Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 213-225

OSVALDO FERRI (*)

Sulle curve che contengono tutti i punti di un piano lineare finito. (**)

1. - Introduzione.

Sia $S_{2,q}$ un piano lineare costruito su un campo di GALOIS, γ_q, d'ordine q ($q = p^h$, p caratteristica di γ_q). Denoteremo con Γ_q la chiusura algebrica di γ_q. Inoltre $S_{2,q}$ lo penseremo immerso in $S_{2,\Gamma q}$ La geometria di $S_{2,q}$ sarà quella relativa alle trasformazioni lineari a coefficienti in γ_q.

In [3]$_1$ e [3]$_2$ G. TALLINI ha dimostrato che l'ordine minimo delle curve di $S_{2,q}$, *irriducibili* in Γ_q, che contengono tutti i punti di $S_{2,q}$ (cioè invadenti $S_{2,q}$) è $n = q+2$; ha determinato e studiato tali curve dimostrando, tra l'altro, che non possono avere punti multipli in $S_{2,q}$.

Si pone allora il problema di studiare le curve di $S_{2,q}$, invadenti $S_{2,q}$, di ordine immediatamente superiore $q+3$, C^{q+3}, anche in relazione ai punti multipli che esse possono avere in $S_{2,q}$.

Osserviamo innanzi tutto che una curva C^{q+3}, se ha un punto P, in γ_q, di molteplicità $s \geqslant 4$ è certamente riducibile nel fascio di rette (in γ_q) per P ed in una conica (infatti ciascuna delle $q+1$ rette di $S_{2,q}$ per P ha con la C^{q+3} almeno $q+s \geqslant q+4$ intersezioni e quindi appartiene alla C^{q+3}). Inoltre se la C^{q+3} non contiene componenti rettilinee e ha, in γ_q, un punto di molteplicità *tre*, non può ammettere altri punti multipli, in γ_q, (infatti, se avesse un altro punto s-plo, con $s \geqslant 2$, la congiungente tali due punti avrebbe $q+s+2 > q+3$ intersezioni con la C^{q+3} e quindi apparterrebbe ad essa).

(*) Indirizzo: Viale Lombardia 35, 67100 L'Aquila, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 23-V-1975.

Nelle precedenti Note [1]₁ e [1]₂ ho studiato le C^{q+3} irriducibili di $S_{2,q}$, con un punto triplo. Nel presente Lavoro esaminerò il caso di C^{q+3} di $S_{2,q}$, aventi al più solo punti doppi in γ_q.

2. - Singolarità delle C^{q+3} prive di componenti rettilinee.

Nel seguito con $\mathscr{C}^{q+3}$ si denoterà sempre *una curva di* $S_{2,q}$, *d'ordine* $q+3$, *che contenga tutti i punti di* $S_{2,q}$ *e che non possegga componenti rettilinee in* γ_q. Supporremo inoltre che non abbia punti tripli in γ_q (cfr. [1]₁ e [1]₂).

Notiamo che tre degli eventuali k punti doppi in γ_q di una tale $\mathscr{C}^{q+3}$ non possono stare su una retta, altrimenti questa avrebbe con la $\mathscr{C}^{q+3}$ almeno $q+4$ punti (ciascuno dei tre punti doppi dovendosi computare almeno due volte nell'intersezione) e quindi apparterrebbe ad essa. I punti doppi in γ_q di una $\mathscr{C}^{q+3}$ costituiscono allora un k-arco e quindi (cfr. [2], pag. 266) il loro numero è $k \leqslant q+2$, se q è pari, e $k \leqslant q+1$, se q è dispari. D'altra parte in S_{2,Γ_q} il massimo numero di punti doppi di una $\mathscr{C}^{q+3}$ irriducibile è dato da $(q+2)(q+1)/2$ [in quanto una C^n irriducibile ha al massimo $(n-1)(n-2)/2$ punti doppi] e tale numero è maggiore di $q+1$ e di $q+2$.

Una $\mathscr{C}^{q+3}$ ha equazione (cfr. [3]₂, pag. 433), in coordinate omogenee x_1, x_2, x_3:

$$(2.1) \qquad A(x_1, x_2, x_3)(x_1^q x_2 - x_1 x_2^q) + B(x_1, x_2, x_3)(x_2^q x_3 - x_2 x_3^q) + \\ + C(x_1, x_2, x_3)(x_3^q x_1 - x_3 x_1^q) = 0 ,$$

ove si è posto:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} A(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{ij}^{1,2,3} a_{ij} x_i x_j \\ B(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{ij}^{1,2,3} b_{ij} x_i x_j \\ C(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{ij}^{1,2,3} c_{ij} x_i x_j . \end{cases}$$

Dimostriamo ora il seguente teorema:

I. *Non esistono curve* $\mathscr{C}^{q+3}$ (*non contenenti componenti rettilinee in* γ_q), *aventi almeno sei punti doppi in* γ_q *appartenenti ad una conica.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la $\mathscr{C}^{q+3}$, di equazione (2.1), abbia *sei* punti doppi in γ_q su una conica $\mathscr{C}$ (evidentemente non degenere). Possiamo scegliere il riferimento, in $S_{2,q}$, in modo che due dei sei punti doppi siano 0_1 $(1, 0, 0)$ e 0_2 $(0, 1, 0)$, le tangenti alla conica in tali punti siano le rette di equazioni $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$ e il punto unitario sia un altro punto doppio. L'equazione della conica sarà:

$$x_1 x_2 = x_3^2 . \tag{2.3}$$

I punti di tale conica in $S_{2,q}$, ad eccezione di 0_1, hanno coordinate $(\alpha^2, 1, \alpha)$ al variare di α in γ_q. Poichè 0_1 e 0_2 sono doppi, dovrà aversi nella (2.1):

$$a_{11} = c_{11} = 0 , \qquad a_{22} = b_{22} = 0 . \tag{2.4}$$

Siano A_i $(\alpha_i^2, 1, \alpha_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ i quattro punti doppi, diversi da 0_1 e 0_2 di $\mathscr{C}^{q+3}$, dei sei in esame, onde è $\alpha_i \neq 0$. Tali punti annulleranno, con le loro coordinate, le derivate parziali del primo membro della (2.1), cioè dovrà aversi:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{A_i} = 0 , \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{A_i} = 0 , \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{A_i} = 0 . \tag{2.5}$$

Dalle prime due equazioni (2.5), esplicitando si ha (tenuto conto che, essendo $\alpha_i \in \gamma_q$, risulta $\alpha_i^q = \alpha_i$):

$$\begin{cases} \alpha_i[c_{13}\alpha_i^3 + (c_{33} + c_{12} - a_{13})\alpha_i^2 + (c_{23} - a_{33} - a_{12})\alpha_i + c_{22} - a_{23}] = 0 \\ \alpha_i^2[(a_{13} - b_{11})\alpha_i^3 + (a_{12} + a_{33} - b_{13})\alpha_i^2 + (a_{23} - b_{33} - b_{12})\alpha_i - b_{23}] = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

e poichè è $\alpha_i \neq 0$, si ottiene che le α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ debbono soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} c_{13}x^3 + (c_{33} + c_{12} - a_{13})x^2 + (c_{23} - a_{33} - a_{12})x + c_{22} - a_{23} = 0 \\ (a_{13} - b_{11})x^3 + (a_{12} + a_{33} - b_{13})x^2 + (a_{23} - b_{33} - b_{12})x - b_{23} = 0 . \end{cases} \tag{2.7}$$

Il sistema (2.7) deve essere verificato per *quattro* valori distinti di x $(= \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ed essendo ciascuna delle equazioni del sistema di terzo grado, dovranno essere identicamente nulli i loro coefficienti, cioè:

$$\begin{cases} c_{13} = b_{23} = 0 ; \quad c_{22} = a_{23} ; \quad c_{23} = a_{33} + a_{12} ; \quad a_{13} = c_{33} + c_{12} ; \\ a_{13} = b_{11} ; \quad b_{13} = a_{12} + a_{33} ; \quad a_{23} = b_{33} + b_{12} . \end{cases} \tag{2.8}$$

Sostituendo le (2.8) e le (2.4) nella (2.1) si ha che la $\mathscr{C}^{q+3}$ da essa rappresentata contiene la retta di equazione $a_{12}x_1 + b_{33}x_3 = 0$, e ciò è contro l'ipotesi.

Dal teorema precedente segue il corollario:

II. *Una $\mathscr{C}^{q+3}$ di $S_{2,q}$, con $q \geqslant 5$, non può contenere, come doppi, tutti i punti, in γ_q, di una conica (non degenere di $S_{2,q}$).*

Dimostrazione. Infatti, se così fosse, poichè la conica ha $q+1$ punti in γ_q si avrebbe, essendo $q \geqslant 5$, che la $\mathscr{C}^{q+3}$ conterrebbe $q+1 \geqslant 6$ punti doppi appartenenti ad una conica, contro il teorema precedente.

3. - Proprietà delle polari di una $\mathscr{C}^{q+3}$ con tre punti doppi ed ulteriore studio delle singolarità di una $\mathscr{C}^{q+3}$.

