Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 263-268

PAOLA BISCARINI (*)

Una proprietà delle bissestuple in $S_{3,4}$ (**)

1. – J. W. Hirschfeld nei suoi lavori $[2]_1$ e $[2]_2$, affronta con metodi prevalentemente analitici problemi di esistenza di una bissestupla, e studia alcune proprietà della superficie cubica ad essa associata. In questa Nota si affronta, con metodo geometrico, il problema di costruire in uno spazio proiettivo di dimensione tre ed ordine quattro, una bissestupla a partire da una ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$ (n. **3**), e viceversa, data in $S_{3,4}$ una bissestupla, di determinare una ipersuperficie hermitiana che la contiene (n. **4**).

Infine (n. **5**), data una ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$ ed una bissestupla $\mathfrak{B}$ in essa contenuta, si dimostra che i punti di $\mathfrak{H}$ non appartenenti a rette di $\mathfrak{B}$ formano uno spazio proiettivo, $S_{3,2}$, di dimensione tre ed ordine due, quando si considerano fra essi gli allineamenti «naturali» definiti dalle rette di $S_{3,4}$.

2. – In uno spazio proiettivo finito $S_{r,q}$ di dimensione r ed ordine $q=p^{2h}$, una ipersuperficie hermitiana non singolare è rappresentata dalla equazione $\sum_{i=0}^{r} x_i^{p^h+1}=0$.

In $S_{3,4}$, sia $\mathfrak{T}$ un insieme di quattro punti indipendenti, preso un insieme $\boldsymbol{K}$ di $k+1\geqslant 2$ punti di $\mathfrak{T}$, chiamiamo $\mathfrak{T}$-simplesso di dimensione k l'insieme dei punti appartenenti allo spazio lineare, di dimensione k, generato dai punti di $\boldsymbol{K}$, ma non agli spazi generati da sottoinsiemi propri di $\boldsymbol{K}$.

I punti di $\boldsymbol{K}$ si dicono vertici del $\mathfrak{T}$-simplesso.

Se scegliamo come insieme $\mathfrak{T}$ l'insieme $\mathfrak{T}_0=\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ dei vertici del sistema di riferimento in $S_{3,4}$, si vede subito che i punti della ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$ di equazione $\sum_{i=0}^{3} x_i^3=0$ sono tutti e soli quelli dei $\mathfrak{T}_0$-simplessi di dimensione dispari (cfr. [**1**]).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università di Perugia, 06100 Perugia, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) – Ricevuto: 28-V-1976.

È ovvio che ogni $\mathfrak{T}_0$-simplesso di dimensione uno contiene tre punti.

Due $\mathfrak{T}_0$-simplessi di dimensione uno li diremo *opposti* se appartengono a rette generate da coppie disgiunte di punti di $\mathfrak{T}_0$.

Le rette di $S_{3,4}$ appartenenti alla ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$ sono tutte e sole le 27 rette che uniscono punti appartenenti alle coppie di $\mathfrak{T}_0$-simplessi di dimensione uno opposti.

Presa la ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$, ci proponiamo di determinare in modo diretto (1) una bissestupla appartenente ad $\mathfrak{H}$, cioè un insieme $\mathfrak{B}$ di dodici rette di $\mathfrak{H}$, di cui sei, $a_1, a_2, \ldots, a_6$, a due a due sghembe tra loro e tali che prese comunque cinque di esse, $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_6$, queste ammettano in $\mathfrak{B}$ una ed una sola trasversale b_i.

Evidentemente anche le sei rette b_i $(i=1, \ldots, 6)$ risultano a due a due sghembe tra loro.

3. – Consideriamo due $\mathfrak{T}_0$-simplessi di dimensione uno opposti, ad esempio quelli individuati dai punti X_0, X_1 e X_2, X_3, e siano a_1, a_2, a_3 tre rette della ipersuperficie $\mathfrak{H}$ a due a due sghembe, che incidano i due $\mathfrak{T}_0$-simplessi fissati.

