Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 177-186

FRANCO TRICERRI (*)

Connessioni lineari e metriche hermitiane sopra varietà dotate di due strutture quasi complesse. (**)

Premessa.

Data una varietà differenziabile di dimensione $2n$ (con $n \geqslant 2$), dotata di *due strutture quasi complesse* J_1 e J_2 (1) *linearmente indipendenti* su R (cioè $J_1 \neq \pm J_2$), si studia l'esistenza di *connessioni lineari* ∇ *quasi complesse* rispetto a J_1 e J_2, tali cioè che $\nabla J_1 = \nabla J_2 = 0$.

Si prova in particolare che, se la sottoalgebra $\mathscr{A}$ di $\mathscr{D}_1^1$ generata da J_1 e J_2 è di dimensione 4, tali connessioni esistono e si stabilisce per esse un teorema di rappresentazione.

Infine si studia il problema dell'esistenza di *metriche hermitiane* h rispetto a J_1 e J_2.

1. – Per determinare l'esistenza di connessioni lineari ∇ quasi complesse rispetto a J_1 e J_2, è opportuno considerare alcuni endomorfismi di $\mathscr{D}_2^1$, dipen-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 1-X-1974.

(1) Se con F indichiamo l'algebra sui reali delle funzioni di classe C^∞ definite su M a valori reali, e con $\mathscr{D}_s^r$ l'F-modulo dei campi tensoriali r volte controvarianti ed s volte covarianti, allora una struttura quasi complessa J è un elemento di $\mathscr{D}_1^1$ *antiinvolutorio*, cioè $J^2 = -I$, dove $I \in \mathscr{D}_1^1$ è l'identità.

Ved. ad es. S. KOBAYASHI e K. NOMIZU [1], vol. II, p. 121.

denti da J_1 e J_2, così definiti ([2]):

$$\lambda_i(L)(X, Y) = J_i(L(X, Y)), \tag{1.1}$$

$$W_i(L)(X, Y) = -J_i(L(X, J_i(Y))), \tag{1.2}$$

$$O_i = \tfrac{1}{2}(I + W_i), \tag{1.3}$$

$$O_i^* = I - O_i = \tfrac{1}{2}(I - W_i) \text{ } ([3]), \tag{1.4}$$

per $i = 1, 2$ e per ogni X e Y di $\mathscr{D}_0^1$ ed ogni L di $\mathscr{D}_2^1$.

Essi godono delle seguenti proprietà ([4]):

P$_1$. *Gli automorfismi λ_i sono antiinvolutori, mentre gli automorfismi W_i sono involutori. Inoltre λ_i commuta col rispettivo W_i.*

P$_2$. *Gli omomorfismi O_i ed O_i^* sono idempotenti, commutano con i rispettivi λ_i e W_i e valgono le seguenti relazioni*:

$$O_i O_i^* = O_i^* O_i = 0 . \tag{1.5}$$

Se poi l'algebra $\mathscr{A}$ generata da J_1 e da J_2 è di dimensione 4, cioè se vale una delle seguenti identità ([5]):

$$J_1 J_2 = J_2 J_1 , \tag{1.6}$$

$$J_1 J_2 + J_2 J_1 = \alpha I , \tag{1.7}$$

dove α è un numero reale arbitrario, si hanno le seguenti proprietà:

P$_3$. *Se vale la* (1.6), *cioè se J_1 e J_2 commutano, gli endomorfismi λ_1, λ_2, W_1, W_2 commutano tra loro; in particolare si ha*:

$$O_2^* O_1 = O_1 O_2^* ; \qquad O_1^* O_2 = O_2 O_1^* . \tag{1.8}$$

([2]) Ved. G. B. Rizza [**2**]; K. Yano [**4**], p. 133.

([3]) In generale se Ω è un endomorfismo di un A-modulo M, con Ω^* indicheremo l'endomorfismo $I - \Omega$.

([4]) Ved. G. B. Rizza [**2**]; K. Yano [**4**], p. 133.

([5]) Ved. F. Tricerri [**3**].

