Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 79-87

GIULIA BARBARA MARTINI (*)

Somme cartesiane di n-grafi e loro matrici associate. (**)

1. – È noto che dicesi *grafo orientato* una terna $G=(V, A, f)$ costituita da un insieme V i cui elementi sono detti *vertici*, da un insieme A i cui elementi sono detti *archi* e da un'applicazione f dell'insieme A nell'insieme $V\times V$.

Consideriamo il caso di *grafi orientati finiti*, per i quali è finito sia l'insieme V che l'insieme A.

È noto che per molte questioni è utile rappresentare i grafi finiti mediante matrici.

In particolare posto $V=\{v_1, \dots, v_m\}$, si chiama *matrice associata* ad un grafo G, e si indica con $\|G\|$, la matrice quadrata di ordine $m=|V|$ sull'insieme N_0, il cui generico elemento g_{ij} è dato da:

$$g_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{se non esiste alcun arco } \alpha\in A: f(\alpha)=(v_i, v_j)\in V^2 \\ \eta & \text{se ad } A \text{ appartengono } n \text{ archi } \alpha_1, \dots, \alpha_n: f(\alpha_h)=(v_i, v_j)\,, \\ & \forall h\in\{1, \dots, n\}\,. \end{cases}$$

Due grafi $G=(V, A, f)$ e $G'=(V', A', f')$ si dicono *isomorfi*, e si scrive $G\sim G'$, se esiste un'applicazione biettiva χ di V su V' e un'applicazione biettiva φ di A su A' tale che, denotata con ψ l'applicazione biettiva ψ: $V^2\to V'^2$ tale che

$$(x, y)\xrightarrow{\psi}(\chi(x), \chi(y))$$

(*) Indirizzo: Università degli Studi di Napoli, Facoltà di Architettura, Istituto di Matematica, via Monteoliveto 3, 80134 Napoli, Italia.

(**) Ricevuto: 30-VII-1973.

risulta:

$$f'(\alpha') = \psi(f(\varphi^{-1}(\alpha'))) \qquad \forall \alpha' \in A' .$$

È noto che le matrici associate a due grafi isomorfi sono simili.
Se si ordinano gli elementi di V e di V' in modo che risulti:

$$(v'_i < v'_j) \Leftrightarrow (\chi^{-1}(v'_i) < \chi^{-1}(v'_j)) ,$$

le matrici associate ai due grafi G e G' sono uguali.

2. – Consideriamo la composizione chiamata *somma cartesiana* ([**1**], p. 303) dei grafi definita nel modo seguente:

Definizione 1. Data una famiglia finita di grafi orientati e finiti $(G_i = (V^{(i)}, A^{(i)}, f^{(i)}))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ $(n > 1)$ con

$$\begin{cases} V^{(i)} = \{v_1^{(i)}, \dots, v_{m_i}^{(i)}\} , \\ A^{(i)} = \{\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{r_i}^{(i)}\} , \\ f^{(i)} : A^{(i)} \mapsto V^{(i)} \times V^{(i)} , \end{cases}$$

dicesi *somma cartesiana dei grafi* $(G_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ e si designa con $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, il grafo orientato e finito $G = (V, A, f)$ con

$$\begin{cases} V = \prod_{i=1}^{n} V^{(i)} , \\ A = \bigcup_{i=1}^{n} (V^{(1)} \times \dots \times V^{(i-1)} \times A^{(i)} \times V^{(i+1)} \times \dots \times V^{(n)}) , \\ f: (v_h^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(i)}, \dots, v_t^{(n)}) \mapsto ((v_h^{(1)}, \dots, f_1^{(i)}(\alpha_k^{(i)}), \dots, v_t^{(n)}), (v_h^{(1)}, \dots, f_2^{(i)}(\alpha_k^{(i)}), \dots, v_t^{(n)})) \text{ (1)}. \end{cases}$$

Dimostro che i grafi $G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ e $G^* = (\bigoplus_{i=1}^{n-1} G_i) \oplus G_n$ sono isomorfi.