La quadrica $\boldsymbol{Q}$, luogo delle rette incidenti a_1, a_2 e a_3, contiene le due rette $X_0 \cup X_1$ e $X_2 \cup X_3$, perciò da ciascuno dei punti X_i $(i=0, \ldots, 3)$ deve uscire una ed una sola generatrice della quadrica, sghemba con a_1, a_2, a_3 ed incidente le rette $X_0 \cup X_1$ e $X_2 \cup X_3$ necessariamente in uno dei vertici X_j.

Tali generatrici risultano quindi due spigoli del tetraedro di riferimento contenenti due $\mathfrak{T}_0$-simplessi di dimensione uno opposti, siano ad esempio le rette $X_0 \cup X_3$ e $X_1 \cup X_2$.

Consideriamo la retta $X_0 \cup X_3$, da ciascun punto P_i $(i=1,2,3)$ di questa, diverso da X_0 e X_3, esce una generatrice della quadrica $\boldsymbol{Q}$ incidente a_1, a_2, a_3 e $X_1 \cup X_2$ (2) e quindi appartenente alla ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$, mentre le altre due rette per P_i appartenenti ad $\mathfrak{H}$ sono necessariamente sghembe con a_1, a_2, a_3.

Si trovano in tal modo sei rette di $\mathfrak{H}$ sghembe con a_1, a_2, a_3, tra queste scegliamo, come rette a_4, a_5, a_6, tre rette a due a due sghembe ed inoltre tali che comunque se ne scelgano due, queste abbiano in comune con a_1, a_2, a_3 una ed una sola trasversale. Per questo, indicati con P_i $(i=1, 2, 3)$ e Q_j $(j=1, 2, 3)$ i punti dei $\mathfrak{T}_0$-simplessi individuati rispettivamente da X_0, X_3 e X_1, X_2, in modo che $P_i \cup Q_i$ $(i=1, 2, 3)$ siano le generatrici della quadrica $\boldsymbol{Q}$, scelta una retta $P_i \cup Q_j$ $(i \neq j)$ come retta a_4, non possiamo più considerare la retta $P_j \cup Q_i$, ma prenderemo come rette a_5 e a_6 rispettivamente le rette $P_j \cup Q_k$ e $P_k \cup Q_i$ $(k \neq i \neq j)$.

---

(1) Cioè con considerazioni che fanno riferimento al modello ora indicato.

(2) Necessariamente in un punto diverso da X_1 e X_2.

Si ha allora che la retta b_4, trasversale di a_1, a_2, a_3, a_5, a_6 è la retta $P_k \cup Q_k$, b_5 sarà la retta $P_i \cup Q_i$, e b_6 la $P_j \cup Q_j$, cioè proprio le tre generatrici della quadrica considerata.

Per determinare le rimanenti rette della bissestupla, b_1, b_2, b_3, consideriamo la quadrica $\boldsymbol{Q}^*$ luogo delle rette incidenti a_4, a_5, a_6.

Come $\boldsymbol{Q}$ anche $\boldsymbol{Q}^*$ contiene le rette $X_0 \cup X_3$ e $X_1 \cup X_2$, e si dimostra facilmente che le due quadriche hanno ulteriormente in comune le rette $X_0 \cup X_1$ e $X_2 \cup X_3$.

Scelta la retta $X_0 \cup X_1$, da ciascun punto di essa, A_i $(A_i = (X_0 \cup X_1) \cap a_i$, $i = 1, 2, 3)$, esce una retta incidente a_4, a_5, a_6, che incontra la retta $X_2 \cup X_3$ in un punto B_j $(B_j = (X_2 \cup X_3) \cap a_j,\ j \neq i,\ j = 1, 2, 3)$.

Le tre generatrici di $\boldsymbol{Q}^*$ che si ottengono in tal modo, sono quindi tre rette della ipersuperficie hermitiana che completano la bissestupla.