Supponiamo che la $\mathscr{C}^{q+3}$ di equazione (2.1) abbia *tre* punti doppi in $0_1\,(1, 0, 0)$, $0_2\,(0, 1, 0)$ e $0_3\,(0, 0, 1)$; dovrà aversi:

$$a_{11} = c_{11} = 0\ , \qquad a_{22} = b_{22} = 0\ , \qquad b_{33} = c_{33} = 0\ . \tag{3.1}$$

Gli eventuali altri punti doppi della $\mathscr{C}^{q+3}$, in γ_q, sono dati dalle soluzioni, in γ_q, del sistema delle polari della $f = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \tag{3.2}$$

cioè (poichè un punto (y_1, y_2, y_3) in γ_q è tale che $y_i = y_i^q$, $i = 1, 2, 3$ e per le (2.2)) del sistema:

$$-Ax_2 + Cx_3 = 0\ , \qquad Ax_1 - Bx_3 = 0\ , \qquad Bx_2 - Cx_1 = 0\,, \tag{3.3}$$

in cui si tenga conto delle (3.1).

Cominciamo ad osservare, preliminarmente, che *nessuna delle equazioni* (3.3) *è identicamente nulla* (*in Γ_q*). Infatti se la prima delle (3.3) fosse identicamente nulla, dovrebbe aversi $a_{12} = 0$ e, tenuto conto della (3.1), $a_{11} = a_{22} = 0$, onde la $\mathscr{C}^{q+3}$ conterebbe la retta $x_3 = 0$. Analogamente si procede per le altre due equazioni del sistema (3.3).

Le (3.3) rappresentano dunque tre cubiche di $S_{2,q}$, che denoteremo con $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.

Per quanto precede si ha:

III. *I punti doppi, in γ_q, della $\mathscr{C}^{q+3}$, sono tutti e soli i punti, in γ_q, comuni alle tre cubiche $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.*

Metteremo ora in luce alcune proprietà di tali cubiche, utili per l'ulteriore studio della $\mathscr{C}^{q+3}$. Proviamo che:

IV. *Le tre cubiche* $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$, *sono a due a due distinte in* Γ_q.

Dimostrazione. Se fosse $\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C}_2$, le loro equazioni dovrebbero avere i coefficienti proporzionali, onde dovrebbe aversi $a_{12} = 0$, ed essendo $a_{11} = a_{22} = 0$ (cfr. (3.1)), la $\mathscr{C}^{q+3}$ conterebbe, come componente, la retta di equazione $x_3 = 0$ e ciò è escluso. Analogamente si prova che non può essere $\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C}_3$ o $\mathscr{C}_2 \equiv \mathscr{C}_3$.

V. *Due, delle tre cubiche, non possono avere componenti rettilinee in comune* (*se* $q > 2$).

Dimostrazione. Se, per esempio, $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ avessero una componente rettilinea ℓ in comune, a coefficienti in γ_q, tale retta non potrebbe coincidere con la retta di equazione $x_3 = 0$, perchè altrimenti si avrebbe $a_{12} = 0$ e la $\mathscr{C}^{q+3}$ conterrebbe la retta $x_3 = 0$. Scelti allora tre punti di ℓ distinti tra loro e dal punto d'intersezione con $x_3 = 0$ (certamente esistenti perchè $q > 2$), tali punti apparterrebbero anche alla $\mathscr{C}_3$: in quanto, per il teorema di EULERO sulle forme, in γ_q si ha:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\gamma_q} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{\gamma_q} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{\gamma_q} x_3 = 0 \tag{3.4}$$

essendo $(\partial f/\partial x_i)_{\gamma_q} = 0$ l'equazione della $\mathscr{C}_i$. Dunque, per la proposizione III, tali tre punti allineati sarebbero doppi per la $\mathscr{C}^{q+3}$ onde questa conterrebbe la ℓ come componente.

La $\mathscr{C}_1$ e la $\mathscr{C}_2$ non possono avere neanche una componente rettilinea comune fuori di γ_q, in quanto, se così fosse, le coniugate di tale retta apparterrebbero ancora a $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ e quindi o $\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C}_2$ (se ℓ appartiene ad un ampliamento cubico di γ_q) oppure $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ avrebbero in comune una conica δ degenere in due rette coniugate in una estensione quadratica di γ_q, di cui denotiamo con D_1 l'unico punto in γ_q, e quindi ciascuna si spezzerebbe in δ ed in una ulteriore componente in γ_q. Tali ulteriori componenti rettilinee in γ_q non possono coincidere, per quanto precede, e allora si intersecano in un punto D_2. I punti D_1 e D_2 sono allora gli unici comuni a $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$, mentre, per ipotesi, esse hanno almeno tre punti in comune dati da 0_1, 0_2, 0_3. Ne segue l'asserto.

VI. *Due delle tre cubiche non possono avere una conica come componente comune.*

Dimostrazione. Se esistesse una tale conica, essa sarebbe non degenere (cfr. proposizione V) e di punti doppi per la $\mathscr{C}^{q+3}$ e ciò è escluso dal corollario II.

