Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 99-107

M. GIONFRIDDO (*)

Ipergrafi uniformi ϱ-planari ed ipergrafi di tipo UC_p. (**)

1. - Sia $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ un *ipergrafo* qualsiasi. Posto $(\boldsymbol{H}) = (X, \mathscr{E}^*)$, dove

$$\mathscr{E}^* = \{F\colon \exists E_i \in \mathscr{E},\ F \subseteq E_i\}\,,$$

diremo *p-catena di* $\boldsymbol{H}$, per $0 \leqslant p \leqslant r(X) - 1$, una coppia $(A, \boldsymbol{B})$ nella quale $A = (F_1, F_2, \ldots, F_{r+1})$ è una $(r+1)$-upla, per $r > 1$, di *p-simplessi* ([1]) distinti (tranne al più F_1 ed F_{r+1}) di $(\boldsymbol{H})$ e $\boldsymbol{B} = (E_1, \ldots, E_r)$ è una (r)-upla di simplessi distinti di $\boldsymbol{H}$ tali che

(i) $\dim E_i > p$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$;

(ii) $F_i \subseteq E_{i-1} \cap E_i$, $\forall i \in \{2, \ldots, r\}$;

(iii) $F_1 \subset E_1$, $F_{r+1} \subset E_r$.

L'intero positivo r si dirà *lunghezza* della p-catena. Una p-catena tale che $F_1 = F_{r+1}$ si dirà *p-ciclo*. Un p-ciclo verrà detto *significativo* se di lunghezza $r > 2$ [**6**].

Un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ si dirà *p-connesso* se per ogni coppia di p-simplessi F', F'' di $(\boldsymbol{H})$ esiste una p-catena nella quale è $F' = F_1$, $F'' = F_{r+1}$. Se $p = 0$, un ipergrafo O-connesso si dirà più semplicemente *connesso*; in modo analogo una O-catena si dirà *catena* ed uno O-ciclo si dirà *ciclo*.

Se $\boldsymbol{H}$ è un ipergrafo *semplice* ed *uniforme* di rango $n + 1$, diremo *grafo k-sezione di* $\boldsymbol{H}$ il k-grafo $\boldsymbol{H}/k + 1$ avente per vertici i vertici di $\boldsymbol{H}$ e per simplessi le $(k+1)$-uple di vertici contenute in almeno un simplesso di $\boldsymbol{H}$ (si ha ovviamente $0 \leqslant k \leqslant n$) [**8**]$_2$. Gli ipergrafi considerati nel seguito saranno tutti *semplici*.

(*) Indirizzo: Corso delle Province 50, 95127 Catania, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 14-I-1976.

([1]) Diremo *p-simplessi* i simplessi di dimensione p.

2. – Fatte queste premesse, ricordiamo che un ipergrafo di rango $n+1$ è rappresentabile in uno spazio ordinario $\boldsymbol{R}^n$, associando ad ogni elemento di X un punto di $\boldsymbol{R}^n$ e ad ogni simplesso E_i, di dimensione h, un (h)-edro.

Definizione. Si dirà che un ipergrafo $\boldsymbol{H}$, uniforme di rango $n+1$, è *ϱ-planare* se è rappresentabile in $\boldsymbol{R}^{n+\varrho}$ in modo che i suoi simplessi abbiano in comune, a due a due, soltanto regioni k dimensionali, per $k<n$, corrispondenti a k-simplessi di $(\boldsymbol{H})$.

Indicheremo con $\boldsymbol{P}_{n,\varrho}$ la classe degli ipergrafi uniformi di rango $n+1$, ϱ-planari (tali ipergrafi si diranno anche « di tipo $P_{n,\varrho}$ »).

Definizione. Diremo *$(h;k)$-spigolo* (o *h-spigolo di molteplicità k*) di un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ uniforme di rango $n+1$, un simplesso di $\boldsymbol{H}/h+1$ che sia comune a $k+1$ simplessi di $\boldsymbol{H}$. Un $(h;0)$-spigolo si dirà, anche, *h-lato.*

Definizione. Si dirà *grado di un $(h;k)$-spigolo* l'intero positivo $k+1$. Si dirà *caratteristica degli h-spigoli* la (r)-upla costituita dai gradi di tutti gli h-spigoli di $\boldsymbol{H}$ (2).

