Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 387-396

CORRADO RISITO (*)

Criteri di asperiodicità nel continuo in $+\infty$. (**)

1. - Introduzione.

Nella prima parte del presente lavoro si stabilisce una condizione caratteristica di asperiodicità per le funzioni vettoriali, utilizzando alcuni risultati di [3]. Questo criterio mostra che le *funzioni asperiodiche*, definite in [3], costituiscono un sottoinsieme della classe delle *funzioni asintoticamente quasi-periodiche* secondo Fréchet $[\mathbf{1}]_{1,2}$, poichè ogni funzione asperiodica si può scomporre (in modo unico) nella somma di una funzione periodica e di un infinitesimo (per $t \to \infty$).

Nella seconda parte si considerano sistemi periodici di equazioni differenziali e si fornisce un criterio che permette di stabilire se una soluzione $x(t)$, limitata in futuro, di un sistema T-periodico sia asperiodica di asperiodo τ commensurabile con T. Indicato con γ^+ l'insieme dei punti di $\boldsymbol{R}^n$ che sono limiti di sottosuccessioni convergenti della successione $\{x(t_0+mT)\}$, $m=0, 1, 2, \ldots$ (dove t_0 è un istante qualunque dell'intervallo massimale di esistenza della $x(t)$), si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè la soluzione $x(t)$ sia asperiodica di asperiodo τ *commensurabile con* T è che l'insieme γ^+ sia *finito* (in particolare se la successione $\{x(t_0+mT)\}$ è convergente, la $x(t)$ è asperiodica di asperiodo T). Se invece l'insieme γ^+ è *infinito*, si possono presentare i seguenti due casi

I) $x(t)$ *non* è asperiodica,

II) $x(t)$ è asperiodica di asperiodo τ *incommensurabile con* T.

Nel secondo caso si dimostra che l'insieme γ^+ è una *curva chiusa* (precisamente l'orbita della parte periodica della soluzione asperiodica $x(t)$).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro svolto nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.) - Ricevuto: 23-XII-1976.
I risultati di questo lavoro verranno comunicati dall' A. alla Conferenza « EQUADIFF 4 - Prague 1977 ».

2. - Proprietà caratteristica delle funzioni asperiodiche.

Sia $x(t)$ una funzione vettoriale della variabile reale t

$$x\colon [t_0, \infty) \to \boldsymbol{R}^n, \tag{1}$$

dove con $[t_0, \infty)$ si è indicato l'intervallo $t_0 \leqslant t < \infty$, e con $\boldsymbol{R}^n$ lo spazio euclideo reale ad n dimensioni. Si dice che

Def. 1. La funzione $x(t)$ è *asperiodica nel continuo in* $+\infty$ (o più brevemente *asperiodica*) *di asperiodo* τ ([**3**], Def. 14, pp. 300-301) [1], se

(i) $x(t)$ è *continua e limitata in* $[t_0, \infty)$,

(ii) $\exists \tau > 0$ tale che si abbia

$$\lim_{t\to\infty} [x(t) - x(t + m\tau)] = 0 \qquad \textit{uniformemente rispetto ad } m \in \boldsymbol{N},$$

essendo $\boldsymbol{N}$ l'insieme dei numeri interi positivi.

Una condizione equivalente è fornita dal seguente

Teorema 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione vettoriale* $x\colon [t_0, \infty) \to \boldsymbol{R}^n$ *sia asperiodica di asperiodo* τ (*secondo la* Def. 1) *è la esistenza di due funzioni vettoriali a valori in* $\boldsymbol{R}^n$: $p(t)$ *definita e continua in* $\boldsymbol{R}$ *e* τ*-periodica*, $q(t)$ *definita e continua in* $[t_0, \infty)$, *con* $q(t) \to 0$ *per* $t \to \infty$, *tali che si abbia*

$$x(t) = p(t) + q(t), \qquad \forall t \geqslant t_0. \tag{2}$$

Inoltre si ha

$$p(t) = \lim_{m\to\infty} x(t + m\tau), \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}. \tag{3}$$

