0, (m^2 - 1)/(m_1 - 1))_1$ di $S_{r-1,q}$ e quindi, se è $r = 3$, deve essere $q \equiv 0 \bmod (m_2 - 1)/(m_1 - 1)$ (cfr. [1]). È pertanto vera la seguente proposizione:

VIII. *Dato K in $S_{3,q}$ $(q = p^t$, p primo$)$, i parametri m_1 ed m_2 devono verificare la relazione $(m_2 - 1)/(m_1 - 1) = p^s$ $(1 \leqslant s \leqslant t)$.*

Proviamo ora che

IX. *Un k-insieme K di $S_{r,q}$ $(r \geqslant 3)$ non contiene rette ed è non singolare.*

Dimostrazione. Poichè K è anche di tipo $(0, 1, m_1)_1$ (cfr. prop. IV) e le rette per un punto non possono essere tutte tangenti (essendo $k > 1$), per provare l'asserto basta provare che è $m_1 \neq q + 1$.

Se fosse $m_1 = q + 1$, cioè K di tipo $(0, 1, q + 1)_1$, esso sarebbe evidentemente uno spazio subordinato di $S_{r,q}$ e ciò è escluso per la proposizione III. Si ha quindi l'asserto.

X. *Dato K in $S_{r,q}$ $(r \geqslant 4)$, il parametro m_1 di K verifica la condizione $m_1 \leqslant q - 1$.*

Dimostrazione. Per la proposizione IX è $m_1 \leqslant q$. Supponiamo per assurdo $m_1 = q$. K risulta allora di classe $[0, 1, q, q + 1]_1$, regolare, non singolare (cfr. prop. VII, IX, IV) e quindi per la (1.5) è di tipo $(0, q)_1$. Ma questo è assurdo (cfr. prop. IV) e quindi si ha l'asserto.

Dalle proposizioni VII, IX, X, IV, III e dalla (1.4) si ha che

XI. *In $S_{r,q}$ $(r \geqslant 4)$ non esistono k-insiemi di tipo $(0, 1, m_d)_d$ per ogni $d = 2, 3, \ldots, r - 1$.*

3. - I k-insiemi di tipo $(0, 1, m_2)_2$ di $S_{3,q}$.

In forza della proposizione XI, lo studio dei k-insiemi di tipo $(0, 1, m_d)_d$ con $2 \leqslant d < r$ di $S_{r,q}$, si riduce a quello dei k-insiemi di tipo $(0, 1, m_2)_2$ di $S_{3,q}$. In questo numero ci occuperemo di essi.

Sussiste la seguente proposizione:

XII. *Sia K un k-insieme di $S_{3,q}$ $(q = p^t$, p primo$)$ di tipo $(0, 1, m_2)_2$. Se $k = m_2$, k è costituito da punti allineati e viceversa. Se $k > m_2$, K è anche di tipo $(0, 1, m_1)_1$ con $m_1 < m_2$ e $m_1 \leqslant q$; i parametri m_1 ed m_2 verificano la relazione*

$$m_2 - 1 = p^s(m_1 - 1) \qquad (1 \leqslant s \leqslant t) \tag{3.1}$$

e inoltre K risulta non regolare e l'unione delle rette tangenti in un suo qualsiasi punto è costituita da n piani con $n \geqslant 2$.

Dimostrazione. Se $k = m_2$, l'asserto è vero per la proposizione I. Se $k > m_2$, per le proposizioni IV e IX, K è di tipo $(0, 1, m_1)_1$ con $m_1 < m_2$ e $m_1 \leqslant q$; per la proposizione VIII si ha la (3.1). Mostriamo ora che K è non regolare.

Supponiamo per assurdo K regolare. Se fosse $m_1 = q$, per la (1.5), K sarebbe il complementare di un piano e pertanto non potrebbero esistere rette tangenti, mentre sappiamo che K è di tipo $(0, 1, m_1)_1$. Dovrebbe quindi essere $m_1 \leqslant q-1$; ma allora, per la proposizione IX e per la (1.4), K sarebbe una (q^2+1)-calotta ed è noto che le (q^2+1)-calotte non ammettono piani 0-secanti. Si ha quindi un assurdo essendo K di tipo $(0, 1, m_2)_2$, onde K è non regolare.

Per completare la dimostrazione della proposizione XII, cominciamo ad osservare che l'unione delle rette tangenti in un punto P a K, contiene almeno il piano tangente in quel punto (cfr. prop. V) e, poichè K è non regolare, contiene anche almeno una retta per P fuori di tale piano. L'asserto segue allora dal fatto che esistono rette tangenti per le quali passa un piano tangente e dalla seguente osservazione che è di facile verifica.

(3.2) *Il numero dei piani tangenti per una retta tangente non dipende dalla particolare retta.*

La proposizione XII ora provata, ci permette di ottenere una limitazione superiore per k. Infatti, detta l la retta intersezione di due piani tangenti in uno stesso punto, i punti di K si possono pensare distribuiti sui piani del fascio di asse l. Poichè in questo fascio ci sono almeno due piani tangenti, si ha

$$k \leqslant (m_2-1)(q-1)+1 \,. \tag{3.3}$$

Se poi si tiene conto che i piani per una retta m_1-secante sono tutti m_2-secanti, si possono contare i punti di K pensandoli distribuiti sui piani di un fascio avente per asse una retta m_1-secante e si ha

$$k = (m_2-m_1)(q+1)+m_1 \,. \tag{3.4}$$

Daremo ora delle condizioni necessarie per l'esistenza di k-insiemi K di tipo $(0, 1, m_2)_2$ con $k > m_2$ sotto opportune ipotesi per il valore di uno o più dei termini m_1, m_2 e q.