Teor. 2.1. *Sia $\boldsymbol{H}=(X,\mathscr{E})$ un ipergrafo uniforme di rango $r(X)=n+1$.*

(i) *Se $\boldsymbol{H}$ è ϱ-planare, allora $\boldsymbol{H}$ è μ-planare $\forall\mu>\varrho$.*

(ii) *Se esiste in $\boldsymbol{H}$ un $(n-1;k)$-spigolo con $k\geqslant 2$, allora $\boldsymbol{H}$ non può essere O-planare.*

(iii) *Se $\boldsymbol{H}$ è O-planare, allora*

$$\exists r\in\boldsymbol{N}\,, \qquad \exists s\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}\,, \qquad C(\boldsymbol{H})_{n-1}=\{(1)_r,(2)_s\}\ (^3)\,.$$

(iv) *Se $\boldsymbol{H}$ contiene il grafo n-sezione di un ipergrafo $\boldsymbol{H}'$ uniforme di rango $n+2$, allora $\boldsymbol{H}$ non può essere O-planare.*

(v) *Se $r(X)\geqslant 3$ ed esiste in $\boldsymbol{H}$ un ciclo significativo $(A,\boldsymbol{B})$ tale che,*

(a) $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{r}E_i\right|=r(X)-2$, *dove* $(E_1,\dots,E_r)=\boldsymbol{B}$,

(b) $\exists E'\in\mathscr{E}\ \bigcap\limits_{i=1}^{r}E_i\subset E'$ *e* $E'\neq E_i$, $\quad\forall i\in\{1,2,\dots,r\}$,

(c) $\bigcap\limits_{i=1}^{r}E_i\cap A=\emptyset$,

allora $\boldsymbol{H}$ non può essere O-planare.

---

(2) Per $h=0$ si hanno i concetti di *grado* e di *caratteristica dei vertici* (cfr. [**1**], [**3**], [**4**]).

(3) $C(\boldsymbol{H})_{n-1}$ è la caratteristica degli $(n-1)$-spigoli di $\boldsymbol{H}$: in tale caratteristica 1 è ripetuto r volte, 2 s volte.

Dim. La (i) è immediata. La (ii) è dovuta al fatto che non è possibile rappresentare in $\boldsymbol{R}^n$ $k+1$ simplessi, con $k \geqslant 2$, aventi in comune un $(n-1; k)$-spigolo, senza che due di essi, almeno, abbiano in comune una regione n-dimensionale. La (iii) segue dalla (ii) considerando che per ogni $(n-1; k)$-spigolo di $\boldsymbol{H}$ si ha $k < 2$. La (iv) si prova considerando che $\boldsymbol{H}'$, essendo uniforme di rango $n+2$, non è rappresentabile in $\boldsymbol{R}^n$. Infine, la (v) segue dal fatto che il simplesso E', comunque si rappresenti $\boldsymbol{H}$ in $\boldsymbol{R}^n$, ha sempre una regione n-dimensionale in comune con almeno un simplesso di $\boldsymbol{B}$. □

3. – Diremo «*di tipo UC_p*» un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ che sia uniforme, p-connesso, e privo di p-cicli significativi, essendo

$$p = \min_{i,j \in I} \{ |E_i \cap E_j| - 1 \colon E_i, E_j \in \mathscr{E}, E_i \cap E_j \neq \emptyset \} .$$