La condizione è necessaria. Siano soddisfatte entrambe le condizioni della Def. 1. In base ai risultati di ([**3**], teor. 2 e teor. 4, pp. 283-284), esiste il $\lim_{m\to\infty} x(t + m\tau)$ *uniformemente rispetto a* $t \in [-T, \infty)$, dove $T > 0$ è un numero

---

(1) La definizione e le principali proprietà delle funzioni asperiodiche scalari, stabilite nei lavori [**3**], $[\mathbf{4}]_{1,2}$, sono state estese al caso vettoriale dalla dott. P. Massimo nella tesi di laurea: « *Su l'asperiodicità vettoriale in* $+\infty$ », Ist. di Mat., Univ. di Parma, 17 Novembre 1976 (a.a. 75-76).

reale comunque grande, ed inoltre la funzione limite (la quale risulta definita e continua in tutto $\boldsymbol{R}$) è τ-periodica. Posto allora

$$p(t) = \lim_{m\to\infty} x(t + m\tau)\,, \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}\,, \tag{4}$$

rimane soltanto da verificare che per $t \to \infty$ è infinitesima la seguente funzione

$$q(t) = x(t) - \lim_{m\to\infty} x(t + m\tau)\,, \tag{5}$$

la quale, per la condizione (i), è definita e continua in $[t_0, \infty)$. Infatti dalla (ii), passando al limite per $m \to \infty$ (ed osservando che si può invertire l'ordine di passaggio al limite perchè nella condizione (ii) la convergenza è *uniforme rispetto ad* $m \in \boldsymbol{N}$), si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m\to\infty} \left\{\lim_{t\to\infty} [x(t) - x(t + m\tau)]\right\} = \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[x(t) - \lim_{m\to\infty} x(t + m\tau)\right] = \lim_{t\to\infty} q(t)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

La condizione è sufficiente. Infatti se sussiste la (2), con $p(t)$ e $q(t)$ soddisfacenti le condizioni del Teorema 1, la $x(t)$ risulta continua e limitata in $[t_0, \infty)$. Per dimostrare che la $x(t)$ soddisfa anche alla condizione (ii) della Def. 1, si osservi che in base alla (2) ed alla τ-periodicità della $p(t)$, si ha

$$x(t + m\tau) = p(t) + q(t + m\tau)\,, \qquad \forall t \geqslant t_0\,,\ \forall m \in \boldsymbol{N}\,, \tag{7}$$

ed inoltre, poichè $q(t) \to 0$ per $t \to \infty$,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} [x(t) - x(t + m\tau)] &= \lim_{t\to\infty} [q(t) - q(t + m\tau)] = \\ &= -\lim_{t\to\infty} q(t + m\tau) = 0 \quad \textit{uniformemente in } m \in \boldsymbol{N}\,, \end{aligned} \tag{8}$$

essendo: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T_\varepsilon > 0$, $\forall t \geqslant T_\varepsilon$, $\|q(t)\| < \varepsilon$, e quindi anche $\forall t \geqslant T_\varepsilon$, $\forall m \in \boldsymbol{N}$, $\|q(t + m\tau)\| < \varepsilon$ (dove con $\|\cdot\|$ si è indicata una norma qualsiasi di $\boldsymbol{R}^n$). La condizione sufficiente resta così dimostrata. Infine si riconosce che la (3) è una conseguenza della (2). Infatti, comunque sia assegnato $\bar{t} \in \boldsymbol{R}$, esiste un numero intero positivo $\bar{k}$ tale che si abbia $\bar{t} + \bar{k}\tau \geqslant t_0$. Allora dalla (2) si ottiene

$$x(\bar{t} + m\tau) = p(\bar{t}) + q(\bar{t} + m\tau)\,, \qquad \forall m \geqslant \bar{k}\,, \tag{9}$$

e passando al limite per $m \to \infty$, si ha $\lim\limits_{m\to\infty} x(\bar{t} + m\tau) = p(\bar{t})$.