---

(1) Siano S e T due insiemi ed $f: S \mapsto T^n$, con f_j si denota l'applicazione che a $x \in S$ associa la coordinata j-ma di $f(x)$.

Invero, posto

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} G_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} V^{(i)}, \bigcup_{i=1}^{n-1}(V^{(1)}\times\ldots\times V^{(i-1)}\times A^{(i)}\times V^{(i+1)}\times\ldots\times V^{(n-1)}), g\right),$$

$$G^* = (V^*, A^*, f^*),\quad V^* = \left(\prod_{i=1}^{n-1} V^{(i)}\right)\times V^n,$$

$$A^* = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(V^{(1)}\times\ldots\times V^{(i-1)}\times A^{(i)}\times V^{(i+1)}\times\ldots\times V^{(n-1)})\right)\times V^{(n)}\right)\cup\left(\prod_{i=1}^{n-1} V^{(i)}\times A^{(n)}\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n}((V^{(1)}\times\ldots\times V^{(i-1)}\times A^{(i)}\times V^{(i+1)}\times\ldots\times V^{(n-1)})\times V^{(n)}),$$

dico che sussiste la relazione

$$(*)\qquad f^*(\alpha_h^*) = \psi(f(\varphi^{-1}(\alpha_h^*)))\qquad \forall\alpha_h^*\in A^*,$$

dove ψ è l'applicazione biettiva tale che

$$\psi((v_i^{(1)},\ldots,v_i^{(n-1)},v_i^{(n)}),(v_j^{(1)},\ldots,v_j^{(n-1)},v_j^{(n)})) = (((v_i^{(1)},\ldots,v_i^{(n-1)}),v_i^{(n)}),((v_j^{(1)},v_j^{(n-1)}),v_j^{(n)}))$$

dedotta dall'applicazione canonica di V in V^* [1] e φ è l'applicazione canonica di A in A^*.

Infatti si ha:

$$f^*(\alpha_h^*) = ((g_1(v_j^{(1)},\ldots,v_j^{(i-1)},\alpha_j^{(i)},v_j^{(i+1)},\ldots,v_j^{(n-1)}),v_j^{(n)}),$$
$$(g_2(v_j^{(1)},\ldots,v_j^{(i-1)},\alpha_j^{(i)},v_j^{(i+1)},\ldots,v_j^{(n-1)}),v_j^{(n)}))$$
$$= \Big(((v_j^{(1)},\ldots,v_j^{(i-1)},f_1^{(i)}(\alpha_j^{(i)}),v_j^{(i+1)},\ldots,v_j^{(n-1)}),v_j^{(n)}),$$
$$((v_j^{(1)},\ldots,v_j^{(i-1)},f_2^{(i)}(\alpha_j^{(i)}),v_j^{(i+1)},\ldots,v_j^{(n-1)}),v_j^{(n)})\Big)$$
$$= \psi((v_j^{(1)},\ldots,v_j^{(i-1)},f_1^{(i)}(\alpha_j^{(i)}),v_j^{(i+1)},\ldots,v_j^{(n-1)},v_j^{(n)}),$$
$$(v_j^{(1)},\ldots,v_j^{(i-1)},f_2^{(i)}(\alpha_j^{(i)}),v_j^{(i+1)},\ldots,v_j^{(n-1)},v_j^{(n)}))$$
$$= \psi(f(v_j^{(i)},\ldots,v_j^{(i-1)},\alpha_j^{(i)},v_j^{(i+1)},\ldots,v_j^{(n-1)},\ldots,v_j^{(n)}))$$
$$= \psi\Big(f(\varphi^{-1}((v_j^{(1)},\ldots,v_j^{(i-1)},\alpha_j^{(i)},v_j^{(i+1)},\ldots,v_j^{(n-1)}),v_j^{(n)}))\Big)$$
$$= \psi\Big(f(\varphi^{-1}(\alpha_h^*))\Big).$$

Dunque la composizione di somma cartesiana di n-grafi orientati e finiti, a meno di isomorfismi, è associativa.