Proviamo ora che:

VII. *La $\mathscr{C}_i$ ha doppio il punto O_i e passa per gli altri due punti fondamentali. Inoltre i punti, in γ_q, comuni a due delle $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, appartengono anche all'altra e quindi i punti doppi, in γ_q, della $\mathscr{C}^{q+3}$ sono tutti e soli i punti comuni a due qualsiasi delle $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.*

Dimostrazione. Manifestamente la $\mathscr{C}_i$ passa per 0_1, 0_2, 0_3 ed ha 0_i *almeno* doppio (cfr. 3.3). 0_i non può essere triplo, altrimenti, come subito si verifica dalla (2.1) in cui si tenga conto delle (2.4), la $\mathscr{C}^{q+3}$ avrebbe 0_i triplo e ciò è escluso.

Sia $Y = (y_1, y_2, y_3)$ un punto, in γ_q, comune a $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ e diverso da 0_1 e 0_2. Se $y_3 \neq 0$, per il teorema di EULERO sulle forme, si ha che Y appartiene anche alla $\mathscr{C}_3$ (dovendo essere $f(Y) = 0$, $(\partial f/\partial x_1)_Y = (\partial f/\partial x_2)_Y = 0$). Se $y_3 = 0$ la retta $0_1 0_2$ appartiene sia a $\mathscr{C}_1$ sia a $\mathscr{C}_2$ (in quanto essa ha in comune con $\mathscr{C}_1$, ad esempio, il punto 0_1, doppio, e i punti Y e 0_2 tra loro distinti) ma quest'ultimo caso è escluso dalla proposizione V.

Siamo ora in grado di provare che:

VIII. *Una $\mathscr{C}^{q+3}$ può avere, al più sette punti doppi in γ_q.*

Dimostrazione. In forza della proposizione VII, i punti doppi, in γ_q, di una $\mathscr{C}^{q+3}$, che abbia doppi i punti fondamentali, sono tutti e soli quelli comuni a $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$. Queste cubiche non hanno componenti in comune, per le proposizioni V e VI, e quindi hanno *nove* punti comuni in Γ_q. Ma $\mathscr{C}_1$ passa per 0_2 che è doppio per $\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_2$ passa per 0_1 che è doppio per $\mathscr{C}_1$. Ne segue che sono al più *sette* i punti *distinti* che $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ hanno in comune in Γ_q e quindi in γ_q.

4. - Riducibilità completa di una $\mathscr{C}^{q+3}$ in γ_q e proprietà delle sue componenti.

Sia $f = 0$ l'equazione di una $\mathscr{C}^{q+3}$ (invadente $S_{2,q}$, priva di componenti rettilinee in γ_q e i cui punti, in γ_q, siano al più doppi). Cominciamo a provare che:

IX. *Decomponendo f in fattori irriducibili in Γ_q, ciascuno di essi è a coefficienti in γ_q, cioè il campo di riducibilità completo di f coincide con γ_q.*

Dimostrazione. Siano $f_1, f_2, \ldots, f_h$ i fattori, irriducibili in Γ_q, in cui si decompone il polinomio f. Supponiamo, per assurdo, che uno di essi f_i, abbia coefficienti in una estensione algebrica di grado $s \geqslant 2$ di γ_q (e non in γ_q). Sia f_i di grado n; i polinomi coniugati di f_i in tale estensione devono essere fattori di f. Quindi f si scompone nel prodotto di due fattori, in γ_q, di cui uno, F è il prodotto di f_i e dei suoi coniugati ed ha grado ns; il rimanente G ha grado $q+3-ns$. La curva $f=0$ si spezza nelle curve di equazioni $F=0$ e $G=0$, ambedue a coefficienti in γ_q. Sia r una retta, in γ_q, che non contenga punti multipli della $\mathscr{C}^{q+3}$ in γ_q; ve ne sono certamente di tali rette perchè la $\mathscr{C}^{q+3}$ può ammettere solamente punti doppi costituenti un k-arco (cfr. n. **2**) e questo ammette sempre una retta esterna.

La r non ha punti in γ_q comuni con $F=0$ perchè, se esistesse un tale punto, esso apparterebbe a ciascuna delle s componenti, tra loro coniugate, di $F=0$ e perciò sarebbe s-plo, almeno, per la $F=0$ e quindi multiplo per la $\mathscr{C}^{q+3}$, ma ciò è contro le ipotesi fatte su r. I $q+1$ punti, in γ_q, di r appartengono quindi tutti alla curva di equazione $G=0$. Ne segue che l'ordine di $G=0$ è maggiore o uguale a $q+1$ cioè:

$$q+3-ns \geqslant q+1, \qquad \text{ossia:} \qquad ns \leqslant 2\,.$$

Poichè $s \geqslant 2$ si ha che deve essere $n=1$ e $s=2$. Dunque la curva di equazione $F=0$ si spezza in due rette complesse coniugate in un ampliamento quadratico di γ_q. Sia D l'unico punto, in γ_q, di $F=0$, cioè il punto d'intersezione delle suddette due rette.