Osservazione 1. Il Teorema 1 mostra che le *funzioni asperiodiche* costituiscono un sottoinsieme della classe delle *funzioni asintoticamente quasi-periodiche* definite da Fréchet [**1**]$_{1,2}$ (per le quali sussiste una scomposizione del tipo (2), ma la $p(t)$ invece di essere periodica è una funzione quasi-periodica). Siccome la *scomposizione* (2), nella somma di una funzione quasi-periodica e di un infinitesimo (per $t \to \infty$), *è unica* [**1**]$_2$, ha senso parlare della *parte periodica* $p(t)$ della funzione asperiodica $x(t)$. Inoltre, in base alla dimostrazione del Teorema 1, si riconosce che l'*insieme degli asperiodi* (2) di una funzione asperiodica $x(t)$ *coincide con l'insieme dei periodi positivi* della sua parte periodica $p(t)$. Quindi l'*asperiodo minimo* della $x(t)$ esiste se e soltanto se la sua parte periodica $p(t)$ non è costante, ed in tal caso esso *coincide con il minimo periodo positivo* della $p(t)$.

3. - Criterio di asperiodicità per le soluzioni limitate in futuro di sistemi periodici.

Sia

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{10}$$

un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine, dove la funzione vettoriale $f(t, x)$ a valori in $\boldsymbol{R}^n$ è definita e continua in $\boldsymbol{R} \times \Omega$, essendo Ω un sottoinsieme aperto e connesso di $\boldsymbol{R}^n$, e periodica rispetto al tempo t di periodo T (> 0) per ogni $x \in \Omega$ (3). Si suppone inoltre che il secondo membro di (10) sia tale da assicurare l'unicità e la dipendenza continua delle soluzioni dalle condizioni iniziali. Si indicherà allora con $\varphi(t, t_0, x_0)$, $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$, la soluzione massimale di (10) individuata dalle condizioni iniziali $(t_0, x_0) \in \boldsymbol{R} \times \Omega$.

Il sistema (10) ammetta una soluzione $x(t)$ *limitata in futuro*, cioè tale che il suo intervallo massimale di esistenza contenga l'intervallo $[t_0, \infty)$ ed inoltre si abbia $x(t) \in K \subset \Omega$ per ogni $t \geqslant t_0$, essendo K un insieme compatto. Si indicherà con Γ^+ l'insieme positivo limite della soluzione $x(t)$, e con γ^+ l'insieme positivo limite del «moto discreto» $x(t_0 + mT)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Per definizione $z^* \in \Gamma^+$ se esiste una successione divergente $\{t_n\}$, con $t_n \geqslant t_0$, tale che si abbia $z^* = \lim_{n \to \infty} x(t_n)$, ed analogamente $x^* \in \gamma^+$ se esiste una successione diver-

(2) Si osservi che gli asperiodi negativi non vengono presi in considerazione perchè la funzione $x(t)$ è definita soltanto per $t \geqslant t_0$.

(3) Si osservi che $T > 0$ non è necessariamente il minimo periodo positivo della $f(t, x)$. Anzi potrebbe darsi che non esista il periodo minimo, cioè che il sistema (10) sia *autonomo*: in tal caso, per T si può prendere un qualunque numero reale strettamente positivo.

gente $\{m_k\}$ di numeri interi positivi tale che si abbia $x^* = \lim_{k\to\infty} x(t_0 + m_k T)$. Gli insiemi Γ^+ e γ^+ non sono vuoti, perchè per ipotesi la soluzione $x(t)$ è limitata in futuro. Si considereranno i seguenti due casi: l'insieme γ^+ è costituito da un numero finito di elementi oppure è infinito.