P$_4$. *Se vale la* (1.7) *si ha:*

$$(1.9)\qquad (O_2^* O_1)^2 = \frac{4-\alpha^2}{4} O_2^* O_1 \,.$$

La proprietà **P$_3$** è ovvia. Per stabilire la **P$_4$** occorre osservare che dalle definizioni di O_2^* ed O_1 segue:

$$O_2^* O_1 = \frac{1}{4}(I - W_2)(I + W_1) = \frac{1}{4}(I + W_1 - W_2 - W_2 W_1)$$

e quindi

$$(O_2^* O_1)^2 = \frac{3}{4} O_2^* O_1 + \frac{1}{16}(W_2 W_1 W_2 W_1 + W_2 W_1 W_2 - W_1 W_2 W_1 - W_1 W_2) \,.$$

Tenendo presente la (1.7), le definizioni e le proprietà degli omomorfismi W_i e λ_i $(i = 1, 2)$, si possono stabilire le relazioni:

$$(1.10)\qquad W_1 W_2 = W_2 W_1 - \alpha W_2 \lambda_2 W_1 \lambda_1 - \alpha \lambda_2 \lambda_1 + \alpha^2 I \,,$$

$$(1.11)\qquad \lambda_1(W_2 \lambda_2) = (W_2 \lambda_2)\lambda_1 \,; \qquad \lambda_2(W_1 \lambda_1) = (W_1 \lambda_1)\lambda_2 \,.$$

Da queste, con calcolo diretto, segue senza difficoltà la (1.9).

Osserviamo che se $\alpha^2 \neq 4$, l'omomorfismo $(4/(4-\alpha^2))\,O_2^* O_1$ è *idempotente*, mentre se è $\alpha^2 = 4$, l'omomorfismo $O_2^* O_1$ è *nilpotente*, cioè si ha $(O_2^* O_1)^2 = 0$.

Infine conviene segnalare le seguenti relazioni, conseguenza immediata della (1.7), che saranno utili in seguito:

$$(1.12)\qquad J_1 J_2 J_1 = \alpha J_1 + J_2 \,; \qquad J_2 J_1 J_2 = \alpha J_2 + J_1 \,,$$

$$(1.13)\qquad J_1 J_2 J_1 J_2 = \alpha J_1 J_2 - I \,; \qquad J_2 J_1 J_2 J_1 = \alpha J_2 J_1 - I \,.$$

2. – Supponiamo ora M dotata di connessioni lineari, allora, come è noto [6], si ha:

P$_5$. *Per ogni connessione lineare* ∇ *si ha sempre*:

$$(2.1)\qquad O_i(\nabla J_i) = 0$$

(6) Ved. p. es. G. B. Rizza [**2**]$_2$, cond. $\overline{\mathrm{A}}_1$ e osservazione alla fine di p. 169.

cioè:

$$O_i^*(\nabla J_i) = J_i\,, \tag{2.2}$$

dove ∇J_i *è il differenziale covariante di* J_i, *per* $i = 1, 2$.

Sussiste pure la proprietà:

P$_6$. *Se vale la* (1.6) *si ha*:

$$(\lambda_1 O_1^*)(\nabla J_2) = (\lambda_2 O_2^*)(\nabla J_1), \tag{2.3}$$

mentre se vale la (1.7):

$$(\lambda_1 O_1)(\nabla J_2) + (\lambda_2 O_2)(\nabla J_1) = 0\,. \tag{2.4}$$

La (2.3) si ottiene applicando la differenziazione covariante ∇ alla (1.6) e tenendo presenti le definizioni di O_1^*, O_2^*, λ_1, λ_2. Analogamente si prova la (2.4) utilizzando la (1.7).

Proviamo ora il seguente teorema:

T$_1$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una connessione lineare* ∇ *quasi complessa rispetto a* J_1 *ed a* J_2, *è che esista un* L *di* $\mathscr{D}_2^1$ *tale che*:

$$O_2^* O_1(L) = \tfrac{1}{2}\{(O_2^* \lambda_1)(\overset{0}{\nabla} J_1) - \lambda_2(\overset{0}{\nabla} J_2)\} \tag{2.5}$$

dove $\overset{0}{\nabla}$ *è una generica connessione lineare.*

È noto (7) che tutte e sole le connessioni lineari ∇ quasi complesse rispetto a J_1 si possono scrivere come segue:

$$\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y - \tfrac{1}{2}\lambda_1(\overset{0}{\nabla} J_1)(X, Y) + O_1(L)(X, Y) \tag{2.6}$$

dove $\overset{0}{\nabla}$ è un'arbitraria connessione lineare, ed L un elemento arbitrario di $\mathscr{D}_2^1$. Si ha quindi $\nabla J_2 = 0$ *se e solo se*:

$$(\overset{0}{\nabla} J_2)(X, Y) - \tfrac{1}{2}\lambda_1(\overset{0}{\nabla} J_1)(X, J_2(Y)) + \tfrac{1}{2}J_2\big(\lambda_1(\overset{0}{\nabla} J_1)(X, Y)\big) +$$
$$+ O_1(L)(X, J_2(Y)) - J_2\big(O_1(L)(X, Y)\big) = 0$$

per ogni X e Y di $\mathscr{D}_0^1$.