Lemma I. *Sia $\boldsymbol{H}$ un ipergrafo di tipo UC_p. Se $p > 0$ ed esistono in $\boldsymbol{H}$ almeno due simplessi E_i, E_j tali che $|E_i \cap E_j| > p+1$ [risp. $|E_i \cap E_j| > p+2$, se $p=0$], si ha*

$$|(E_i \cap E_j) \cap E_h| \leqslant p+1 \qquad \forall E_h \in \mathscr{E} .$$

Dim. Infatti, se esistesse in $\boldsymbol{H}$ un simplesso E_h tale che $|(E_i \cap E_j) \cap \cap E_h| > p+1$, posto

$$E_i \cap E_j = \{x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, \dots, x_{p+r}\} \qquad (r \in \boldsymbol{N} - \{1\}) \text{ [risp. } r \in \boldsymbol{N} - \{1, 2\}],$$

$$E_i \cap E_j \cap E_h \supseteq \{x_1, x_2, \dots, x_{p+1}, x_{p+2}\} ,$$

si potrebbe allora determinare il p-ciclo significativo $(A, \boldsymbol{B})$ così fatto:

$$A = (\{x_1, x_2, \dots, x_{p+1}\}, \{x_2, x_3, \dots, x_{p+1}, x_{p+2}\}, \{x_1, x_3, \dots, x_{p+1}, x_{p+2}\},$$
$$\{x_1, x_2, \dots, x_{p+1}\}) \qquad [\text{risp. } A = (\{x_1\}, \{x_3\}, \{x_2\})] ,$$

$\boldsymbol{B} = (E_i, E_j, E_h)$, contro le ipotesi. □

Lemma II. *Sia $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ un ipergrafo di tipo UC_p. Se $\boldsymbol{H}'$ è un ipergrafo di tipo UC_p ottenuto da $\boldsymbol{H}$ con l'aggiunta di un simplesso E', allora, posto $\bar{X} = E' \cap X$, si ha $p+1 \leqslant |\bar{X}| \leqslant n$, dove $n = r(X) - 1$.*

Dim. Per la p-connessione di $\boldsymbol{H}'$ si ha immediatamente $|\bar{X}|\geqslant p+1$. Non può essere inoltre $|\bar{X}|=n+1$, poichè in tal caso dovrebbero esistere due simplessi E_i, E_j di $\boldsymbol{H}$ tali che

$$|E_i\cap\bar{X}|\geqslant p+1\,,\ |E_j\cap\bar{X}|\geqslant p+1\,,\ E_i\cap\bar{X}\not\subseteq E_j\cap\bar{X}\,,\ E_j\cap\bar{X}\not\subseteq E_i\cap\bar{X}\,,$$

e quindi, per la p-connessione di $\boldsymbol{H}$, si potrebbe determinare in $\boldsymbol{H}'$ un p-ciclo significativo $(A, \boldsymbol{B})$ con E_i, E_j, $E'\in\boldsymbol{B}$. Contro le ipotesi. □

Lemma III. *Nelle medesime ipotesi del Lemma II, se esiste in* $\boldsymbol{H}$ *un simplesso* E_i *tale che* $|E_i\cap\bar{X}|>p+1$, *si ha* $E_i\cap\bar{X}=\bar{X}$.

Dim. Infatti, se per almeno un E_i di $\boldsymbol{H}$ tale che $|E_i\cap\bar{X}|>p+1$ fosse $\bar{X}-E_i\neq\emptyset$, allora dovrebbe necessariamente esistere in $\boldsymbol{H}$ almeno un simplesso E_j tale che $|E_j\cap\bar{X}|\geqslant p+1$ e $E_j\cap\bar{X}\not\subseteq E_i\cap\bar{X}$.

Da cui se $E_i\cap\bar{X}\not\subseteq E_j\cap\bar{X}$, allora per quanto si è visto nel Lemma II dovrebbe esistere in $\boldsymbol{H}'$ un p-ciclo significativo, se invece $E_i\cap\bar{X}\subseteq E_j\cap\bar{X}$ si avrebbe immediatamente un p-ciclo di lunghezza tre tra E', E_i, E_j. Contro le ipotesi. □

Teor. 3.1. *Se* $\boldsymbol{H}$ *è un ipergrafo di tipo* UC_p *privo di* $(n-1;k)$*-spigoli, con* $k\geqslant 2$, *allora* $\boldsymbol{H}$ *è* ϱ*-planare,* $\forall\varrho\geqslant 0$.

Dim. Dimostriamo il teorema per induzione su $m=|\mathscr{E}|$. Osserviamo che per il Teor. 2.1, (i) è sufficiente darne una dimostrazione per $\varrho=0$.