Non priva di interesse per applicazioni analoghe sembra anche la seguente composizione di n-grafi orientati e finiti che chiameremo *somma cartesiana abbinata*.

Definizione 2. Data una famiglia finita di grafi orientati e finiti $(G_i = (V^{(i)}, A^{(i)}, f^{(i)}))_{i\in\{1,\dots,n\}}$ $(n > 2)$, dicesi *somma cartesiana abbinata* (²) *dei grafi* $(G_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ e si designa con $\tilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} G_i = G_1 \tilde{\oplus} \dots \tilde{\oplus} G_n$, il grafo orientato e finito $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{f})$ con

$$\tilde{V} = \prod_{i=1}^{n} V^{(i)} ,$$

$$\tilde{A} = \bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} (V^{(1)}\times\dots\times V^{(i-1)}\times A^{(i)}\times V^{(i+1)}\times\dots\times V^{(j-1)}\times A^{(j)}\times V^{(j+1)}\times\dots\times V^{(n)}) ,$$

$$\tilde{f} : (v_h^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(i)}, \dots, \alpha_t^{(j)}, \dots, v_r^{(n)}) \mapsto$$

$$\mapsto ((v_h^{(1)}, \dots, f_1^{(i)}(\alpha_k), \dots, f_1^{(j)}(\alpha_t), \dots, v_r^{(n)}), (v_h^{(1)}, \dots f_2^{(i)}(\alpha_k), \dots, f_2^{(j)}(\alpha_t), \dots, v_r^{(n)})) .$$

L'opportunità delle due diverse definizioni di somma di n grafi è evidenziata dall'estensione dell'esempio dato da BERGE in [**1**]:

se $G_1, \dots, G_n$ descrivono l'iter di funzionamento di n macchine, allora $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ descrive l'iter di funzionamento delle macchine realizzato da un operatore che può far funzionare una sola delle macchine per volta, mentre $\tilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} G_i$ descrive l'iter nell'ipotesi che l'operatore faccia funzionare le macchine due per volta.

3. – Per determinare la matrice associata al grafo G somma cartesiana di n-grafi orientati e finiti $G_1, \dots, G_n$, è opportuno fissare un ordinamento nell'insieme $V = \prod_{i=1}^{n} V^{(i)}$ dei vertici.

(²) Il grafo somma cartesiana abbinata si può considerare grafo parziale del prodotto normale di $(G_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ definito in [**1**], nell'ipotesi che i grafi della famiglia siano 1-grafi.

Scelto in V l'ordinamento lessicografico, la matrice $\|G\| = [g_{i_1 \ldots i_n, j_1 \ldots j_n}]$ associata al grafo somma viene definita da

$$\text{(a)} \qquad g_{i_1 \ldots i_h \ldots i_n, j_1 \ldots j_h \ldots j_n} = \begin{cases} g^{(h)}_{i_h j_h} & \text{se esiste uno ed un sol } h \in \{1, \ldots, n\}: i_h \neq j_h \\ \sum_{h=1}^{n} g^{(h)}_{i_h j_h} & \text{se } i_h = j_h \ \ \forall h \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{negli altri casi}. \end{cases}$$

La costruzione della matrice $\|G\|$ riesce però più immediata utilizzando il seguente algoritmo ottenuto estendendo al caso di n addendi la formula (3)

$$\|G_1 \oplus G_2\| = \|G_1\| \oplus \|G_2\| = (\|G_1\| \odot I_2) + (I_1 \odot \|G_2\|)$$

nella quale i simboli $\oplus$, $\odot$ indicano rispettivamente la somma ed il prodotto Kroneckeriano di matrici ed I_k denota la matrice identica di ordine uguale a $|V_k|$ (con $k \in \{1, 2\}$).