---

(7) Ved. K. Yano [4], pp. 135-136.

Applicando J_2 ad ambo i membri e tenute presenti le definizioni di λ_2 e di O_2^*, deve essere:

$$\lambda_2(\overset{0}{\nabla} J_2) - O_2^*(\lambda_1(\overset{0}{\nabla} J_1)) + 2\, O_2^*(O_1(L)) = 0$$

per un L opportuno, che è la (2.5).

Conviene ora notare che, per ottenere tutte le connessioni lineari quasi complesse rispetto a J_1, è sufficiente nella (2.6) fissare una arbitraria connessione $\overset{0}{\nabla}$ e fare variare il campo tensoriale L.

Nel seguito è opportuno scegliere come $\overset{0}{\nabla}$ una qualunque connessione lineare $\overset{1}{\nabla}$ quasi complessa rispetto a J_1 [8].

Con tale scelta la condizione (2.5) si riduce semplicemente alla

$$O_2^* O_1(L) = -\tfrac{1}{2} \lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2), \tag{2.7}$$

che verrà utilizzata in seguito.

3. – Ci limiteremo, in questo numero, a considerare il caso in cui J_1 e J_2 generano una sottoalgebra $\mathscr{A}$ di $\mathscr{D}_1^1$ di dimensione 4, cioè quando vale la (1.6) o la (1.7).

Allora vale il seguente teorema di rappresentazione:

T$_2$. *Sia M una varietà differenziabile dotata di due strutture quasi complesse J_1 e J_2 che commutano, allora tutte e sole le connessioni lineari ∇ quasi complesse rispetto a J_1 ed a J_2 sono rappresentate da:*

$$\nabla = \overset{1}{\nabla} - \tfrac{1}{2}(O_1 \lambda_2)(\overset{1}{\nabla} J_2) + O_2 O_1(E)\,. \tag{3.1}$$

Mentre se J_1 e J_2 soddisfano alla (1.7), con $\alpha^2 \neq 4$, sono rappresentate da:

$$\nabla = \overset{1}{\nabla} - \frac{2}{4-\alpha^2}(O_1 \lambda_2)(\overset{1}{\nabla} J_2) + O_1\left(I - \frac{4}{4-\alpha^2} O_2^* O_1\right)(E)\,, \tag{3.2}$$

dove $\overset{1}{\nabla}$ è una generica connessione lineare quasi complessa rispetto a J_1, ed E un elemento arbitrario di $\mathscr{D}_2^1$.

---

[8] Per l'esistenza di tale connessione basta utilizzare la (2.6).

Occorre, in entrambi i casi, cercare la generica soluzione della (2.7) in $\mathscr{D}^1_2$. Per fare ciò basta osservare che nel primo caso $O^*_2 O_1$ è *idempotente*, mentre nel secondo caso $(4/(4-\alpha^2))O^*_2 O_1$ è *idempotente*.

Per un noto lemma algebrico (9), la (2.7) ammette soluzioni in $\mathscr{D}^1_2$ se e solo se:

$$O^*_2\, O_1\left(-\frac{1}{2}\lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2)\right) = -\frac{1}{2}\lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2) \tag{3.3}$$

nel primo caso.

Mentre nel secondo caso la soluzione esiste se e solo se:

$$\frac{4}{4-\alpha^2} O^*_2\, O_1\left(-\frac{1}{2}\lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2)\right) = -\frac{1}{2}\lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2)\,. \tag{3.4}$$

Ora la (3.3) è sempre verificata per qualunque connessione $\overset{1}{\nabla}$. Infatti, ricordando le proprietà $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_5$ e $\mathbf{P}_6$, si ha:

$$O^*_2 O_1(\lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2)) = \lambda_2 O_1 O^*_2(\overset{1}{\nabla} J_2) = \lambda_2 O_1(\overset{1}{\nabla} J_2) =$$
$$= -\lambda_2 O^*_1(\nabla J_2) + \lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2) = \lambda_2\lambda_1\lambda_2 O^*_2(\overset{1}{\nabla} J_1) + \lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2) = \lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2),$$

dato che, per ipotesi, $\overset{1}{\nabla} J_1 = 0$.

