Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 229-234

RITA CAPODAGLIO (*)

Sulle direzioni caratteristiche della trasformazione prodotto di due trasformazioni puntuali. (**)

1. – Siano π', π, π'' tre piani proiettivi e siano assegnate una trasformazione puntuale $\mathscr{T}_1$ tra π' e π e una trasformazione puntuale $\mathscr{T}_2$ tra π e π''. Sia $O'O$ (rispettivamente OO'') una coppia regolare di punti corrispondenti nella $\mathscr{T}_1$ (rispettivamente nella $\mathscr{T}_2$). Evidentemente la coppia $O'O''$ è regolare per la trasformazione $\mathscr{T}$ prodotto di $\mathscr{T}_1$ e $\mathscr{T}_2$ ed è ovvio che gli intorni del 2° ordine della $\mathscr{T}_1$ e della $\mathscr{T}_2$ rispettivamente in $O'O$ e in OO'' individuano l'intorno del 2° ordine della $\mathscr{T}$ in $O'O''$.

Si pone allora il problema: *note le direzioni e le proiettività caratteristiche delle trasformazioni $\mathscr{T}_1$ e $\mathscr{T}_2$ rispettivamente in $O'O$ e in OO'', costruire le direzioni e le proiettività caratteristiche della trasformazione $\mathscr{T}$ in $O'O''$.*

Tale problema venne posto e studiato dapprima da M. Villa (1). Nel presente lavoro, con metodo completamente diverso da quello usato dal Villa e in tutt'altro ordine di idee, si riprende tale problema e si costruiscono le direzioni caratteristiche della trasformazione $\mathscr{T}$.

Per far ciò si utilizza una trilinearità strettamente legata all'intorno del 2° ordine di una trasformazione puntuale (2): sia $\mathscr{T}$ una qualunque trasformazione puntuale tra due piani proiettivi $\pi(x, y)$ e $\pi'(x', y')$ e sia OO' una coppia regolare di punti corrispondenti in $\mathscr{T}$. Siano t_1, t_2, t_3 (rispettivamente t'_1, t'_2, t'_3) le rette caratteristiche, supposte distinte, della $\mathscr{T}$ uscenti da O (rispettivamente da O'). È noto allora (3) che esistono ∞^2 trasformazioni quadratiche

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, 40127 Bologna, Italia.
(**) Ricevuto: 26-II-1976.
(1) Cfr. $[2]_7$.
(2) Cfr. [1].
(3) Cfr. $[2]_1$, $[2]_2$, $[2]_3$, $[2]_4$, $[2]_5$, $[2]_6$.

osculatrici (t.q.o.) della $\mathscr{T}$ in O, O' i cui punti singolari A_1, A_2, A_3 e A_1', A_2', A_3' appartengono rispettivamente a t_1, t_2, t_3 e a t_1', t_2', t_3'.

Ebbene (4) i punti A_1, A_2, A_3 si corrispondono in una trilinearità tra le rette t_1, t_2, t_3 (egualmente i punti A_1', A_2', A_3' sulle rette t_1', t_2', t_3') che si chiama « trilinearità caratteristica delle tre rette» .

Se il punto O ha coordinate $(0, 0)$ e le rette t_1, t_2, t_3, sono state scelte come rette $y = 0$, $x = 0$, $x = y$, la loro trilinearità caratteristica θ si può scrivere nella forma

$$xyz + xz + yz - xy = 0\,, \tag{1}$$

dove x (rispett. y o z) è la coordinata proiettiva non omogenea sulla retta $y = 0$ (rispett. $x = 0$, o $x = y$).

Si dimostra ancora che θ gode delle seguenti proprietà:

I) se su una retta si sceglie il punto O e su un'altra un punto P qualunque, sulla terza retta alla coppia OP corrisponde sempre il punto O.

II) fissato un punto Q su una retta, la θ subordina tra le altre due una prospettività avente come centro un punto Q' della stessa retta.

III) su ogni retta, associando ad ogni punto Q il punto Q' così ottenuto, si determina una proiettività parabolica α, avente O come punto unito.