Per $m=1$ la tesi è immediata. Supponiamo, dunque, che sia vera per un certo m e sia $\boldsymbol{H}'$ un ipergrafo, verificante le ipotesi del teorema, ottenuto da $\boldsymbol{H}$ (ipergrafo con m simplessi) con l'aggiunta di un simplesso E'. Se $\bar{X}=E'\cap X$, si ha (per il Lemma II) $p+1\leqslant|\bar{X}|\leqslant n$. Allora:

(i) se $|\bar{X}|=p+1<n$, gli $E_i\in\mathscr{E}$, incidenti con E', hanno in comune con questo un simplesso di $\boldsymbol{H}/p+1$ e quindi E' è rappresentabile in $\boldsymbol{R}^n$ in modo da far risultare $\boldsymbol{H}'$ O-planare;

(ii) se $|\bar{X}|=p+1=n$, esiste in $\boldsymbol{H}$ un unico simplesso, che indichiamo con $\bar{E}$, tale che $\bar{E}\cap E'\neq\emptyset$ (più precisamente tale che $\bar{E}\cap E'=\bar{X}$) e la tesi è immediata;

(iii) se $p+1<|\bar{X}|\leqslant n$, esiste in $\boldsymbol{H}$ un simplesso $\bar{E}$ tale che $\bar{E}\cap\bar{X}=\bar{X}$, (infatti se così non fosse, dovrebbero esistere in $\boldsymbol{H}$ almeno due simplessi E_i, E_j tali che $|E_i\cap\bar{X}|=|E_j\cap\bar{X}|=p+1$ e $E_i\cap\bar{X}\neq E_j\cap\bar{X}$, e questo porterebbe all'esistenza in $\boldsymbol{H}'$ di un p-ciclo significativo). Nel caso particolare che sia $|\bar{X}|=2$ $(p=0)$, si ha subito la tesi.

Supponiamo, dunque, $|\bar{X}|\geqslant 3$. Poichè (cfr. Lemma III)

$$\forall E_i \in \mathscr{E}, \qquad E_i \cap \bar{X} \neq \emptyset \Rightarrow |E_i \cap \bar{X}| = p+1, \quad \text{opp.}\ E_i \cap \bar{X} = \bar{X},$$

segue, per il Lemma I, che esiste in $\boldsymbol{H}$ un unico simplesso $\bar{E}$ tale che $\bar{E} \cap \bar{X} = \bar{X}$, e si può dunque determinare una rappresentazione di E' in $\boldsymbol{R}^n$ in modo da far risultare $\boldsymbol{H}'$ O-planare. □

Teor. 3.2. *Un n-albero è ϱ-planare, $\forall \varrho \geqslant 0$* (4).
Basta osservare che un n-albero verifica le ipotesi del Teor. 3.1 per $p = 0$.

Teor. 3.3. *Sia $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ un ipergrafo verificante le ipotesi del Teor.* 3.1. *Se in $\boldsymbol{H}$ non esistono $(h; k)$-spigoli, con $k \geqslant 1$, contenenti $(r; q)$-spigoli con $1 \leqslant r < h$ e $q > k$, si ha* (5)

$$|X| - (r(X) - 1)\cdot|\mathscr{E}| + F = 2,$$

dove $F = 1 + \sum\limits_{k} \sum\limits_{h=1}^{r(x)-2} h\cdot k\cdot \bar{s}_{(h;k)}$.

Dim. Dimostriamo il teorema per induzione su $m = |\mathscr{E}|$. Poniamo poi $v = |X|$, $n = r(X) - 1$.

