Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 233-237

ALBERTA DE FLORA (*)

Sui vertici e sugli spigoli quasi critici di un grafo. (**)

1. – Sia, per il resto del presente lavoro, $G = (X, E)$ un grafo semplice ([1], p. 65). Nel seguito si usano le notazioni di BERGE [1].

Def. Un insieme $S \subset X$ è detto *stabile* se due elementi distinti di S non sono adiacenti.

Def. Sia $\mathcal{S}$ la famiglia degli insiemi stabili di G. Si chiama *numero di stabilità* di G il numero: $\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} |S|$.

Def. Sia $\mathscr{C}_i = (C_{i1}, \ldots, C_{ik})$ una partizione di X in clique due a due disgiunte. $\theta(G)$ è il più piccolo numero di clique che possono ripartire G (1): $\theta(G) = \min_i |\mathscr{C}_i|$.

Prop. 1. *Un grafo senza cicli dispari ammette una partizione* (A, B) *di* X *in due insiemi stabili* (*appunto*, A *e* B) ([1], pp. 125-126).

Prop. 2. *Supponiamo che* G *abbia* m *spigoli ed* n *vertici*; *si ha*

$$\alpha(G) \geqslant \frac{n^2}{2m + n},$$

(cfr. [1], p. 271). Si ha l'uguaglianza se e solo se tutte le componenti connesse di G sono clique della medesima cardinalità.

(*) Indirizzo: Istituto Tecnico «L. Tanari», 40100 Bologna, Italia.
(**) Ricevuto: 18-XI-1975.
(1) Clique, è un sottografo completo di un grafo G. La Def. di $\theta(G)$ è in [1], p. 262.

Def. Un grafo G è detto *α-critico* se ogni grafo parziale G' dedotto da G per eliminazione di uno spigolo verifica l'uguaglianza ([**2**]):

$$\alpha(G') = \alpha(G) + 1 \, .$$

Prop. 3. *Ogni grafo G con $\alpha(G) = k$ contiene come grafo parziale un grafo α-critico H, con $\alpha(H) = k$* ([**1**], p. 274).

Def. Un vertice x_i del grafo G è detto *vertice critico* se si ha

$$\alpha(G_{X \setminus \{x_i\}}) < \alpha(G) \, ,$$

se con $G_{X/\{x_i\}}$ si indica il grafo dedotto da G per eliminazione di un vertice (e quindi, di conseguenza, degli spigoli in esso incidenti).

Uno spigolo e di G è detto *spigolo critico* se si ha:

$$(G_{E/\{e\}}) > \alpha(G) \, ,$$

se con $G_{E/\{e\}}$ si intende il grafo dedotto da G per eliminazione di uno spigolo.

Prop. 4. *I vertici incidenti ad uno spigolo critico non sono critici. Gli spigoli incidenti ad un vertice critico non sono critici.*

Prop. 5. *In un grafo α-critico, gli unici vertici critici sono quelli isolati* ([**1**], p. 286).

Prop. 6. *Se G non ha vertici critici e se $\alpha(G) = n/2$, si ha anche $\theta(G) = n/2$.*

Si deduce facilmente dal Teorema 13 di [**1**], p. 286.

Def. Un *albero* è un grafo connesso senza cicli (dunque è un 1-grafo) ([**1**], p. 3).

Prop. 7. *Sia $G = (X, E)$ un albero con $|X| = n > 1$. Le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti* (ciascuna, cioè caratterizza il concetto di albero).

1) G è connesso e non ha cicli;
2) G è tale che $|E| = n - 1$ e non ha cicli;
3) G è connesso ed è $|E| = n - 1$;
4) G è connesso; inoltre, se si sopprime un elemento di E (uno spigolo di (G)) il grafo risultante non è più connesso [2].

---

[2] La dimostrazione è in [**1**], p. 22. Si noti, tuttavia, che occorre postulare che in G non vi siano vertici isolati.

Prop. 8. *Un albero con $n>1$ ammette almeno due vertici pendenti.*

Prop. 9. *In un albero si ha $\alpha(G) \geqslant n^2/3n-2$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che in un albero $m=n-1$ e da Proposizioni precedenti.