Pure la (3.4) è sempre verificata; infatti è:

$$4(O^*_2 O_1 \lambda_2)(\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y) = J_2((\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y)) - J_1 J_2((\overset{1}{\nabla} J_2)(X, J_1(Y))) -$$
$$-(\overset{1}{\nabla} J_2)(X, J_2(Y)) - J_2 J_1 J_2(\overset{1}{\nabla} J_2)(X, J_1 J_2(Y))$$

per ogni $X, Y \in \mathscr{D}^1_0$. Questa uguaglianza, tenute presenti le proprietà $\mathbf{P}_5$ e $\mathbf{P}_6$ e l'ipotesi $\overset{1}{\nabla} J_1 = 0$, diviene

$$4(O^*_2 O_1 \lambda_2)(\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y) =$$
$$= 2J_2((\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y)) + J_1 J_2 J_1((\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y)) - J_2 J_1 J_2 J_1 J_2((\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y))\,.$$

---

(9) Ved. K. YANO [4], p. 133.

Tenuto conto infine delle (1.12) e (1.13) ed osservando che:

$$J_2 J_1 J_2 J_1 J_2 = \alpha^2 J_2 + \alpha J_1 - J_2 ,$$

si ottiene:

$$4(O_2^* O_1 \lambda_2)(\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y) = (4 - \alpha^2)\lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2)(X, Y),$$

che è la (3.4).

Per il lemma algebrico, su ricordato, segue che tutte e sole le soluzioni della (2.7) in $\mathscr{D}_2^1$ sono, nel primo caso, del tipo:

$$L = -\tfrac{1}{2}\lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2) + (O_2^* O_1)^*(E) ; \tag{3.5}$$

nel secondo caso, del tipo:

$$L = -\frac{1}{2}\lambda_2(\overset{1}{\nabla} J_2) + \left(\frac{4}{4-\alpha^2} O_2^* O_1\right)^*(E), \tag{3.6}$$

dove $E \in \mathscr{D}_2^1$ è arbitrario.

Tenuta presente la (2.6), segue il teorema.

Conviene concludere osservando che, nel caso $\alpha^2 = 4$, il discorso precedentemente fatto cade. In questo caso resta quindi aperto il problema di determinare un teorema di rappresentazione del tipo del teorema $\mathbf{T}_2$.

4. – Esaminiamo ora, nella sua generalità, il problema dell'esistenza di una *metrica h hermitiana rispetto* a J_1 *ed a* J_2, cioè tale che:

$$h(J_1(X), J_1(Y)) = h(J_2(X), J_2(Y)) = h(X, Y) \tag{4.1}$$

per ogni coppia di campi vettoriali X e Y.

Innanzitutto si ha:

$\mathbf{T}_3$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una metrica hermitiana h rispetto a J_1 ed a J_2, è che esista una metrica g tale che:*

$$g(J_1 J_2(X), J_1 J_2(Y)) = g(J_2 J_1(X), J_2 J_1(Y)) \tag{4.2}$$

per ogni coppia $X, Y \in \mathscr{D}_0^1$.

La condizione è ovviamente necessaria, perchè se esiste una metrica hermitiana h rispetto a J_1 ed a J_2, dalla (4.1) segue che h soddisfa la (4.2).

Inversamente, sia g una metrica che soddisfi alla (4.2). Si consideri la *metrica* h definita da:

$$(4.3) \qquad h(X, Y) = \\ = g(X, Y) + g(J_1(X), J_1(Y)) + g(J_2(X), J_2(Y)) + g(J_1 J_2(X), J_1 J_2(Y))$$

per ogni $X, Y \in \mathscr{D}^1_0$.

È immediato constatare che, in virtù della (4.2), h soddisfa alla (4.1).

Dal teorema ora provato, segue come corollario:

C$_1$. *Se M è una varietà paracompatta, dotata di due strutture quasi complesse J_1 e J_2, che commutano oppure anticommutano* (10), *esiste sempre una metrica hermitiana rispetto a J_1 ed a J_2.*

Invero se M è paracompatta, esiste su N una metrica g (11), e la (5.2) è ovviamente soddisfatta.

Ci si può chiedere ora se esistono metriche hermitiane rispetto a J_1 ed a J_2 anche **nel** caso $J_1 J_2 + J_2 J_1 = \alpha I$.