Sia d una retta per D; essa è bitangente alla $\mathscr{C}^{q+3}$ in D ed in un altro punto D_1. Sia P un punto di d, in γ_q, diverso da D e da D_1 e t la tangente in P alla $\mathscr{C}^{q+3}$; la t non passa, evidentemente, per D ed è bitangente alla $\mathscr{C}^{q+3}$ in P ed in un altro punto P_1, anch'esso in γ_q. Poichè la t non ha punti in comune con la $F=0$ in γ_q, si ha che essa è bitangente alla $G=0$ in P e P_1 e quindi ha in comune con essa $q+3$ punti. Ciò è assurdo perchè, in tal caso, la $G=0$ (che ha grado minore di $q+3$) conterrebbe la retta t che apparterrebbe allora anche alla $\mathscr{C}^{q+3}$.

Dimostriamo ora che:

X. *Due qualsivoglia componenti della $\mathscr{C}^{q+3}$ (necessariamente a coefficienti in γ_q per la prop.* IX) *non hanno punti comuni in γ_q.*

D i m o s t r a z i o n e. Ragionando per assurdo, supponiamo che esistano due componenti della $\mathscr{C}^{q+3}$ (di equazione $f=0$) aventi un punto D in comune, in γ_q. La $\mathscr{C}^{q+3}$ si può allora decomporre in due curve, a coefficienti in γ_q, $\mathscr{C}^m$ e $\mathscr{C}^n$ passanti per D, con $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ ed $m+n=q+3$. Il punto D è doppio per la $\mathscr{C}^{q+3}$ e quindi è semplice sia per $\mathscr{C}^m$ che per $\mathscr{C}^n$. Le tangenti t_1 e t_2 in D rispettivamente a $\mathscr{C}^m$ e $\mathscr{C}^n$ sono distinte (altrimenti D sarebbe necessariamente almeno tacnodale per la $\mathscr{C}^{q+3}$ e la $t_1=t_2$ la intersecherebbe in $q+4$ punti, il che è escluso). Sia r una qualsivoglia retta di $S_{2,q}$ per D. Essa non appartiene alla $\mathscr{C}^{q+3}$ e la interseca un $q+3$ punti dei quali $q+1$ sono i punti distinti di r in γ_q; dei rimanenti due, uno coincide con D e l'altro dovrà allora coincidere con uno dei suddetti $q+1$ punti. Per la r si possono allora presentare i seguenti casi:

(4.1) *la r è tangente alla $\mathscr{C}^m$ (in D o altrove)*;

(4.2) *la r è tangente alla $\mathscr{C}^n$ (in D o altrove)*;

(4.3) *la r passa per un altro punto doppio, in γ_q, di $\mathscr{C}^{q+3}$ appartenente a $\mathscr{C}^m$ ma non a $\mathscr{C}^n$*;

(4.4) *la r passa per un altro punto doppio, in γ_q, di $\mathscr{C}^{q+3}$ appartenente a $\mathscr{C}^n$ ma non a $\mathscr{C}^m$*;

(4.5) *la r passa per un altro punto doppio di $\mathscr{C}^{q+3}$ appartenente $\mathscr{C}^m \cap \mathscr{C}^n$.*

Siano h e k, rispettivamente, il numero dei punti, in γ_q, distinti che la r ha in comune con la $\mathscr{C}^m$ e $\mathscr{C}^n$, onde si ha:

$$h+k=q+1\,. \tag{4.6}$$

Se r presenta il caso (4.1) o (4.3) risulta manifestamente:

$$h+1\leqslant m\,,\qquad k\leqslant n\,. \tag{4.7}$$

Se fosse $h+1<m$, $k<n$, cioè $h+1\leqslant m-1$, $k\leqslant n-1$ si avrebbe $h+k+1\leqslant \leqslant m+n-2$ e ciò è assurdo per la (4.6) ed essendo $m+n=q+3$. Dunque dalla (4.7) si hanno le seguenti due possibilità:

$$h+1=m\,,\qquad k\leqslant n\,, \tag{4.8}$$

$$h+1\leqslant m-1\,,\qquad k=n\,. \tag{4.9}$$

Nel caso (4.8) non può essere $k=n$ altrimenti si avrebbe $h+k+1= =m+n=q+3$ e ciò è assurdo per la (4.6). Nè può essere $k\leqslant n-2$ altrimenti si avrebbe $h+k+1\leqslant m+n-2=q+1$ e ciò è assurdo per la (4.6). Dovrà allora aversi:

$$h=m-1\,,\qquad k=n-1\,. \tag{4.10}$$

Nel caso (4.9) non può essere $h+1<m-1$ altrimenti si avrebbe $h+k+ +1<m+n-1=q+2$ e ciò è assurdo per la (4.6). Dovrà dunque essere:

$$h=m-2\,, \qquad k=n\,. \tag{4.11}$$

Se la r presenta il caso (4.2) o (4.4) ragionando in modo del tutto analogo si ha per h e k la (4.10) ovvero la

$$h=m\,, \qquad k=n-2\,. \tag{4.12}$$

Se la r presenta il caso (4.5) risulta manifestamente:

$$h\leqslant m\,, \qquad k\leqslant n\,. \tag{4.13}$$

Se fosse $h\leqslant m-1$, $k\leqslant n$ ragionando in modo analogo a quanto fatto in precedenza si ha per h e k la (4.10) o la (4.11). Analogamente se fosse $h\leqslant m$ e $k\leqslant \leqslant n-1$ si avrebbe le (4.10) o (4.12). Rimane dunque da esaminare il caso $h=m$ e $k=n$ da cui segue $h+k=m+n=q+3$ che è assurdo per la (4.6). Concludendo, qualunque sia la retta r per D, per h e k si possono presentare soltanto i casi (4.10), (4.11) e (4.12).

Siano ora a, b, c rispettivamente il numero delle rette per D ciascuna delle quali intersechi $\mathscr{C}^m$ e $\mathscr{C}^n$ in un numero di punti dato da (4.10), (4.11), (4.12). Siano poi M e N rispettivamente il numero di punti, in γ_q, della $\mathscr{C}^m$ e della $\mathscr{C}^n$. Poichè $D\in\mathscr{C}^m\cap\mathscr{C}^n$, si ha:

$$\begin{cases} M-1=(m-2)a+(m-3)b+(m-1)c \\ N-1=(n-2)a+(n-1)b+(n-3)c\,. \end{cases} \tag{4.14}$$

Sommando le (4.14) membro a membro si ottiene:

$$M+N-2=(m+n-4)(a+b+c)\,. \tag{4.15}$$

Tenuto conto che $M+N\geqslant q^2+q+2$ (in quanto se $s\geqslant 1$ è il numero dei punti, in γ_q, comuni a $\mathscr{C}^m$ e $\mathscr{C}^n$, si ha: $M+N>M+N-s=q^2+q+1$), $m+n=q+3$ e $a+b+c=q+1$, si ha l'assurdo. Ne segue l'asserto.

5. - Esempi di $\mathscr{C}^{q+3}$ con cinque punti doppi in γ_q.

Proviamo la seguente proposizione:

XI. *Esistono $\mathscr{C}^{q+3}$ in $S_{2,q}$ (che non contengono componenti rettilinee in γ_q), per $q > 9$, con cinque punti doppi in γ_q.*

Dimostrazione. Essendo $q > 9$ esiste certamente in γ_q un elemento θ tale che:

$$\theta \neq 0, 1, 2, 3, 4\,; \quad 5\theta^2 - 30\theta + 36 \neq 0\,, \quad 2\theta^2 - 9\theta + 6 \neq 0\,. \tag{5.1}$$

Si consideri la curva di equazione:

$$\begin{aligned}[x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + (5-\theta)x_2x_3](x_1^q x_2 - x_1 x_2^q) +\\ + [(5-\theta)x_1^2 - \theta x_1x_2 + (1-\theta)x_1x_3 + \theta x_2x_3](x_2^q x_3 - x_2 x_3^q) +\\ + [(6-3\theta)x_2^2 - x_1x_2 + \theta x_1x_3 + x_2x_3](x_1 x_3^q - x_1^q x_3) = 0\,.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Essa, come subito si verifica, ha doppi i punti fondamentali, il punto unitario $U(1, 1, 1)$ e il punto $D[\theta(\theta-2), \theta(\theta-4), (\theta-2)(\theta-4)]$ che è distinto dai precedenti per la (5.1). Inoltre la (5.2) non ammette *componenti rettilinee* a coefficienti in γ_q. Non contiene infatti nessuna retta di equazione $x_1 = kx_3$ ($K \in \gamma_q$) perchè, sostituendo nella (5.2) e imponendo che sia una identità, si avrebbe $\theta = 0$ oppure $\theta = 3$ e ciò è contro l'ipotesi (5.1) fatte su θ. Neppure ne contiene una di equazione $x_2 = mx_1 + nx_3$ ($m, n \in \gamma_q$) perchè sostituendo nella (5.2) e imponendo che si abbia una identità si avrebbe o $\theta = 1$, o $\theta = 4$, o $5\theta^2 - 30\theta + 36 = 0$ oppure $2\theta^2 - 9\theta + 6 = 0$ e ciò è escluso per la (5.1).

6. - Esame delle $\mathscr{C}^{q+3}$, invadenti il piano $S_{2,q}$ e senza componenti rettilinee, per $q = 2$ e $q = 3$.