XIII. *Se K è una calotta, deve essere $m_2-1=p^s$, con $s<t$.*

Dimostrazione. Per la (3.1) è senz'altro $m_2-1=p^s$ con $s \leqslant t$. Se fosse $s=t$, cioè $m_2-1=q$, K risulterebbe una (q^2+1)-calotta (cfr. (3.4)) e non potrebbero esistere piani 0-secanti. Si ha pertanto l'asserto.

XIV. *Se m_2 è tale che $m_2 - 1 = p_1^r$ (p_1 primo), è necessariamente $p_1 = p$.*

Dimostrazione. Basta osservare che dalla (3.1) si ricava anche $m_2 - 1 \equiv 0 \bmod p$.

XV. *Se K non è una calotta e $m_2 - 1 = p^r$, deve essere $m_2 \equiv 0 \bmod m_1$.*

Dimostrazione. Non essendo K una calotta per la proposizione XII, deve essere $m_1 - 1 = p^h$ con $0 < h < r$. Dato allora un S_2 che sia m_2-secante e detto b il numero delle rette m_1-secanti $K' = K \cap S_2$, si ha (cfr. [**2**]$_1$)

$$m_1(m_1 - 1)\, b = m_2(m_2 - 1)\,, \qquad \text{da cui} \qquad m_2(m_2 - 1) \equiv 0 \bmod m_1\,.$$

Se proviamo che tra i fattori di m_1 non può esserci p, si avrà ovviamente l'asserto. Supponiamo per assurdo $m_1 = ap$, cioè $p^h + 1 = ap$, si avrà: $1 = p(a - p^{h-1})$ e questo è assurdo essendo i fattori a secondo membro interi e $p \neq 1$.

XVI. *Se $m_2 - 1 = p$, K è una calotta.*

Dimostrazione. Basta osservare che deve essere $m_2 - 1 \equiv 0 \bmod (m_1 - 1)$ e $m_1 < m_2$ (cfr. (3.1) e prop. XII).

XVII. *In $S_{3,q}$, con $q = p$, K non può essere una calotta.*

Dimostrazione. Segue subito dalla proposizione XIII.

XVIII. *In $S_{3,q}$, con $q = p$, non esistono k-insiemi di tipo $(0, 1, q + 1)_2$.*

Dimostrazione. Segue facilmente dalle proposizioni XVI e XIII.

XIX. *In $S_{3,q}$ non esistono k-insiemi di tipo $(0, 1, 4)_2$.*

Dimostrazione. Supponiamo che un tale k-insieme esista e sia K. Essendo $m_2 - 1 = 3$ primo, K è una calotta (cfr. prop. XVI). Inoltre per la (3.1) e per la proposizione XVIII, deve essere $q = 3^t$ ($t > 1$). Sia ora P un punto di K, proiettando da P i punti di $K - \{P\}$ su un piano 0-secante, si ottiene un k'-insieme del piano di tipo $(0, 3)_1$ con $k' = 2q + 3$ e cioè un $\{2q + 3, 3\}$-arco. Si giunge così ad un assurdo in quanto è già noto che in $S_{2,q}$ ($q = 3^t$, $t > 1$) non esistono $\{2q + 3, 3\}$-archi (cfr. [**4**]$_1$) e quindi si ha l'asserto.

Bibliografia.

[1] A. Barlotti, *Sui $\{k, n\}$-archi di un piano lineare finito*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **11** (1956), 553-556.

[2] G. Tallini: $[\cdot]_1$ *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Istituto Matematico Università Napoli, Relazione **30** 1973; $[\cdot]_2$ *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*, Convegno di Teoria combinatoria, Accademia Nazionale Lincei, Settembre 1973; $[\cdot]_3$ *I k-insiemi di classe $[0, 1, n, q+1]_1$ regolari di $S_{r,q}$*, Atti del Convegno sulle geometrie combinatorie 1975, G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) 1976.

[3] M. Tallini Scafati, *Calotte di tipo (m, n) in uno spazio di Galois $S_{r,q}$*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (2) **53** (1972), 71-81.

[4] J. A. Thas: $[\cdot]_1$ *Some results concerning $\{(q+1)(n-1), n\}$-arcs and $\{(q+1)\cdot(n-1)+1, n\}$-arcs in finite projective planes of order q*, preprint; $[\cdot]_2$ *A combinatorial problem*, Geometriae dedicata **1** (1973), 236-240.

Summary.

We study the k-sets K of type $(0, 1, m_d)_d$, embedded in a Galois space $S_{r,q}$ $(2 \leq d < r, r \geq 3)$. We remember that K is of type $(0, 1, m_d)_d$ when every S_d meets K in 0, 1, or m_d points only. If $k = m_d$, K lies on a line, in the case $k > m_d$, we prove that a k-set exists only if it is non regular and embedded in $S_{3,q}$.

Then we study k-sets of type $(0, 1, m_2)_2$ embedded in $S_{3,q}$. Among other results, we show that they are of type $(0, 1, m_1)_1$ and the locus of the tangent lines at a point is a family of planes at least with two elements.

At last, we state some conditions on the characters m_1 and m_2 and prove that, for particular values of m_1, m_2 and q, no k-set exists.

* * *