Per $m = 1$ la tesi è immediata. Supponiamo, dunque, che sia vera per un certo m e siano $\boldsymbol{H}$ ed $\boldsymbol{H}'$ rispettivamente un ipergrafo con m simplessi ed un ipergrafo ottenuto da $\boldsymbol{H}$ con l'aggiunta di un simplesso E', entrambi verificanti le ipotesi del teorema. Posto $\bar{X} = X \cap E'$ $(p+1 \leqslant |\bar{X}| \leqslant n$, cfr. Lemma II$)$, si ha

$$\begin{aligned} v_{(\boldsymbol{H}')} - n\cdot m_{(\boldsymbol{H}')} + F_{(\boldsymbol{H}')} &= \big(v_{(\boldsymbol{H})} + n + 1 - |\bar{X}|\big) - n\cdot(m_{(\boldsymbol{H})} + 1) + \big(F_{(\boldsymbol{H})} + |\bar{X}| - 1\big) \\ &= v_{(\boldsymbol{H})} - n\cdot m_{(\boldsymbol{H})} + F_{(\boldsymbol{H})} = 2, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che in $\boldsymbol{H}'$ esistono, rispetto ad $\boldsymbol{H}$, un $\big(|\bar{X}| - 1; k\big)$-spigolo in meno ed un $\big(|\bar{X}| - 1; k+1\big)$-spigolo in più. □

4. – Per gli ipergrafi connessi « di tipo $P_{1,0}$ » la (iii) del Teor. 2.1 vale anche nel verso opposto.

---

(4) Un n-albero è un n-grafo connesso tale che $|X| = (r(X) - 1)\cdot|\mathscr{E}| + 1$ [3].

(5) $\bar{s}_{(h;k)}$ è il numero degli $(h; k)$-spigoli non contenuti in $(p; k)$-spigoli con $0 < h < p$ e $k \geqslant 1$ (non contenuti, cioè, in $(h; k)$-spigoli di dimensione maggiore).

Teor. 4.1. *Sia H un ipergrafo connesso. Se H ha rango $r(X) = 2$ e caratteristica dei vertici $C(H)_0 = \{(1)_2, (2)_{m-1}\}$, dove $m = |\mathscr{E}|$, H è « di tipo $P_{1,0}$ » e viceversa.*

Dim. Se $C(H)_0 = \{(1)_2, (2)_{m-1}\}$ e $r(X) = 2$, H è un grafo determinato univocamente, a meno di isomorfismi, dalla sua caratteristica dei vertici, [4]: più precisamente H è una catena avente per estremi i due vertici di grado uno. Da cui si ha la tesi. Viceversa se H è un ipergrafo connesso « di tipo $P_{1,0}$ », allora necessariamente H è una catena avente m simplessi e $v = m - 1$ vertici, da cui segue la tesi. □

5. – Nel n. 2 è stato introdotto il concetto di ϱ-planarità per ipergrafi uniformi. Diamo qui il concetto di *planarità* per ipergrafi di rango tre, non necessariamente uniformi.

Sia $H = (X, \mathscr{E})$ un ipergrafo qualsiasi di rango tre e $G(H)_k$, dove $k = 1, 2$, il k-grafo avente per simplessi i k-simplessi di H e per vertici gli estremi di tali simplessi ($G(H)_k$ verrà detto *k-grafo relativo ad H*). L'ipergrafo H si dirà *planare* se è rappresentabile in R^2 in modo che i grafi $G(H)_1$ e $G(H)_2$, ad esso relativi, siano rispettivamente 1-planare e O-planare, e che due simplessi E_i, E_j, tali che $\dim E_i = 1$, $\dim E_j = 2$, $E_i \not\subset E_j$, non si intersechino mai in punti che non siano loro estremi.

In questo numero considereremo sempre ipergrafi semplici, connessi, e privi di simplessi di cardinalità uno.

Lemma IV. *Sia $H = (X, \mathscr{E})$ un ipergrafo di rango tre, planare ed $H' = (X', \mathscr{E}')$ un ipergrafo di rango tre, planare, connesso, ottenuto da H con l'aggiunta di un simplesso E'. Se $x = |X'| - |X|$, si ha*

$$F_{(H')} = F_{(H)} + (\dim E' - x) \ (^6) \, .$$

Dim. Poniamo per semplicità $F_{(H')} = F'$, $f_{(H')} = f'$, ..., $F_{(H)} = F$, $f_{(H)} = f$, ..., $v' = |X'|$, $v = |X|$. Osserviamo che si ha $0 \leqslant x \leqslant \dim E'$, $\dim E' \in \{1, 2\}$. Inoltre almeno un estremo di E' è vertice di H, altrimenti H' non sarebbe connesso.