Esaminiamo il caso $q = 2$, provando che:

XII. *Una $\mathscr{C}^{q+3} = \mathscr{C}^5$ di $S_{2,2}$ (invadente l'$S_{2,2}$ e priva di componenti rettilinee), con almeno due punti doppi in γ_2, è irriducibile in Γ_2. Ne esistono di riducibili con un punto doppio o senza. Una $\mathscr{C}^5$ irriducibile in Γ_2 ha al massimo tre punti doppi in γ_2 ed esistono di siffatte $\mathscr{C}^5$.*

Dimostrazione, Una $\mathscr{C}^5$ riducibile di $S_{2,2}$, senza componenti rettilinee, si può spezzare soltanto in una cubica e una conica irriducibili, prive di punti in comune in γ_2 (cfr. prop. X); la cubica può avere al più un punto doppio mentre la conica ne è priva; ne segue la prima parte della proposizione. Esempi di $\mathscr{C}^5$ *riducibili* con un solo punto doppio o senza punti doppi sono rispettivamente i seguenti:

$$(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_2^2x_3+x_1x_2x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2)=0 \tag{6.1}$$

e

$$(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_1x_2x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2)=0\,. \tag{6.2}$$

Non esistono $\mathscr{C}^5$, prive di componenti rettilinee, con *quattro* punti doppi in $S_{2,2}$ come subito si verifica imponendo che l'equazione (2.1), nel caso attuale $q=2$, abbia quattro punti doppi.

Un esempio di $\mathscr{C}^5$ *irriducibile* con *tre* punti doppi è il seguente:

$$\begin{aligned}x_1^3x_2^2+x_1^2x_2^3+(x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^2x_2^2)x_3&+\\+(x_1^3+x_2^3)x_3^2+(x_1^2+x_2^2+x^{1}x_2)x_3^3&=0\,.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Per ulteriori dettagli sulle $\mathscr{C}^5$ invadenti l'$S_{2,2}$ si confronti [**1**]$_3$.

Esaminiamo il caso $q=3$. In $S_{2,3}$ una $\mathscr{C}^{q+3}=\mathscr{C}^6$, (invadente l'$S_{2,3}$ e priva di componenti rettilinee), può avere al più $q+1=4$ punti doppi in γ_3 (cfr. n. **2**).

Proviamo che:

XIII. *Una $\mathscr{C}^6$ di $S_{2,3}$ (invadente l'$S_{2,3}$ e priva di componenti rettilinee), se è riducibile, necessariamente deve spezzarsi in una conica non degenere ed una quartica irriducibile non razionale o in due cubiche ambedue ellittiche. Ne segue* (cfr. anche prop. X)*che se la $\mathscr{C}^6$ ha almeno tre punti doppi in γ_3, essa è irriducibile.*

Dimostrazione. Supponiamo la $\mathscr{C}^6$ riducibile (necessariamente in γ_3, cfr. prop. IX). Essa allora *non può spezzarsi in tre coniche* (non degeneri) in quanto altrimenti i punti della $\mathscr{C}^6$, in γ_3, sarebbero 12 (poichè ogni conica possiede $q+1=4$ punti in γ_3 e tali coniche non hanno a due a due punti in comune in γ_3, cfr. prop. X), mentre la $\mathscr{C}^6$ contiene tutti i 13 punti del piano.

Supponiamo che la $\mathscr{C}^6$ si spezzi in due cubiche irriducibili C_1^3 e C_2^3. Se una di esse, per esempio la C_1^3 fosse razionale si avrebbe $|C_1^3|_{\gamma_3}\leqslant 5$ (ricordiamo che una cubica razionale di $S_{2,q}$ possiede q, $q+1$, $q+2$ punti, in γ_q, a seconda che il suo punto doppio sia nodale, cuspidale, isolato). Per l'altra cubica si avrebbe $|C_2^3|_{\gamma_3} \leqslant 7$ (in quanto, detto N il numero dei punti di una cubica ellittica di $S_{2,q}$, si ha, per la formula di HASSE-WEIL, $N \leqslant (\sqrt{q}+1)^2$, onde se C_2^3 è ellittica risulta $|C_2^3|_{\gamma_3} \leqslant 7$, se è razionale $|C_2^3|_{\gamma_3} \leqslant 5$).

Poichè $|C_1^3 \cap C_2^3|_{\gamma_3} = 0$ (cfr. prop. X) si avrebbe $|\mathscr{C}^6|_{\gamma_3} \leqslant 12$ mentre $|\mathscr{C}^6|_{\gamma_3} = 13$.