Sussiste infatti il seguente teorema:

La matrice associata al grafo somma di n-grafi orientati e finiti $(G_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ *è data da*:

$$\|\bigoplus_{i=1}^{n} G_i\| = \sum_{i=1}^{n} (I_1 \odot \ldots \odot I_{i-1} \odot \|G_i\| \odot I_{i+1} \odot \ldots \odot I_n)\,.$$

Dimostriamo il teorema per induzione dato che esso è stato dimostrato per $n = 2$.

Per quanto detto al n. **2**, risulta

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} G_i \sim (\bigoplus_{i=1}^{n} G_i) \oplus G_{n+1}$$

e per note proprietà del prodotto Kroneckeriano di matrici si ha:

$$\begin{aligned} \|\bigoplus_{i=1}^{n+1} G_i\| &= \|(\bigoplus_{i=1}^{n} G_i) \oplus G_{n+1}\| = \|\bigoplus_{i=1}^{n} G_i\| \odot I_{n+1} + \bigodot_{i=1}^{n} I_i \odot \|G_{n+1}\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (I_1 \odot \ldots \odot I_{i-1} \odot \|G_i\| \odot I_{i+1} \odot \ldots \odot I_n) \odot I_{n+1} + \bigodot_{i=1}^{n} I_i \odot \|G_{n+1}\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (I_1 \odot \ldots \odot I_{i-1} \odot \|G_i\| \odot I_{i+1} \odot \ldots \odot I_n \odot I_{n+1}) + \bigodot_{i=1}^{n} I_i \odot \|G_{n+1}\| \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (I_1 \odot \ldots \odot I_{i-1} \odot \|G_i\| \odot I_{i+1} \odot \ldots \odot I_{n+1})\,. \end{aligned}$$

(3) Cfr. [**3**].

È interessante rilevare che la matrice $\|\bigoplus_{i=1}^{n} G_i\|$ è la somma di n matrici di ordine $m_1 . m_2 . \dots . m_n$ e ciascuna contenente gli elementi di una sola delle matrici dei grafi componenti.

Questa proprietà è l'espressione analitica della proprietà del grafo che rappresenta il grafo somma di contenere il grafo G_i ripetuto $m_1 \dots m_{i-1}$ $m_{i+1} \dots m_n$ volte $\forall i \in \{1 \dots n\}$.

4. – La matrice $\|\tilde{G}\| = [\tilde{g}_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_n}]$ associata al grafo $\tilde{G}$ somma abbinata dei grafi $(G_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ è definita dalle relazioni, che diciamo b),

$$\text{(b)} \quad \tilde{g}_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_n} = \begin{cases} g^{(h)}_{i_h j_h} g^{(k)}_{i_k j_k} & \text{se esiste una ed una sola coppia } (h, k) \in \{1, \dots, n\}^2 \text{ con } h \neq k \text{ per cui risulta } i_h \neq j_h \text{ e } i_k \neq j_k \\ \displaystyle\sum_{k \in \{1, \dots, h-1, h+1, \dots, n\}} g^{(h)}_{i_h j_h} g^{(k)}_{i_k j_k} & \text{se esiste uno ed un solo } h \in \{1, \dots, n\} \text{ per cui risulta } i_h \neq j_h \\ \displaystyle\sum_{\substack{h, k \in \{1, \dots, n\} \\ h < k}} g^{(h)}_{i_h j_h} g^{(k)}_{i_k j_k} & \text{se } (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n) \\ 0 & \text{negli altri casi}, \end{cases}$$

nelle quali gli indici rispettano l'ordinamento già prescelto come nel caso della somma cartesiana.

Anche per la matrice associata alla somma cartesiana abbinata di n grafi conviene adottare un algoritmo che consente la costruzione della matrice stessa mediante le matrici associate ai grafi componenti.