Per ciò che segue ricordiamo anche che, scegliendo nel piano π le rette caratteristiche della $\mathscr{T}$ nel modo suddetto, la trasformazione $\mathscr{T}$ può essere rappresentata dalle equazioni (5)

$$\begin{cases} x' = x - xy + [3] \\ y' = y - xy + [3]\,, \end{cases} \tag{2}$$

dove il simbolo [3] indica l'insieme dei termini di grado > 2 in x, y. Ciò premesso, la determinazione delle direzioni caratteristiche della trasformazione prodotto di due trasformazioni puntuali si basa sulla seguente osservazione fondamentale:

Mediante la trasformazione $\mathscr{T}$ un E_2 di centro O si muta in un E_2' (di centro O') di flesso se e solo se ciascuna delle ∞^2 coniche che lo contengono taglia le tre rette caratteristiche della $\mathscr{T}$ uscenti da O (oltre che in O) in tre punti che si corrispondono nella trilinearità θ.

---

(4) Cfr. [**1**].

(5) Cfr. [**2**]$_1$, [**2**]$_2$, [**2**]$_3$, [**2**]$_4$, [**2**]$_5$, [**2**]$_6$. [**2**]$_7$

Infatti: sia $\mathscr{C}$ una conica siffatta e siano A_1, A_2, A_3, i punti intersezione della $\mathscr{C}$ con le tre rette caratteristiche. La t.q.o. avente come punti singolari A_1, A_2, A_3, diciamola $\mathscr{Q}$, muta la $\mathscr{C}$ in una retta r, e dunque una qualunque trasformazione osculante la $\mathscr{Q}$ in O, O', e in particolare la $\mathscr{T}$, muta la conica $\mathscr{C}$ in una curva avente un contatto del 2° ordine in O' con la retta r, cioè in una curva avente in O' un flesso. Il viceversa è ovvio.

2. – Siano π', π, π'' tre piani proiettivi e siano assegnate una trasformazione puntuale $\mathscr{T}_1$ tra π' e π e una trasformazione puntuale $\mathscr{T}_2$ tra π e π''.

Sia poi $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1 \cdot \mathscr{T}_2$, la trasformazione prodotto di $\mathscr{T}_1$ e $\mathscr{T}_2$.

Sia O', O (rispettiv. O, O'') una coppia regolare di punti corrispondenti nella $\mathscr{T}_1$ (rispettiv. nella $\mathscr{T}_2$). Scegliamo O', O, O'' come punti di coordinate proiettive non omogenee $(0, 0)$ nei rispettivi piani.

Siano poi r_1', s_1', t_1' e r_1, s_1, t_1 le rette caratteristiche della $\mathscr{T}_1$, uscenti rispettivamente da O' e O, e siano r_2, s_2, t_2 e r_2'', s_2'', t_2'' le rette caratteristiche della $\mathscr{T}_2$ uscenti rispettivamente da O e O''.

Supponiamo che (come si verifica in generale) ciascuna terna di rette caratteristiche sia formata da rette distinte. Siano infine θ_1 e θ_2 le trilinearità caratteristiche delle rette r_1, s_1, t_1 e r_2, s_2, t_2 rispettivamente.

Per costruire le rette caratteristiche della $\mathscr{T}$ uscenti da $O'O''$ distinguiamo quattro casi:

a) Le rette r_1, s_1, t_1 coincidono con le rette r_2, s_2, t_2: è banale osservare che le rette caratteristiche della $\mathscr{T}$ uscenti da $O'O''$ sono rispettivamente r_1', s_1', t_1' e r_2'', s_2'', t_2''.

b) Due delle rette r_2, s_2, t_2 coincidono con due delle rette r_1, s_1, t_1. Per esempio sia $r_2 = r_1$, $s_2 = s_1$. In tal caso si scelgano ad arbitrio due punti $R \in r_1$ e $S \in s_1$ (purchè distinti da O) e siano $T_1 \in t_1$ e $T_2 \in t_2$ i due punti tali che le terne (R, S, T_1) e (R, S, T_2) si corrispondano in θ_1 e θ_2 rispettivamente. Sia Γ la conica individuata dai punti O, R, S, T_1, T_2. L'E_2 di centro O e appartenente a Γ ha come corrispondente nella $\mathscr{T}_1$ (rispett. nella $\mathscr{T}_2$) (6) un E_2' di centro O' (rispett. un E_2'' di centro O'') di flesso, sicchè tali E_2' e E_2'' individuano una coppia di direzioni caratteristiche corrispondenti della $\mathscr{T}$.

