Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 235-237

BRUNO D'AMORE (*)

Ipergrafi e sequenze alternate relative ad un accoppiamento. (**)

1. - Sia $X = \{x_i\}$ un insieme finito o no ed $\mathscr{E} = (E_j / E_j \subset X)$. Si dice che $\mathscr{E}$ costituisce «un ipergrafo su X» se valgono i due seguenti assiomi:

1) $E_j \neq \emptyset$, $\forall j$;
2) $\bigcup_{j=1}^{m} E_j = X$.

Si dice che X è l'insieme dei «vertici» dell'ipergrafo, mentre $\mathscr{E}$ è detto l'insieme degli «spigoli» dell'ipergrafo.

Si è soliti indicare l'ipergrafo appena descritto nel modo seguente: $H = (X, \mathscr{E})$.

Un insieme $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$ è detto *accoppiamento* di H se gli spigoli che appartengono ad $\mathscr{E}_0$ sono due a due disgiunti.

Sia ora $\mathscr{F} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0$.

Si dice che H è *divisibile* se esiste un insieme $\mathscr{E}_0$, tale che anche $\mathscr{F}$ è un accoppiamento.

Si chiama *sequenza alternata* relativa all'accoppiamento $\mathscr{E}_0$ la sequenza $\sigma = (F_1, E_1, F_2, E_2, F_3, \ldots)$ di spigoli distinti di H tali che:

1) F_1 è scelto ad arbitrio in $\mathscr{F}$,
2) E_i è scelto in $\mathscr{E}_0 - \{E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}\}$ in modo che $E_i \cap \bigcup_{j \leq i} F_j \neq \emptyset$,
3) F_{i+1} è scelto in $\mathscr{F} - \{F_1, \ldots, F_i\}$ in modo tale che $F_{i+1} \cap \bigcup_{j \leq i} E_j \neq \emptyset$ e $F_{i+1} \cap \bigcup_{j<i} F_j = \emptyset$.

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, 40127 Bologna, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) – Ricevuto: 5-III-1976.

Vale il seguente risultato:

Sia $H = (X, \mathscr{E})$ *un ipergrafo (finito o no) divisibile connesso; esiste allora una sequenza alternata (finita o no)* $\sigma = (F_1, E_1, F_2, E_2, \ldots)$ *tale che*

$$\bigcup_i (F_i \cup E_i) = X\,.$$

Supponiamo sia $E_j \in \mathscr{E}_0$. Per la definizione di divisibilità, esiste un $E_m \in \mathscr{F}$ tale che $E_m \cap E_j \neq \emptyset$. Detto $E_j = F_1$, sia $E_m = E_1$. Un $E_n \in \mathscr{E}_0$ tale che $E_n \cap E_j \neq \emptyset$ e $E_n \cap E_m = \emptyset$, se c'è, è F_2. Se un tale E_n non c'è, l'ipergrafo è $H = (E_j \cup E_m, \{E_j, E_m\})$ e il teorema è banalmente provato.

Esaurito questo modo di procedere, dopo $2n$ o $2n-1$ passi, sia $E_h \in \mathscr{E}_0$ tale che $E_h \cap E_s \neq \emptyset$. Si dirà $E_h = F_{n+1}$ o $E_h = E_n$.

Se $E_h \in \mathscr{F}$ si procede analogamente. (Si noti che l'unico caso dubbio si avrebbe con $E_h \in \mathscr{E}_0 \cap \mathscr{F}$, caso assurdo perchè $\mathscr{F}$ è un accoppiamento.)

Vale pure il risultato inverso, una volta notato che non vi può essere un ipergrafo che ammette una sequenza alternata tale che $\bigcup_i (F_i \cap E_i) = X$, ma tale che esso non risulti divisibile.

Diamo ora la definizione di ipergrafo bipartito.

Sia $H = (X, \mathscr{E})$ un ipergrafo finito o no e sia $E_0 \subset X$ un insieme tale che

1) $E_0 \notin \mathscr{E}$;

2) $\forall x, y \in E_0$, $\forall i \in I$, $x, y \notin E_i \in \mathscr{E}$ (dove $I \subset N$).

E_0 si chiama *coparte di* X.

Se anche $x - E_0$ è una coparte di X, diremo che H è un *ipergrafo bipartito.*

Seguono, per gli ipergrafi bipartiti, le seguenti proprietà.

P.1. *Ogni catena semplice si può rappresentare mediante un ipergrafo bipartito.*

Basta assumere come spigoli dell'ipergrafo gli spigoli della catena e, ordinati gli indici numerici dei vertici, raggruppare in $\mathscr{E}_0$ tutti i vertici di indice pari (o dispari).

P.2. *Ogni grafo bipartito si può rappresentare come ipergrafo bipartito* (cioè: il concetto di ipergrafo bipartito è un'estensione naturale di quella di grafo bipartito).

Basta assumere come spigolo dell'ipergrafo ciascuno spigolo del grafo.

P.3. *Un ipergrafo bipartito è sempre divisibile.*

Infatti, se $H = (X, \mathscr{E})$ è un ipergrafo bipartito, ammette un accoppiamento descritto da quegli spigoli che contengono elementi di E_0 e di $X - E_0$ e che risultano essere non adiacenti. Di più, poichè $X - E_0$ è una coparte di X, anche $\mathscr{F} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0$ è un accoppiamento, dato che i suoi elementi (spigoli) hanno le stesse proprietà di $\mathscr{E}_0$.

Dunque H è divisibile.

P.4. *Un ipergrafo bipartito ammette sempre una sequenza alternata che comprende ciascun* E_i.

Segue subito dalla P.3 e dal risultato precedente.

Bibliografia.

C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

Summary.

We define the concept of divisible hypergraph and, on the basis of definition of alternating sequence, we proof that every divisible hypergraph always admits alternating sequence. At last, we give a definition of bipartite hypergraphs and we determine some properties of them.

* * *