In tal modo, presa in $S_{3,4}$ una ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$ di equazione $\sum_{i=0}^{3} x_i^3 = 0$, abbiamo determinato dodici rette di $\mathfrak{H}$, $a_1, \ldots, a_6, b_1, \ldots, b_6$ tali che ogni a_i è sghemba con ogni a_j $(j \neq i)$ e con b_i, ogni b_i è sghemba con ogni b_j $(j \neq i)$, e a_i è incidente con b_j $(i \neq j)$, in un punto che indicheremo con $P_{i,j}$.

4. – Viceversa vogliamo dimostrare che presa in $S_{3,4}$ una bissestupla $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = \{a_1, \ldots, a_6, b_1, \ldots, b_6 \colon a_i \cap a_j = a_i \cap b_i = b_i \cap b_j = \emptyset \text{ e } a_i \cap b_j = P_{i,j}\}$$

esiste una ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$ che la contiene.

Consideriamo la retta a_1, da ciascuno dei suoi punti deve uscire una retta incidente a_2 e a_3.

È chiaro che se consideriamo i punti $P_{1,i}$ $(i = 4, 5, 6)$ tale retta è proprio la b_i della bissestupla. Preso invece il punto $P_{1,3}$, la retta b_3 incontra a_2 ma non a_3, inoltre la retta cercata non può incidere a_2 o a_3 in uno dei punti $P_{i,j}$, con $i = 2, 3$ e $j = 4, 5, 6$, altrimenti da questo punto uscirebbero due rette distinte incidenti due rette sghembe; ne segue che la retta γ_1, per $P_{1,3}$ incidente a_2 e a_3, interseca necessariamente a_2 nel punto $P_{2,1}$ e a_3 nel punto $P_{3,2}$

Analogamente dal punto $P_{1,2}$ esce una trasversale γ_2 ad a_2 e a_3 che passa per i punti $P_{2,3}$ e $P_{3,1}$.

Le due rette γ_1 e γ_2 sono necessariamente sghembe tra loro e contengono ciascuna altri due punti, certamente distinti dai punti $P_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$; indichiamo con Q_0 e Q_1 quelli della γ_1 e con Q_2 e Q_3 quelli della γ_2.

Analogamente considerata la retta a_4, ricercando le rette per i suoi punti incidenti le rette a_5 e a_6, si determinano due rette sghembe, δ_1 contenente i punti $P_{4,6}, P_{5,4}, P_{6,5}$, e δ_2 contenente i punti $P_{4,5}, P_{5,6}, P_{6,4}$.

Dimostriamo che le rette δ_1 e δ_2 incidono le rette γ_1 e γ_2. Il piano per γ_1 e per un punto qualunque di δ_1, ad esempio $P_{4,6}$, non contiene nessuna retta della bissestupla ma deve inciderle tutte, ne segue che necessariamente interseca a_5 in $P_{5,4}$ e a_6 in $P_{6,5}$, cioè contiene tutta la δ_1; le rette γ_1 e δ_1 risultano quindi incidenti. Analogamente si prova che δ_1 incide γ_2 e che δ_2 incide γ_1 e γ_2. I punti di intersezione di tali rette sono necessariamente quelli non appartenenti a rette della bissestupla e quindi i punti Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.

I punti Q_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ in $S_{3,4}$ sono linearmente indipendenti, assumendoli come vertici del sistema di riferimento in $S_{3,4}$, l'insieme dei punti che appartengono ai $\mathfrak{T}$-simplessi di dimensione dispari, da essi individuati, risulta una ipersuperficie hermitiana $\mathfrak{H}$ (cfr. [**1**]) che contiene la bissestupla $\mathfrak{B}$.

5. – Presa la ipersuperficie $\mathfrak{H}$, di equazione $\sum_{i=0}^{3} x_i^3 = 0$, sappiamo che 45 sono i suoi punti, considerata la bissestupla $\mathfrak{B}$ costruita nel n. **3**, formata da rette di $\mathfrak{H}$, su tali rette si trovano 30 punti della $\mathfrak{H}$; ci chiediamo pertanto come sono ripartiti i rimanenti 15 punti di $\mathfrak{H}$.

