Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 227-231

ALDO G. S. VENTRE (*)

Sull'immergibilità inferiore e superiore del grafo di Grötzsch. (**)

1. - Introduzione.

Questioni relative a grafi inferiormente o superiormente immergibili sono state trattate in [4]$_2$, [7], ove sono stati forniti anche alcuni esempi.

Grafi inferiormente e superiormente immergibili sono i grafi completi (cfr. [6], [3], risp.), i grafi bipartiti completi (cfr. [5], [4]$_1$, risp.).

In questa nota dimostriamo che il grafo di GRÖTZSCH è inferiormente e superiormente immergibile.

2. – Richiamiamo alcune definizioni. Se G è un grafo semplice finito, $V(G)$, $E(G)$ denotano l'insieme dei vertici e l'insieme degli spigoli di G, rispettivamente, con $|V(G)| = \alpha_0$ e $|E(G)| = \alpha_1$. Sia W una varietà 2-dimensionale compatta orientabile senza bordo (superficie).

Il grafo G dicesi *immergibile* in W se la realizzazione geometrica di G come complesso simpliciale 1-dimensionale è omeomorfa a un sottospazio G' di W.

Le componenti di $W - G'$ diconsi *regioni* dell'immersione di G in W. Si dice che il grafo G ha *genere* $k = \gamma(G)$ se esso è immergibile in una superficie di genere k, essendo k minimo. Un'immersione di G in W tale che ogni sua regione è omeomorfa a un disco aperto dicesi *immersione cellulare*.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Facoltà di Architettura, Università di Napoli, 80100 Napoli, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 17-XI-1975.

Si definisce *genere massimo*, $\gamma_M(G)$, del grafo G connesso il massimo dei generi delle superfici nelle quali G ha un'immersione cellulare (1).

Se G è connesso e diverso da K_2, posto

$$X_1(G) = \alpha_1/6 - (\alpha_0 - 2)/2 \,, \qquad X_2(G) = \alpha_1/4 - (\alpha_0 - 2)/2 \,,$$

valgono le disuguaglianze (cfr. [**1**])

$$\gamma(G) \geqslant \{X_1(G)\}, \quad \text{per ogni } G \text{ connesso,}$$

(d) $\gamma(G) \geqslant \{X_2(G)\}$, se G è connesso e privo di triangoli (2).

Ricordiamo che un grafo G connesso dicesi *inferiormente immergibile* se

$$\gamma(G) = \begin{cases} \{X_1(G)\} & \text{se } X_1(G) > 0 \,, \\ 0 & \text{se } X_1(G) \leqslant 0 \,, \end{cases}$$

e G ha triangoli, e

$$\gamma(G) = \begin{cases} \{X_2(G)\} & \text{se } X_2(G) > 0 \,, \\ 0 & \text{se } X_2(G) \leqslant 0 \,, \end{cases}$$

e G non ha triangoli.

Se G è connesso, denotato con $\beta(G) = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$ il numero di Betti di G, il genere massimo di G soddisfa la limitazione (cfr. [**3**])

$$\gamma_M(G) \leqslant [\beta(G)/2] \,. \tag{1}$$

Ricordiamo inoltre che un grafo G connesso dicesi *superiormente immergibile* se $\gamma_M(G) = [\beta(G)/2]$ (3).

3. – Le dimostrazioni che seguono fanno uso della tecnica di Edmonds [**2**] (cfr. anche [**8**]) che richiamiamo. Siano G un grafo connesso, $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_0}\}$ l'insieme dei suoi vertici, $V(x_i)$ l'insieme dei vertici di G adiacenti a x_i, $i = 1, \ldots, \alpha_0$. Sia $p_i \colon V(x_i) \to V(x_i)$ una permutazione ciclica su $V(x_i)$. Allora

(1) Per le definizioni finora richiamate cfr. [**8**], cap. 6.

(2) Se $y \in \mathbf{R}$, $\{y\}$ denota il minimo intero non minore di y; $[y]$ il massimo intero non maggiore di y.

(3) Per le nozioni di inferiore e superiore immergibilità, cfr. $[\mathbf{4}]_2$.

ogni α_0-pla $(p_1, \dots, p_{\alpha_0})$ individua una immersione cellulare di G in una superficie W. Viceversa, ogni immersione siffatta individua la α_0-pla $(p_1, \dots, p_{\alpha_0})$ che dà luogo a questa immersione. Allora, considerato l'insieme

$$D = \{(x_i, x_j)/\{x_i, x_j\} \in E(G)\} ,$$

ove (x_i, x_j) denota l'arco orientato dal vertice x_i al vertice x_j, e la permutazione $P: D \to D$, definita da $P(x_i, x_j) = (x_j, p_j(x_i))$, i cicli di cui P è prodotto individuano i contorni delle 2-celle dell'immersione.

4. – Dimostriamo che il grafo di GRÖTZSCH (fig. 1), G, è inferiormente immergibile.

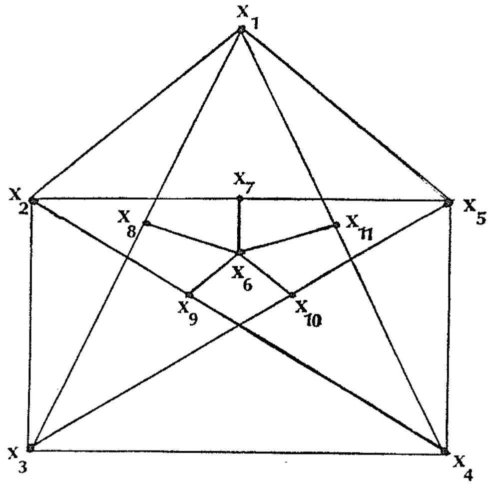

Figura 1

Osserviamo che G è privo di triangoli, $\alpha_0 = 11$, $\alpha_1 = 20$; allora è $X_2(G) = 1/2$. Basta provare, per la definizione di immergibilità inferiore, che $\gamma(G) = 1$. A tale scopo mostriamo che G è immergibile nella superficie di genere 1.