1) *L'insieme γ^+ è finito.*

Se γ^+ è costituito da un unico elemento, si ha il seguente

Teorema 2. *Sia $x(t)$ una soluzione limitata in futuro del sistema T-periodico* (10), *soddisfacente le condizioni introdotte nel presente n.* **3**. *Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè la soluzione $x(t)$ sia asperiodica di asperiodo T è che la successione di punti $\{x(t_0 + mT)\}$ sia convergente. Inoltre, indicato con x^* il limite della suddetta successione, la parte periodica della $x(t)$ coincide con la soluzione del sistema* (10) *individuata dalle condizioni iniziali* (t_0, x^*), *cioè si ha*

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x^*) + q(t)\,, \qquad \forall t \geqslant t_0\,, \tag{11}$$

dove $\varphi(t, t_0, x^*)$ è T-periodica e $q(t) \to 0$ per $t \to \infty$.

Se la $x(t)$ è asperiodica di asperiodo T, per il Teorema 1 del precedente paragrafo, il $\lim_{m\to\infty} x(t + mT)$ esiste per ogni $t \in \boldsymbol{R}$, e quindi in particolare per $t = t_0$. Viceversa, si supponga che la successione $\{x(t_0 + mT)\}$ converga verso un punto x^* (necessariamente appartenente al compatto K, essendo per ipotesi: $x(t) \in K \subset \Omega$, $\forall t \geqslant t_0$). Allora, per note proprietà dei sistemi periodici, la soluzione $\varphi(t, t_0, x^*)$ di (10) è definita in tutto $\boldsymbol{R}$ ed inoltre si ha

$$\varphi(t, t_0, x^*) = \lim_{m\to\infty} x(t + mT)\,, \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}\,. \tag{12}$$

A questo punto, osservando che la $x(t)$ è una funzione *uniformemente continua* in $[t_0, \infty)$ essendo una soluzione limitata in futuro del sistema periodico (10), si può utilizzare la Proprietà 2 di $[4]_2$, la quale assicura che $\varphi(t, t_0, x^*)$ è T-periodica ed $x(t)$ è asperiodica di asperiodo T, secondo la Def. 1. Infine per il Teorema 1 del presente lavoro, tenendo conto della (12), si ottiene proprio la (11), con $q(t)$ infinitesima per $t \to \infty$.

Osservazione 2. Il Teorema 2 fornisce un criterio di asperiodicità per una soluzione $x(t)$ limitata in futuro del sistema T-periodico (10), il quale assicura inoltre che T è un asperiodo della $x(t)$. Si osservi che, in generale, T *non è l'asperiodo minimo* della $x(t)$, perchè può darsi che esso non esista oppure, se esiste l'asperiodo minimo $\tau > 0$, può darsi che sia $\tau < T$ (anche se T è il minimo periodo positivo di (10)).

L'asperiodo minimo della $x(t)$ non esiste se e soltanto se la sua parte periodica è costante (si veda l'Oss. 1), cioè quando si ha

$$x(t) = x^* + q(t)\,, \qquad \forall t \geq t_0\,, \tag{13}$$

dove $q(t) \to 0$ per $t \to \infty$, ed in tal caso ogni numero reale strettamente positivo è un asperiodo per la (13). Se invece la parte periodica della $x(t)$ non è costante, allora (e soltanto allora) esiste l'asperiodo minimo $\tau > 0$ della soluzione $x(t)$ e si ha $\tau \leq T$. Il seguente esempio mostra che τ può essere strettamente minore di T.

Si consideri l'equazione differenziale scalare del secondo ordine ([**5**], p. 10)

$$\ddot{x} + x = (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\sin\left(\frac{t}{q}\right) \tag{14}$$

dove q è un qualunque numero intero > 1. Il periodo minimo del secondo membro della (14) è $T = 2\pi q$, mentre la soluzione periodica (che è una particolare soluzione asperiodica) $x = \sin t$, $\dot{x} = \cos t$ dell'equazione (14) possiede l'asperiodo minimo $2\pi = T/q$.

Nel precedente teorema è stato esaminato il caso particolare: $\gamma^+ = \{x^*\}$. Nel seguente corollario del Teorema 2 viene considerato il caso più generale, in cui γ^+ è costituito da un numero *finito* qualunque di elementi.