Le altre due coppie di direzioni caratteristiche sono evidentemente r_1', r_2'' e s_1', s_2''.

Dunque la $\mathscr{T}$ ha nella coppia $O'O$ tre direzioni caratteristiche distinte. Al variare di R e S sulle rette r_1 e s_1 rispettivamente si hanno le ∞^2 coniche contenenti l'E_2 considerato.

---

(6) Ovviamente intervengono solo gli intorni del 2° ordine della $\mathscr{T}_1$ e della $\mathscr{T}_2$ nella coppia O', O o nella coppia O, O'' (qui come nel seguito).

c) Una delle rette r_2, s_2, t_2 coincide con una delle rette r_1, s_1, t_1. Per esempio sia $t_2 = t_1$. Le rette r_1, s_1, t_1 siano state scelte rispettivamente come rette $x = 0$, $x = y$, $y = 0$. La trasformazione $\mathscr{T}_1$ sia rappresentata dal sistema (2) e la trilinearità θ_1 abbia l'equazione (1).

Le rette r_2, s_2, t_2 siano rispettivamente $y = m_1 x$, $y = m_2 x$, $y = 0$.

Scegliendo opportunamente il triangolo di riferimento nel piano π'' la trilinearità θ_2 si può scrivere nella forma

$$m_1 m_2 \xi\eta x + (m_2 - m_1)\xi\eta + m_1 \xi x - m_2 \eta x = 0\,, \tag{3}$$

dove ξ (rispett. η) è la coordinata proiettiva sulla retta $y = m_1 x$ (rispett. $y = m_2 x$).

Sia $R_1 \in r_1$, $S_1 \in s_1$, $T \in t_1$ una terna di punti distinti da O e corrispondenti in θ_1 e sia F il fascio di coniche passanti per O, R_1, S_1, T. Siano Γ e $\bar{\Gamma}$ le due coniche di F che tagliano le rette r_2 e s_2, oltre che in O, rispettivamente in due punti R_2 e S_2 tali che la terna R_2, S_2, T sia corrispondente in θ_2.

L'E_2 di centro O e appartenente a Γ ha come corrispondente nella $\mathscr{T}_1$ (rispettivamente nella $\mathscr{T}_2$) un E_2' di centro O' (rispettivamente un E_2'' di centro O''), di flesso, sicchè tali E_2' ed E_2'' individuano una coppia di direzioni caratteristiche corrispondenti in $\mathscr{T}$. Ugualmente, partendo dall'$\bar{E}_2$ di centro O e appartenente a $\bar{\Gamma}$ si trovano un $\bar{E}_2'$ e un $\bar{E}_2''$ di centri O' e O'' che individuano un'altra coppia di direzioni caratteristiche. Al variare di R_1 e S_1 si hanno le ∞^2 coniche che contengono E_2 oppure $\bar{E}_2$. La terza coppia di direzioni caratteristiche è evidentemente costituita dalle rette t_1' e t_2''. Dimostriamo che Γ e $\bar{\Gamma}$ sono sempre distinte, sicchè anche in questo caso, la $\mathscr{T}$ ha tre direzioni caratteristiche distinte. Infatti come fascio F si può scegliere il fascio $x(y-1) + K(x-y) = 0$, dove K è un parametro.

I punti R_2 ed S_2 hanno coordinate

$$\left(\frac{1+K(m_1-1)}{m_1}\,,\,1+K(m_1-1)\right), \qquad \left(\frac{1+K(m_2-1)}{m_2}\,,\,1+K(m_2-1)\right).$$

A causa della (3), le coniche Γ, $\bar{\Gamma}$ si ottengono per quei valori di K che soddisfano l'equazione

$$(m_1-1)(m_2-1)K^2 + 2K(m_1-1) + 1 = 0\,,$$

il cui discriminante si annulla soltanto per $m_1 = 1$ e per $m_1 = m_2$, casi da escludere in quanto abbiamo supposto $r_2 \neq s_1$ e $r_2 \neq s_2$.