Si è così provato che: *se la $\mathscr{C}^6$ si spezza in due cubiche irriducibili, esse debbono essere ambedue ellittiche.* Rimane da esaminare il caso in cui la $\mathscr{C}^6$ si spezzi in una conica C^2 e una quartica C^4 irriducibili. Se la C^4 fosse razionale si avrebbe $|C^4|_{\gamma_3} \leqslant 7$ (ricordiamo che una quartica razionale di $S_{2,q}$ ha, al massimo $(q+1)+3$ punti in γ_q). Poichè $|C^2 \cap C^4|_{\gamma_3} = 0$ (cfr. prop. X) si avrebbe $|\mathscr{C}^6|_{\gamma_3} \leqslant 11$ mentre $|\mathscr{C}^6|_{\gamma_3} = 13$. Si è così provato che *se la $\mathscr{C}^6$ si spezza in una conica e una quartica irriducibili, la quartica non può essere razionale.* Ne segue l'asserto.

XIV. *Esistono $\mathscr{C}^6$, irriducibili in Γ_3, con quattro o con tre punti doppi in γ_3.*

Dimostrazione. La $\mathscr{C}^6$ di equazione:

$$(x_3^2 + x_1x_2 - x_2x_3)(x_1^3x_2 - x_1x_2^3) + (-x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_2^3x_3 - x_2x_3^3) + \\ + (x_2^2 - x_1x_3 + x_2x_3)(x_1x_3^3 - x_1^3x_3) = 0 .$$

ha come doppi i punti fondamentali e il punto unitario. Essa è *irriducibile* in quanto se fosse riducibile, per la proposizione XIII, dovrebbe contenere una retta, mentre, come si prova facilmente, essa non ne possiede.

La $\mathscr{C}^6$ di equazione:

$$(8.5) \qquad (x_1x_2 + x_1x_3)(x_1^3x_2 - x_1x_2^3) + x_2x_3(x_2^3x_3 - x_2x_3^3) + \\ + (x_1x_3 + x_2x_3)(x_1x_3^3 - x_1^3x_3) = 0$$

ha come *doppi* soltanto i punti fondamentali. Essa è irriducibile (cfr. prop. XIII) non contenendo componenti rettilinee in γ_3. Infatti se contenesse una retta di equazione $x_1 = kx_3$ $(k \in \gamma_3)$, dovrebbe aversi $k^2 = -1$ che è assurdo e se ne contenesse una di equazione $x_2 = mx_1 + nx_3$ $(m, n \in \gamma_3)$ dovrebbe aversi $m = 1 \pm \sqrt{-1}$ e ciò è escluso essendo $-1 \neq \square$ in γ_3.

Bibliografia.

[1] O. FERRI: [•]$_1$ *Sulle quintiche irriducibili con un punto triplo che invadono un piano di Galois $S_2\gamma_2$*, Rend. Accad. Soc. Naz. Sci. Lettere Arti Napoli (4) **35** (1968), 413-420; [•]$_2$ *Intorno alle $\mathscr{C}^{q+3}$ irriducibili con un punto triplo che invadono un piano di Galois S_{2q}*, Rend. Accad. Soc. Naz. Sci. Lettere Art. Napoli (4) **36** (1969); [•]$_3$ *Quintiche irriducibili con il massimo numero di punti doppi invadenti un piano lineare finito di ordine due*, Ann. Univ. L'Aquila **4** (1970).

[2] B. Segre, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[3] G. Tallini: [•]$_1$ *Le ipersuperfici irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8) **30** (1961), 706-712; [•]$_2$ *Sulle ipersuperfici irriducibili d'ordine minimo che contengono tutti i punti di uno spazio di Galois* $S_{r,q}$, Rend. Mat. (3-4) **20** (1961), 431-479; [•]$_3$ *Intorno alle forme di uno spazio di Galois ed agli spazi subordinati giacenti su esse*, Rend. Accad. Naz. Lincei (8) **33** (1962), 421-428.

Riassunto.

Si studiano le curve C^{q+3}, *d'ordine* $q+3$, *di un piano* $S_{2,q}$ *su un campo di Galois* γ_q, *che contengono tutti i punti di* $S_{2,q}$. *In relazione ai punti multipli che una tale curva può avere in* γ_q *(osservato che, se la* C^{q+3} *possiede, in* γ_q, *un punto* P *di molteplicità* $s \geqslant 4$ *essa è riducibile nel fascio di rette di centro* P *ed in una ulteriore conica) si prova che, se la* C^{q+3} *non contiene rette in* γ_q, *essa o possiede un solo punto triplo ovvero contiene, al più, sette punti doppi. Si dimostra poi che il campo di riducibilità completo di una* C^{q+3} *(che non contenga rette in* γ_q*) coincide con* γ_q *e che le sue componenti sono, a due a due, prive di punti in comune in* $S_{2,q}$. *Si danno poi esempi al riguardo; infine vengono esaminati dettagliatamente i casi* $q=2$, $q=3$.

* * *