Sia dunque $E' = \{x_1, x_2, x_3\}$ [risp. $E' = \{x_1, x_2\}$]. Per $x = 2$ [risp. $x = 1$] si ha immediatamente $f' = f$, $s_1' = s_1$, $s_2' = s_2$, e quindi $F' = F$. Per $x = 1$ [risp.

(6) Si pone $F = f + s_1 + 2s_2$, dove f è il numero delle facce che ci sono in H, s_1 il numero degli spigoli *semplici* (ossia comuni a due simplessi), s_2 il numero degli spigoli *doppi* (ossia comuni a tre simplessi).

$x = 0$], due elementi di E', ad esempio x_1 e x_2, sono vertici di $\boldsymbol{H}$. Allora:

(i) *se esiste in* $\boldsymbol{H}$ *un simplesso* E *tale che* $x_1, x_2 \in E$, si ha $f' = f$, $s_1' = s_1 + 1$, $s_2' = s_2$ oppure $f' = f$, $s_1' = s_1 - 1$, $s_2' = s_2 + 1$ a seconda che $\{x_1, x_2\}$ sia uno spigolo *semplice* o *doppio* di $\boldsymbol{H}'$ (il che avviene rispettivamente se E è l'unico simplesso di $\boldsymbol{H}$ cui appartengono x_1, x_2 oppure se ne esiste un altro), in ogni caso si ha $F' = F + 1$;

(ii) *se* x_1, x_2 *non appartengono ad un medesimo simplesso di* $\boldsymbol{H}$, si ha $f' = f + 1$, $s_1' = s_1$, $s_2' = s_2$, da cui $F' = F + 1$.

Infine, per $x = 0$,

(iii) *se* $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3\}$ *non sono contenuti in alcun simplesso di* $\boldsymbol{H}$, si ha $f' = f + 2$, $s_1' = s_1$, $s_2' = s_2$, da cui $F' = F + 2$;

(iv) *se* $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$ *non sono contenuti in alcun simplesso di* $\boldsymbol{H}$, *mentre esiste un simplesso* E *tale che* $\{x_1, x_3\} \subseteq E$, si ha $f' = f + 1$, $s_1' + 2s_2' = s_1 + 2s_2 + 1$, da cui $F' = F + 2$ (7);

(v) *se* $\{x_1, x_2\}$ *non è contenuto in alcun simplesso di* $\boldsymbol{H}$, *mentre esistono due simplessi* E', E'' *tali che* $\{x_1, x_3\} \subseteq E'$, $\{x_2, x_3\} \subseteq E''$, si ha $f' = f$, $s_1' + 2s_2' = s_1 + 2s_2 + 2$, da cui $F' = F + 2$ (7);

(vi) *se* $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3\}$ *sono contenuti rispettivamente in* E_1, E_2, E_3, si ha $f' = f - 1$, $s_1' + 2s_2' = s_1 + 2s_2 + 3$, da cui $F' = F + 2$ (7). □

Teor. 5.1. *Se* $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ *è un ipergrafo di rango tre, planare, si ha*

$$v - \sum_{j=1}^{2} j \cdot m_{(j)} + F = 2 ,$$

dove $v = |X|$, $m_{(j)}$ *è il numero dei simplessi di dimensione* j *che ci sono in* $\boldsymbol{H}$.

Dim. Dimostriamo il teorema per induzione su $m = |\mathscr{E}|$. Per $m = 1$ la tesi è di facile verifica. Supponiamo, dunque, che sia vera per un certo m e sia $\boldsymbol{H}$ un ipergrafo di rango tre, planare, con m simplessi. Se $\boldsymbol{H}'$ è un ipergrafo di rango tre, planare, connesso, ottenuto da $\boldsymbol{H}$ con l'aggiunta di un simplesso E', per il Lemma IV si ha:
se $\dim E' = 1$

$$v' - (2m'_{(2)} + m'_{(1)}) + F' = v + x - (2m_{(2)} + m_{(1)} + 1) + F + (1 - x)$$

$$= v - (2m_{(2)} + m_{(1)}) + F = 2 ;$$

(7) Tali relazioni si determinano seguendo un ragionamento analogo a quello fatto in (i).