Corollario. *Sia $x(t)$ una soluzione limitata in futuro del sistema T-periodico* (10), *soddisfacente le condizioni introdotte nel presente n.* **3**. *Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè la soluzione $x(t)$ sia asperiodica di asperiodo $\tau = pT/q$* (dove $p \geq 1$, $q \geq 1$, sono due numeri interi primi tra loro) *è che l'insieme γ^+ sia finito.*

La $x(t)$ sia asperiodica di asperiodo $\tau = pT/q$. Allora anche $q\tau = pT$ è un asperiodo della $x(t)$, e per il Teorema 1 del n. **2**, il $\lim\limits_{m \to \infty} x(t + m(pT))$ esiste per ogni $t \in \boldsymbol{R}$, e quindi in particolare per i seguenti p valori della variabile t

$$t_0,\ t_0 + T,\ \ldots,\ t_0 + (p-1)\,T. \tag{15}$$

Per dimostrare che l'insieme γ^+ è finito, si dispongano tutti gli elementi della successione $\{x(t_0 + mT)\}$ nella seguente matrice di p righe ed infinite colonne

$$\left\{\begin{array}{llll} x(t_0), & x(t_0 + pT), & x(t_0 + 2pT), & \ldots \\ x(t_0 + T), & x(t_0 + (p+1)\,T), & x(t_0 + (2p+1)\,T), & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x(t_0 + (p-1)\,T), & x(t_0 + (2p-1)\,T), & x(t_0 + (3p-1)\,T), & \ldots\,. \end{array}\right. \tag{16}$$

Ogni riga della matrice (16) è una sottosuccessione della $\{x(t_0 + mT)\}$, ma è anche una delle p successioni (convergenti) che si ottengono dalla $\{x(t + m(pT))\}$ quando t assume i particolari valori (15). Quindi l'insieme γ^+ possiede al più p elementi (se $\tau = pT/q$ è il *minimo asperiodo* della $x(t)$, allora γ^+ è costituito proprio da p elementi).

Rimane da dimostrare la condizione sufficiente del Corollario. Sia p $(\geqslant 1)$ il numero finito di elementi dell'insieme γ^+, e la soluzione $x(t)$ del sistema T-periodico (10) sia limitata in futuro. Si osservi che $T' = pT$ è un periodo del secondo membro di (10), e che la successione di punti $\{x(t_0 + mT')\}$ (la quale coincide con la prima riga della matrice (16)) è convergente, in base ad un risultato di ([4]$_1$, teor. V, pp. 157-158) (4). Allora per il Teorema 2 del presente lavoro, la soluzione $x(t)$ limitata in futuro del sistema T'-periodico (10) è asperiodica di asperiodo $T' = pT$. Inoltre, indicato con x_0^* $(\in \gamma^+)$ il limite della successione $\{x(t_0 + mT')\}$, si ha

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0^*) + q_0(t) , \qquad \forall t \geqslant t_0 , \tag{17}$$

dove la soluzione $\varphi(t, t_0, x_0^*)$ è periodica di periodo pT (non necessariamente minimo) e la funzione $q_0(t)$ è infinitesima per $t \to \infty$.

Osservazione 3. Se il numero p degli elementi dell'insieme finito γ^+ è strettamente maggiore di uno, allora la soluzione asperiodica $x(t)$ possiede l'*asperiodo minimo* $\tau > 0$, e per il Corollario si ha $\tau \leqslant pT$. Anche in questo caso (come in quello ($p = 1$) esaminato nell'Oss. 2) τ può essere strettamente minore di pT, come si riconosce in base all'equazione (14) sostituendo nel suo secondo membro la funzione $\sin (t/q)$ con $\sin (pt/q)$ (dove $p > 1$, $q > 1$, sono due numeri interi primi tra loro). Infatti gli elementi di γ^+ sono i p punti della circonferenza del piano delle fasi con centro nell'origine e raggio unitario

$$x_0^* = \{\sin t_0, \cos t_0\} , \qquad x_1^* = \left\{\sin \left(t_0 + \frac{2\pi q}{p}\right), \cos \left(t_0 + \frac{2\pi q}{p}\right)\right\}, \ldots,$$

$$x_{p-1}^* = \left\{\sin \left[t_0 + (p-1)\frac{2\pi q}{p}\right], \cos \left[t_0 + (p-1)\frac{2\pi q}{p}\right]\right\} ,$$

e l'asperiodo minimo della soluzione $x = \sin t$, $\dot{x} = \cos t$ è $2\pi = pT/q$.