È ovvio che sei di questi sono i punti dei due $\mathfrak{T}_0$-simplessi di dimensione uno individuati dalle coppie X_0, X_2 e X_1, X_3, che non intervengono nella costruzione della $\mathfrak{B}$.

Consideriamo allora le nove rette di $\mathfrak{H}$ congiungenti i punti di questi due $\mathfrak{T}_0$-simplessi, rette che indichiamo con $P_i \cup Q_j$, dove P_i $(i = 1, 2, 3)$ appartiene alla retta $X_0 \cup X_2$ e Q_j $(j = 1, 2, 3)$ alla retta $X_1 \cup X_3$, e proviamo che ciascuna di esse contiene, oltre P_i e Q_j, un altro punto della ipersuperficie non appartenente a rette della bissestupla.

Infatti, scelto comunque un punto P di uno dei due $\mathfrak{T}_0$-simplessi, ad esempio appartenente a $X_0 \cup X_2$, consideriamo il piano α per P tangente alla $\mathfrak{H}$, cioè il piano per P e per la retta $X_1 \cup X_3$, α non contiene nessuna retta della bissestupla, ma deve incontrare tutte le sei rette a due a due sghembe a_i (e di conseguenza tutte le b_j) in sei punti distinti. Ma le rette $P \cup X_1$ e $P \cup X_3$ sono tangenti alla $\mathfrak{H}$ e quindi non contengono alcun punto di $\mathfrak{H}$ diverso da P; ne segue che necessariamente i sei punti devono appartenere alle tre rette di $\mathfrak{H}$ passanti per P. D'altra parte nessuna di tali rette può contenere tre di questi punti, altrimenti la ipersuperficie conterrebbe una quadrica non degenere, e questo è assurdo; perciò le tre rette di $\mathfrak{H}$ per P incontrano ciascuna due rette a_i (e due b_j) e quindi contengono un quinto punto di $\mathfrak{H}$ non appartenente a rette della bissestupla.

Esaminiamo allora la configurazione formata da questi 15 punti, appartenenti ad $\mathfrak{H}$ ma non a $\mathfrak{B}$, di cui sei sono sui due $\mathfrak{T}_0$-simplessi individuati da X_0, X_2 e X_1, X_3, e nove sulle rette $P_i \cup Q_j$ $(P_i \in X_0 \cup X_2,\ Q_j \in X_1 \cup X_3;\ i, j = 1, 2, 3)$.

Dimostriamo prima di tutto il seguente

Lemma. *La retta congiungente due di questi punti A e B, ne contiene un terzo.*

Occorre distinguere tre casi.

1) I due punti A e B appartengono allo stesso $\mathfrak{T}_0$-simplesso, o ai due $\mathfrak{T}_0$-simplessi opposti, oppure A appartiene ad un $\mathfrak{T}_0$-simplesso, ad esempio $A = P_k$ e $B \in P_k \cup Q_j$.

Allora il lemma è banalmente verificato.

2) Nessuno dei due punti A e B appartiene ai $\mathfrak{T}_0$-simplessi, ma essi appartengono a due rette incidenti in un punto di uno dei $\mathfrak{T}_0$-simplessi.

Sia $A \in P_i \cup Q_j$ e $B \in P_j \cup Q_i$, proviamo che la loro congiungente passa necessariamente per il punto P_k, terzo punto di $\mathfrak{H}$ appartenente alla retta $X_0 \cup X_2$.

Infatti, considerato il piano β per Q_j e per la retta $X_0 \cup X_2$, la retta $A \cup B$ non può incidere la $X_0 \cup X_2$ in uno dei punti X_0 o X_2, perchè in tal caso da questo punto uscirebbe almeno una retta di β incidente le tre rette $Q_j \cup P_i$ $(i = 1, 2, 3)$ in tre punti appartenenti a rette della bissestupla e quindi incidente tre delle rette a_i $(i = 1, \dots, 6)$, ma da ciascuno dei punti X_0 e X_2 escono già due rette, spigoli del tetraedro di riferimento, una incidente a_1, a_2, a_3 e una incidente a_4, a_5, a_6, si avrebbe perciò un assurdo.