Allo stesso risultato si può pervenire notando che le coniche del fascio F

tagliano le rette r_2 e s_2 (oltre che in O) in punti che si corrispondono nella proiettività

$$m_1(m_2-1)\xi - m_2(m_1-1)\eta + m_1 - m_2 = 0 \,. \tag{4}$$

D'altra parte, essendo stato fissato il punto T di coordinate omogenee $(0, 1, 0)$ sulla retta t_2, la trilinearità θ_2 subordina tra le rette r_2 e s_2 la proiettività

$$m_1 m_2 \xi\eta + m_1\xi - m_2\eta = 0 \,. \tag{5}$$

Le coppie comuni alla proiettività (4) e (5), siano R_2, S_2 e $\bar{R}_2$, $\bar{S}_2$ (con $R_2, \bar{R}_2 \in r_2$ e $S_2, \bar{S}_2 \in s_2$), risolvono il nostro problema in quanto le terne (T, R_2, S_2) e (T, R_2, S_2) sono corrispondenti in θ_2 e i punti O, R_1, S_1, T, R_2, S_2 (al pari dei punti $O, R_1, S_1, T, \bar{R}_2, \bar{S}_2$) appartengono ad una stessa conica.

Semplici calcoli mostrano che, nelle nostre ipotesi, le coppie R_2, S_2 e $\bar{R}_2$, $\bar{S}_2$ sono sempre distinte.

d) Le rette r_2, s_2, t_2, sono distinte dalle rette r_1, s_1, t_1.

Sia $R_1 \in r_1$, $S_1 \in s_1$, $T_1 \in t_1$ una terna di punti corrispondenti in θ_1 e sia F il fascio di coniche passanti per O, R_1, S_1, T_1.

Siano Γ, $\bar{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}$ le tre coniche di F che tagliano le rette r_2, s_2, t_2, oltre che in O, in tre punti che si corrispondono in θ_2.

L'E_2 di centro O e appartenente ad una di tali coniche ha come corrispondente nella $\mathcal{T}_1$ (rispett. nella $\mathcal{T}_2$) un E_2' i centro O' (rispett. un E_2'' di centro O'') di flesso, sicchè tali E_2' ed E_2'' individuano una coppia di direzioni caratteristiche corrispondenti. Troviamo così le tre direzioni caratteristiche uscenti da O' e da O'' della trasformazione $\mathcal{T}$. Ovviamente al variare di R_1 e S_1 si trovano le ∞^2 coniche che contengono gli E_2 considerati.

Per trovare le coniche Γ, $\bar{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}$ si può anche osservare che se R_2, S_2, T_2 sono i punti in cui la generica conica del fascio F incontra, oltre che in O, rispettivamente le rette r_2, s_2, t_2, affinchè R_2, S_2, T_2, siano corrispondenti in θ_2, occorre che R_2 e S_2 siano corrispondenti nella prospettività subordinata da θ_2 tra r_2 e s_2 quando si fissa T_2 su t_2: Ciò equivale a dire che R_2 e S_2 devono essere allineati con il punto trasformato di T_2 mediante la proiettività parabolica α. Notiamo che l'equazione di 3° grado cui si giunge per determinare le tre coniche volute non è mai indeterminata.

Bibliografia.

[1] R. Capodaglio, *Alcune osservazioni sull'intorno del 2° ordine di una trasformazione puntuale tra due piani proiettivi in una coppia regolare di punti corrispondenti*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **9** (1974), 730-735.

[2] M. VILLA: [•]$_1$ *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza fra piani proiettivi*-(I), Atti Accad. Italia Rend. (7) **3** (1941-42), 718-724; [•]$_2$ *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza fra piani proiettivi* -(II), Atti Accad. Italia Rend. (7) **4** (1942-43), 1-7; [•]$_3$ *Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi lineari mediante trasformazioni cremoniane,* Univ. Roma e Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **3** (1942), 216-230; [•]$_4$ *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*-(I), Atti Accad. Lincei Rend. (8) **4** (1948), 55-61; [•]$_5$ *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari* -(II), Atti Accad. Lincei Rend. (8) **4** (1948), 192-196; [•]$_6$ *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari* -(III), Atti Accad. Lincei Rend. (8) **4** (1948), 295-303; [•]$_7$ *Sul prodotto di due trasformazioni puntuali,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29** (1949), 307-313.

Resumé.

Etant donné deux transformations ponctuelles T_1 et T_2, on construit les directions inflexionnelles de la transformation $T_1 \cdot T_2$ dans un couple régulier de points correspondents.

* * *