---

(4) Infatti se si ha $\gamma^+ = \{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{p-1}^*\}$, le p soluzioni $\varphi(t, t_0, x_i^*)$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, sono *tutte* «funzioni di accumulazione (distinte) della progressione di aritmeticità» $\{x(t + mT)\}$, e sono anche le *sole*, per l'ipotesi di unicità delle soluzioni di (10). Allora per il teorema citato, ogni riga della matrice (16) è convergente (ed ha per limite un ben determinato punto di γ^+).

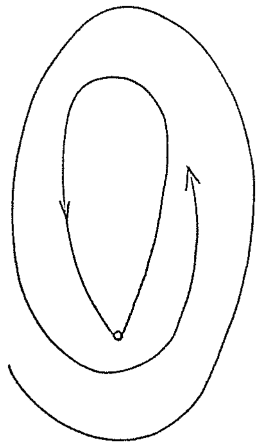
2) *L'insieme* γ^+ *è infinito.*

Sia $x(t)$ una soluzione limitata in futuro del sistema (10) e l'insieme γ^+ sia infinito. Allora, per il Corollario, si possono presentare soltanto i seguenti due casi

I) $x(t)$ *non* è asperiodica (cioè *non* esiste un numero $\tau > 0$ tale che si abbia: $\lim_{t \to \infty} [x(t) - x(t + m\tau)] = 0$ *uniformemente in* $m \in \boldsymbol{N}$),

II) $x(t)$ è asperiodica di asperiodo (minimo) τ *incommensurabile con* T.

Per illustrare con un esempio il primo caso, si consideri una soluzione $x(t)$ limitata in futuro di un sistema autonomo piano, il cui insieme positivo limite Γ^+ sia un « policiclo » con un punto singolare (indicato con un circoletto nella figura).



La soluzione considerata *non* è asperiodica perchè il suo insieme Γ^+ non è nè un'orbita chiusa nè un punto singolare (se la soluzione $x(t)$ fosse asperiodica, per il Teorema 1 si avrebbe: $x(t) = p(t) + q(t)$, con $p(t)$ periodica e $q(t)$ infinitesima per $t \to \infty$, da cui si riconosce che l'insieme Γ^+ della $x(t)$ coincide con l'orbita della soluzione periodica $p(t)$). Inoltre l'insieme γ^+ è *infinito*, come conseguenza del Corollario.

Nel secondo caso sussiste la seguente

Proposizione. *Se la soluzione* $x(t)$ *del sistema* (10) *è asperiodica e l'insieme* γ^+ *è infinito, allora si ha*

$$\gamma^+ = \Gamma^+ , \tag{18}$$

cioè l'insieme γ^+ *è un'orbita chiusa.*

Dalla definizione degli insiemi Γ^+, γ^+ segue che $\gamma^+ \subset \Gamma^+$. Rimane dunque da dimostrare che si ha $\Gamma^+ \subset \gamma^+$. Per quanto sopra osservato, l'insieme Γ^+ della soluzione asperiodica $x(t)$ coincide con l'orbita chiusa della sua parte periodica $p(t)$ (che non è costante, essendo per ipotesi infinito l'insieme γ^+), cioè si ha

$$\Gamma^+ = \{z \in \mathbf{R}^n : z = p(t_0 + t),\ 0 \leqslant t < \tau\}\,, \tag{19}$$

dove τ è il minimo periodo positivo della $p(t)$. Sia allora $z^* \in \Gamma^+$, cioè sia $z^* = p\ (t_0 + t^*)$, con $0 \leqslant t^* < \tau$. Poichè T/τ è un numero irrazionale, esistono due successioni divergenti $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ di numeri interi positivi tali che si abbia $m_k T - n_k \tau \to t^*$, per $k \to \infty$ (5). Per la τ-periodicità della $p(t)$ e per la (2) del Teorema 1, si ha

$$p(t_0 + t^*) = \lim_{k\to\infty} p(t_0 + m_k T - n_k \tau) = \lim_{k\to\infty} p(t_0 + m_k T) = \lim_{k\to\infty} x(t_0 + m_k T)\,,$$

da cui si riconosce che $z^* \in \gamma^+$.