se $\dim E' = 2$

$$v' - (2m'_{(2)} + m'_{(1)}) + F' = v + x - \big(2(m_{(2)} + 1) + m_{(1)}\big) + F + (2 - x)$$

$$= v - (2m_{(2)} + m_{(1)}) + F = 2 \,. \qquad \square$$

Teor. 5.2. *Un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ di rango tre, privo di cicli significativi e di spigoli comuni a più di due simplessi è planare.*

Dim. Dimostriamo il teorema per induzione su $m = |\mathscr{E}|$. Per $m \leqslant 3$ la tesi è di facile verifica. Supponiamo, dunque, che essa sia vera per un certo m e sia $\boldsymbol{H}$ un ipergrafo, con m simplessi, planare. Per passare a $m + 1$, bisogna aggiungere ad $\boldsymbol{H}$ un simplesso E' in modo che l'ipergrafo $\boldsymbol{H}'$ che si ottiene verifichi le ipotesi del teorema.

Non potendo essere $|E' \cap X| = 0$ per la connessione di $\boldsymbol{H}'$, nè $|E' \cap X| = 3$ (nel caso $\dim E' = 2$) poichè $\boldsymbol{H}'$ è privo di cicli significativi, si ha $1 \leqslant |E' \cap \cap X| \leqslant 2$. Per $|E' \cap X| = 1$, la tesi è immediata. Per $|E' \cap X| = 2$, la tesi segue dal fatto che esiste in $\boldsymbol{H}$ un unico simplesso E tale che $|E' \cap E| = 2$ (almeno uno poichè in $\boldsymbol{H}'$ non possono esserci cicli significativi, non più di uno poichè non esistono in $\boldsymbol{H}'$ spigoli comuni a più di due simplessi). $\square$

6. – Vogliamo, infine, segnalare un problema. È noto che un grafo è sempre rappresentabile in $\boldsymbol{R}^3$ in modo che i suoi simplessi non abbiano in comune, a due a due, alcun punto che non sia un loro estremo. È anche noto che ciò non avviene in $\boldsymbol{R}^2$. Si può affermare perciò che $\varrho = 2$ è il minimo valore che si può dare a ϱ affinchè ogni grafo risulti ϱ-planare. Fissato $n \in \boldsymbol{N}$, si pone dunque il problema di determinare, se esiste, il minimo valore di ϱ affinchè ogni ipergrafo uniforme di rango $n + 1$ risulti ϱ-planare.

Bibliografia.

[1] S. Antonucci, *Sull'isomorfismo tra n-grafi e sulla loro caratteristica,* Rend. Acc. Naz. XL (4) **22** (1972).

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes,* Dunod, Paris 1970.

[3] M. Ferro e M. Gionfriddo, *Considerazioni sugli n-grafi e sugli n-alberi e determinazione degli alberi 2 dimensionali mediante le loro caratteristiche,* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (2) **22** (1973), 185-205.

[4] A. M. Ghirlanda, *Osservazioni sulle caratteristiche dei grafi o singrammi,* Ann. Univ. Ferrara **11** (1964), 93-106.

[5] M. GIONFRIDDO, *Planarità dei grafi di dimensione due*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974) 649-658.

[6] M. LEWIN, *On hypergraphs without significant cycles*, J. Comb. Theory (B) **20** (1976), 80-83.

[7] P. HANSEN et M. LAS VERGNAS, *Une proprieté des hypergraphes sans cycles de longueur supérieure à deux*, Proceeding Collection Bruxelles sur la Théorie des Graphes (1973), 315-317.

[8] F. SPERANZA: $[\bullet]_1$ *Sui singrammi privi di automorfismi non identici*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1968); $[\bullet]_2$ *Su alcuni singrammi che si possono associare ad un dato singramma pluridimensionale*, Studia Ghisleriana (1967).

Summary.

We introduce the concept of ϱ-planarity for an uniform hypergraph. We define and prove some theorems on the hypergraphs of « UC_p type ».

We study also planar, not necessarily uniform hypergraphs of rank 3.

* * *