Ne segue che la retta $A \cup B$ incide la $X_0 \cup X_2$ necessariamente nel punto P_k.

Ovviamente da qui segue che se uno solo dei punti A e B appartiene ad un $\mathfrak{T}_0$-simplesso, ad esempio $A = P_k$, mentre $B \in P_j \cup Q_i$ $(j \neq k)$, la retta $A \cup B$ contiene l'unico punto di $\mathfrak{H}$ non appartenente alla bissestupla nè ai $\mathfrak{T}_0$-simplessi della retta $P_i \cup Q_i$ $(i \neq j, k)$.

3) Infine resta da considerare il caso che i due punti A e B appartengano a rette di $\mathfrak{H}$ sghembe tra loro: $A \in P_i \cup Q_i$ e $B \in P_j \cup Q_j$ $(i \neq j)$.

Consideriamo la retta $P_k \cup Q_k$ $(k \neq i, j)$: la quadrica luogo delle rette incidenti queste tre rette, a due a due sghembe, contiene, oltre $X_0 \cup X_2$ e $X_1 \cup X_3$, due spigoli opposti del tetraedro di riferimento i cui punti distinti dai vertici appartengono a rette della bissestupla $\mathfrak{B}$.

Ne segue che le rimanenti tre generatrici della quadrica sono rette della ipersuperficie $\mathfrak{H}$ contenenti almeno due vertici della $\mathfrak{B}$, ma nessuna di esse può contenerne quattro senza essere una retta della bissestupla, perciò due di queste tre generatrici appartengono alla $\mathfrak{B}$ mentre la terza incide le tre rette nei tre punti di $\mathfrak{H}$ non appartenenti alla $\mathfrak{B}$. Cioè la retta $A \cup B$ contiene l'unico punto della $P_k \cup Q_k$ non appartenente a rette della bissestupla nè ai $\mathfrak{T}_0$-simplessi.

Il lemma è così provato.

Consideriamo allora l'insieme $\mathfrak{P}$ di questi 15 punti e l'insieme $\mathfrak{R}$ delle rette congiungenti questi punti a due a due, $|\mathfrak{R}| = 35$, definendo l'incidenza $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$ come la restrizione dell'incidenza in $S_{3,4}$, si ha subito:

Teorema. *La struttura di incidenza* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{J})$ *è uno spazio proiettivo*, $S_{3,2}$, *di dimensione tre e ordine due.*

Infatti, per come è definito l'insieme $\mathfrak{R}$, è ovvio che per due punti di $\mathfrak{P}$ passa una ed una sola retta, inoltre, per il lemma, ogni retta contiene esattamente tre punti e, ancora dalla dimostrazione del lemma, esaminando i vari casi possibili, si prova facilmente che se due rette l e m sono incidenti, sono incidenti anche le congiungenti i loro punti.

Bibliografia.

[1] A. Barlotti, *Una caratterizzazione grafica delle ipersuperficie hermitiane non singolari in uno spazio lineare finito di ordine quattro*, « Le Matematiche » **21** (1966), 387-395.

[2] J. W. P. Hirschfeld: $[\bullet]_1$ *The double-six of lines over* $PG(3, 4)$, J. Austral. Math. Soc. **4** (1964), 83-89; $[\bullet]_2$ *Classical configurations over finite fields* (I). *The double-six and the cubic surface with* 27 *lines*, Rend. Math. (5) **26** (1967), 115-152.

[3] B. Segre, *Introduction to Galois geometry*, Mem. Accad. Naz. Lincei (8) **8** (1967), 133-236.

Summary.

A double-six is obtained from an hermitian surface of $S_{3,4}$. *Conversely, from a double-six* B *over* $S_{3,4}$, *we have an hermitian surface which contains* B. *Moreover it is proved that, if* H *is an hermitian surface of* $S_{3,4}$ *and* B *a double-six over* H, *a* $S_{3,2}$ *is formed by the points of* H *which do not belong to lines of* B.

* * *