Riprendendo l'esempio considerato nell'Oss. 2, sia

$$\ddot{x} + x = (x^2 + \dot{x}^2 - 1) \sin \omega t \tag{20}$$

dove ω è un qualunque numero irrazionale > 0. La soluzione $x = \sin t$, $\dot{x} = \cos t$ dell'equazione (20) (che è una soluzione periodica *eccezionale* nel senso di J. L. Massera) possiede l'asperiodo minimo 2π che è incommensurabile col periodo minimo $T = 2\pi/\omega$ del secondo membro della (20), e quindi, per la Proposizione dimostrata, l'insieme γ^+ è la circonferenza del piano delle fasi con centro nell'origine e raggio unitario.

---

(5) Infatti si consideri il punto $t^*/\tau \in [0, 1)$ e la famiglia di intorni $U_k = (t^*/\tau - 1/k, t^*/\tau + 1/k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Poichè T/τ è irrazionale, per un classico teorema di approssimazione di L. Kronecker (si veda ad esempio [**2**], p. 424 e p. 497), la *successione* $\{\big(m(T/\tau)\big)\}$, $m = 1, 2, \ldots$ (dove si è indicato con $\big(m(T/\tau)\big) = m(T/\tau) - [m(T/\tau)]$, e con $[m(T/\tau)]$ il più grande numero intero $< m(T/\tau)$) *è densa nell'intervallo* $[0, 1)$. Allora in ogni intorno U_k di t^*/τ cadono infiniti punti della successione $\{\big(m(T/\tau)\big)\}$, e si può quindi costruire una sottosuccessione $\{\big(m_k(T/\tau)\big)\}$ convergente verso il punto t^*/τ e tale che si abbia $m_k < m_{k+1}$, $\forall k$. Posto $n_k = [m_k(T/\tau)]$, si ha $\lim\limits_{k\to\infty} \{m_k(T/\tau) - n_k\} = t^*/\tau$, e moltiplicando entrambi i membri per τ, si ottiene $\lim\limits_{k\to\infty} \{m_k T - n_k \tau\} = t^*$.

Bibliografia.

[1] M. Fréchet: $[\bullet]_1$ *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques continues*, C.R. Acad. Sci. Paris **213** (1941), 520-522; $[\bullet]_2$ *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques*, Rev. Sci. **79** (1941), 341-354.

[2] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Ergebnisse der Mathematik, Band 4, Berlin 1936.

[3] A. Mambriani e B. Manfredi, *Su le funzioni asperiodiche in* $+\infty$ (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 281-308.

[4] B. Manfredi: $[\bullet]_1$ *Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni di accumulazione periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 149-159; $[\bullet]_2$ *Su le funzioni asperiodiche in* $+\infty$ (II), Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 367-373.

[5] V. A. Pliss, *Nonlocal problems of the theory of oscillations*, Academic Press, New York 1966.

Summary.

The concept of asperiodicity for scalar functions was introduced by Mambriani-Manfredi in [3]. *In the present paper an equivalent condition shows that asperiodic vector-valued functions form a subset of the class of asymptotic almost periodic functions, defined by Fréchet* $[1]_{1,2}$. *Moreover, asperiodicity criteria for bounded solutions of periodic systems of differential equations are given, relating the asperiodicity of a solution* $x(t)$ *(bounded in the future) of a T-periodic system, to the positive limiting set* γ^+ *of the discrete motion* $x(t_0+mT)$, $m=0, 1, 2, \ldots$.

* * *