Se $\alpha^2 < 4$ la risposta è affermativa. Infatti se $\alpha = 0$, siamo nel caso del corollario **C**$_1$, se invece è $\alpha \neq 0$, posto (12):

$$\tilde{J}_1 = J_1; \qquad \tilde{J}_2 = \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{4-\alpha^2}}\right) I + \left(\frac{2}{\sqrt{4-\alpha^2}}\right) J_1 J_2 ,$$

si ha che $\tilde{J}_1$ e $\tilde{J}_2$ sono ancora due strutture quasi complesse che anticommutano, quindi per il corollario **C**$_1$ esiste una metrica hermitiana h rispetto a $\tilde{J}_1$ ed a $\tilde{J}_2$. Avendosi poi

$$J_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{4-\alpha^2})\,\tilde{J}_1 \tilde{J}_2 - \left(\frac{1}{2}\alpha\right) \tilde{J}_1 ,$$

(10) Cioè se $J_1 J_2 \pm J_2 J_1 = 0$.
(11) Ved. S. Kobayashi e K. Nomizu **[1]**, vol. I, p. 60.
(12) Ved. F. Tricerri **[3]**.

si ottiene:

$$h(J_2(X), J_2(Y)) = \frac{1}{4}(4-\alpha^2)\, h(\tilde{J}_1\tilde{J}_2(X), \tilde{J}_1\tilde{J}_2(Y)) +$$

$$+\frac{\alpha}{4}\sqrt{4-\alpha^2}\, h(\tilde{J}_1\tilde{J}_2(X), \tilde{J}_1(Y)) + \frac{\alpha}{4}\sqrt{4-\alpha^2}\, h(\tilde{J}_1(X), \tilde{J}_1\tilde{J}_2(Y)) +$$

$$+\frac{\alpha^2}{4} h(\tilde{J}_1(X), \tilde{J}_1(Y)) = h(X, Y)\,.$$

Dunque h è hermitiana anche rispetto a J_1 ed a J_2.

Se $\alpha^2 \geqslant 4$ la risposta è negativa. Infatti se h è una metrica hermitiana rispetto a J_1 ed a J_2, che soddisfano alla (1.7), si ha sempre:

$$h(J_1(X), J_2(Y)) + h(J_2(X), J_1(Y)) = -\alpha h(X, Y) \tag{4.4}$$

in quanto:

$$h(J_1(X), J_2(Y)) =$$
$$= -h(X, J_1J_2(Y)) = -\alpha h(X, Y) + h(X, J_2J_1(Y)) = -\alpha h(X, Y) - h(J_2(X), J_1(Y)).$$

Segue che, per ogni numero reale λ e per ogni campo vettoriale X, si ha:

$$h(J_1(X) + \lambda J_2(X), J_1(X) + \lambda J_2(X)) = (\lambda^2 - \alpha\lambda + 1)\, h(X, X)\,, \tag{4.5}$$

essendo h definita positiva, se $X \neq 0$, dovrà essere sempre $\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 > 0$ e cioè $\alpha^2 < 4$, altrimenti J_1 e J_2 sarebbero linearmente dipendenti, contro ipotesi.

Possiamo riassumere quanto detto come segue:

T$_4$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una metrica hermitiana rispetto a J_1 ed a J_2, che soddisfano alla* (1.7), *supposto M paracompatta, è che $\alpha^2 < 4$.*

Concludiamo osservando che, se M è una varietà dotata di una struttura quasi complessa J e di una connessione lineare Γ, sul fibrato tangente $T(M)$ della varietà *esistono due strutture quasi complesse J_1 e J_2 che soddisfano alla* (1.7), *senza nessuna limitazione per α* ([13]).

In particolare, se $\alpha^2 \geqslant 4$, si ottengono esempi di varietà con due strutture quasi complesse, sulle quali *non esiste una metrica hermitiana rispetto ad entrambe le strutture.*

([13]) Ved. F. Tricerri [**3**].

Bibliografia.

[1] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, London 1963-1968.

[2] G. B. Rizza: [•]$_1$ *Teoremi di rappresentazione per alcune classi di connessioni su di una varietà quasi complessa*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste (1) **1** (1969), 9-25; [•]$_2$ *Connessioni metriche sulle varietà quasi hermitiane*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste (1) **2** (1969), 163-181.

[3] F. Tricerri, *Sulle varietà dotate di due strutture quasi complesse linearmente indipendenti*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974).

[4] K. Yano, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, New York 1965.

Summary.

Let J_1, J_7 be two linearly indipendent almost complex structures on a differentiable manifold M; we study the existence of linear connections ∇ such that $\nabla J_1 = \nabla J_2 = 0$.

The metrics which are hermitian with respect to J_1, J_2 are also investigated.

* * *