Si consideri la biiezione $t: V(G) \to \{1, 2, \dots, \alpha_0\}$ definita da $t(x_i) = i$, $i = 1, \dots, \alpha_0$. Identificato ciascun vertice di G col corrispondente in t, siano

p_1: (11, 8, 2, 5) , p_5: (1, 7, 10, 4) , p_9: (4, 6, 2) ,
p_2: (7, 1, 3, 9) , p_6: (10, 7, 9, 8, 11) , p_{10}: (3, 5, 6) ,
p_3: (4, 2, 8, 11) , p_7: (5, 2, 6) , p_{11}: (6, 1, 4) ,
p_4: (9, 3, 11, 5) , p_8: (3, 1, 6) ,

le permutazioni cicliche da associare ai vertici di G.

Risulta allora individuata una permutazione P sull'insieme D, che, scissa nei cicli, può porsi sotto la forma

$$\begin{aligned}P\colon\ &((2,3),(3,8),(8,1),(1,2))((1,5),(5,7),(7,2),(2,1))\\&((7,6),(6,9),(9,2),(2,7))((1,11),(11,4),(4,5),(5,1))\\&((5,10),(10,6),(6,7),(7,5))((1,8),(8,6),(6,11),(11,1))\\&((9,4),(4,3),(3,2),(2,9))((4,11),(11,6),(6,10),(10,3),(3,4))\\&((10,5),(5,4),(4,9),(9,6),(6,8),(8,3),(3,10))\,.\end{aligned}$$

Ciascuno dei cicli di P determina una 2-cella della immersione di G nella superficie orientata S_k di genere k individuata da $(p_1, \ldots, p_{11})$. È lecito allora applicare la formula di EULERO

$$\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0 = 2 - 2k \tag{2}$$

a questa decomposizione cellulare di S_k, denotando $\alpha_2 = 9$ il numero delle 2-celle. Dalla (2) si ha $k = 1$. Quindi, per la d), $\gamma(G) = 1$ (4).

5. – Proviamo ora che il grafo di GRÖTZSCH è superiormente immergibile. A tale scopo mostriamo innanzi tutto che G ha un'immersione cellulare in S_5. Le permutazioni da associare ai vertici di G siano

$$\begin{array}{lll}p'_1\colon (2,11,8,5)\,, & p'_5\colon (4,10,7,1)\,, & p'_9\colon (2,6,4)\,,\\ p'_2\colon (1,3,7,9)\,, & p'_6\colon (7,11,10,9,8)\,, & p'_{10}\colon (3,6,5)\,,\\ p'_3\colon (4,8,10,2)\,, & p'_7\colon (5,6,2)\,, & p'_{11}\colon (1,4,6)\,,\\ p'_4\colon (3,9,5,11)\,, & p'_8\colon (1,6,3)\,. & \end{array}$$

Risulta individuata allora la seguente permutazione P' sull'insieme D:

$$\begin{aligned}P'\colon\ &((1,2),(2,3),(3,4),(4,9),(9,2),(2,1),(1,11),(11,4),\\&(4,3),(3,8),(8,1),(1,5),(5,4),(4,11),(11,6),(6,10),\\&(10,5),(5,7),(7,6),(6,11),(11,1),(1,8),(8,6),(6,7),\\&(7,2),(2,9),(9,6),(6,8),(8,3),(3,10),(10,6),(6,9),\\&(9,4),(4,5),(5,10),(10,3),(3,2),(2,7),(7,5),(5,1))\end{aligned}$$

che consta di un unico ciclo di lunghezza 40.

(4) Parte di questo risultato è citata in [**8**].

L'immersione di G nella superficie orientata S_k, individuata da $(p_1', \dots, p_{11}')$, ha dunque un'unica 2-cella.

Dalla (2), valendo ora $\alpha_2 = 1$, si trae $k = 5$. Ricordando, poi, la (1), si ha $\gamma_M(G) = [\beta(G)/2]$ e quindi G è superiormente immergibile.

Bibliografia.

[1] L. Beineke - F. Harary, *Inequalities involving the genus of a graph and its thickness*, Proc. Glasgow Math. Ass. **7** (1965), 19-21.

[2] J. Edmonds, *A combinatorial representation for polyhedral surfaces*, Notices Amer. Math. Soc. **7** (1960), 646.

[3] E. Nordhaus - B. Stewart - A. White, *On the maximum genus of a graph*, J. Comb. Th. B **11** (1971), 258-267.

[4] R. D. Ringeisen: [•]$_1$ *Determining all compact orientable 2-manifolds upon which $K_{m,n}$ has 2-cell imbeddings*, J. Comb. Th. B **12** (1972), 101-104; [•]$_2$ *Upper and lower imbeddable graphs*, «Graph theory and applications», Springer - Verlag, Berlin, 1972.

[5] G. Ringel, *Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **28** (1965), 139-150.

[6] G. Ringel - J. W. T. Youngs, *Solution of Heawood map-coloring problem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **60** (1968), 438-445.

[7] A. G. S. Ventre, *Sul genere massimo e sull'immergibilità inferiore di certi grafi connessi*, (in corso di pubblicazione).

[8] A. T. White, *Graphs, Groups and Surfaces*, North-Holland, London, 1973.

Abstract.

We show that the graph of Grötzsch is lower and upper imbeddable.

* * *