Def. Un vertice x_i del grafo G è detto vertice *quasi critico* se si ha:

$$\alpha(G_{X\setminus\{x_i\}}) \leqslant \alpha(G) .$$

Uno spigolo e di G è detto spigolo *quasi critico* se si ha:

$$\alpha(G_{E\setminus\{e\}}) \geqslant \alpha(G) .$$

Prop. 10. *In un albero ogni vertice è quasi critico.*

Dimostrazione. Infatti, per ogni i, se x_i è pendente nell'eliminare x_i occorre eliminare anche uno spigolo; dunque, se x_i faceva parte di un insieme stabile S, il « nuovo » insieme stabile S', ottenuto dall'eliminazione di x_i non può aumentare la cardinalità. Se $x_i \in S$, dopo l'eliminazione $|S'|<|S|$; se $x_i \notin S$, dopo l'eliminazione $|S'|=|S|$.

Se x_i non è pendente, nell'eliminare x_i occorre eliminare almeno due spigoli, il che non aumenta (anzi in generale diminuisce) la cardinalità di ciascun insieme stabile S.

Prop. 11. *In un albero ogni spigolo è quasi critico.*

Dimostrazione. Infatti, se e è pendente, la sua eliminazione produce un vertice (almeno) isolato; dunque ciò aumenta la cardinalità degli insiemi stabili S. Se e non è pendente, la sua eliminazione rompe la connessione del grafo, con lo stesso risultato sugli insiemi stabili.

Nota. Si noti infine che, per alberi G con $n>2$, il numero $\theta(G)$ non è sempre definibile in quanto:

Prop. 12. *Un albero di ordine $n=2$ non ha clique disgiunte.*

Dimostrazione. Una clique di un tale albero ha necessariamente ordine 2. Infatti, se così non fosse, ci sarebbe un ciclo (il che è vietato dalla Prop. 7).

Prop. 13. *Tra gli alberi di ordine $n > 2$, ve ne sono di quelli che non hanno clique disgiunte.*

Dimostrazione. Basta ripetere la considerazione fatta nella precedente dimostrazione.

Prop. 14. *Ogni albero è un grafo bipartito.* Segue dalle Proposizioni 7 e 1.

Prop. 15. *Se G è un grafo bipartito connesso senza cicli pari, G è un albero.* Segue dal fatto che in un albero è $m = n - 1$ e dalle Proposizioni 1 e 7.

Prop. 16. *Se un vertice è critico, esso è pure quasi critico. Se uno spigolo è critico esso è pure quasi critico.*

Prop. 17. *Se due vertici consecutivi x_i e x_j sono quasi critici, lo spigolo α_{ij} che li ha come estremi non può essere critico.*

Dimostrazione. Infatti, se così non fosse, avremmo

$$\alpha(G_{E\setminus\{\alpha_{ij}\}}) > \alpha(G) \geqslant \alpha(G_{X\setminus\{x_i, x_j\}}) = \alpha(G_{E\setminus\{\alpha_{ij}\},\, X\setminus\{x_i, x_j\}})$$

il che è assurdo.

Prop. 18. *Se due vertici consecutivi x_i e x_j sono critici, lo spigolo α_{ij} che li ha come estremi non può essere quasi critico.*

La dimostrazione è analoga a quella della proposizione precedente.

Corollario 19. *In un albero non ci sono coppie di vertici consecutivi critici.*

Dimostrazione. Infatti, se ci fosse una tale coppia x_i, x_j, lo spigolo α_{ij} non sarebbe quasi critico. Ma ciò è contro la Prop. 12.

Prop. 20. *Se due spigoli consecutivi α_{ij} e β_{jk} sono quasi critici, il vertice x_j (in cui concorrono) è quasi critico.*

Dimostrazione. Infatti $\alpha(G_{E\setminus\{\alpha_{ij}, \beta_{jk}\}}) \geqslant \alpha(G)$ mentre

$$\alpha(G) \geqslant \alpha(G_{X\setminus\{x_j\}}) = \alpha(G_{X\setminus\{x_j\},\, E\setminus\{\alpha_{ij}, \beta_{jk}\}})$$

il che è assurdo tranne nel caso in cui x_j è quasi critico.

Corollario 21. *Si ritrova la Prop.* 11 *come caso particolare della Prop.* 20.

Prop. 22. *Se due spigoli consecutivi* α_{ij} *e* β_{jk} *sono critici, il vertice* x_j *(in cui entrambi concorrono) non è critico.*

La dimostrazione è analoga.

Nota. I precedenti risultati generalizzano la Prop. 4, completandola.

Bibliografia.

[1] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[2] A. A. Zykov, *On some properties of linear complexes*, Math. Sb. **24** (1949), 163-188.

Summary.

In **1** *we recall some definitions and well known statements about the stability and trees. In* **2** *we state some theorems about quasi critic edges and vertices of a graph.*

* * *