A tal fine sussiste il teorema:

La matrice associata al grafo somma abbinata di n grafi orientati e finiti $(G_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ $(n > 2)$ è data da:

$$\|\tilde{\bigoplus_{i=1}^{n}} G_i\| = \sum_{\substack{h, k \in \{1, \dots, n\} \\ h < k}} (I_1 \odot \dots \odot I_{h-1} \odot \|G_h\| \odot I_{h+1} \odot \dots \odot I_{k-1} \odot \|G_k\| \odot I_{k+1} \odot \dots \odot I_n).$$

Dimostriamo il teorema per $n = 3$.

Decomponiamo il sistema di relazione (b) nei seguenti tre sistemi:

$$\text{(b}_1\text{)} \qquad \tilde{g}'_{i_1 i_2 i_3, j_1 j_2 j_3} = \begin{cases} g^{(1)}_{i_1 j_1} \cdot g^{(2)}_{i_2 j_2} & \text{se } i_3 = j_3, \\ 0 & \text{se } i_3 \neq j_3, \end{cases}$$

$$(\mathrm{b}_2)\qquad \tilde{g}''_{i_1i_2i_3,\,j_1j_2j_3} = \begin{cases} \tilde{g}^{(2)}_{i_2j_2}\cdot\tilde{g}^{(3)}_{i_3j_3} & \text{se } i_1=j_1\,, \\ 0 & \text{se } i_1\neq j_1\,, \end{cases}$$

$$(\mathrm{b}_3)\qquad \tilde{g}'''_{i_1i_2i_3,\,j_1j_2j_3} = \begin{cases} g^{(1)}_{i_1j_1}\cdot g^{(3)}_{i_3j_3} & \text{se } i_2=j_2\,, \\ 0 & \text{se } i_2\neq j_2\,. \end{cases}$$

Ognuno di questi sistemi definisce una matrice di ordine $m_1 m_2 m_3$.

La matrice definita dalle (b_1) è costituita dagli elementi della matrice $\|G_1\times G_2\|$ e ciascuno di questi è ripetuto m_3 volte; questi m_3 elementi uguali costituiscono la diagonale di una matrice di ordine m_3 aventi nulli tutti gli altri elementi.

Conseguentemente la matrice determinata dalle (b_1) è data da:

$$\|G_1\times G_2\|\odot I_3 = \|G_1\|\odot\|G_2\|\odot I_3\,.$$

La matrice definita dalle (b_2) è costituita da m_1 sottomatrici principali tutte uguali alla matrice $\|G_2\times G_3\|$ ed ha tutti gli altri elementi. Si ha quindi che tale matrice è data da:

$$I_1\odot\|G_2\times G_3\| = I_1\odot\|G_2\|\odot\|G_3\|\,.$$

La matrice definita dalle (b_3) è costituita da m_1^2 sottomatrici di ordine $m_2 m_3$, ciascuna formata ripetendo m_2 volte in diagonale il prodotto di un elemento di $\|G_1\|$ per la matrice $\|G_3\|$. Tali sottomatrici sono disposte nello stesso ordine degli elementi $g^{(1)}_{i_1j_1}$ di $\|G_1\|$. Gli altri elementi della matrice sono nulli. Si ha quindi che la matrice determinata dalla (b_3) è data da $\|G_1\|\odot I_2\odot\|G_3\|$.

Risultando:

$$\tilde{g}_{i_1i_2i_3,\,j_1j_2j_3} = \tilde{g}'_{i_1i_2i_3,\,j_1j_2j_3} + \tilde{g}''_{i_1i_2i_3,\,j_1j_2j_3} + \tilde{g}'''_{i_1i_2i_3,\,j_1j_2j_3}$$

abbiamo:

$$(**)\qquad \Big\|\tilde{\bigoplus_{i=1}^{3}} G_i\Big\| = (\|G_1\|\odot\|G_2\|\odot I_3) + (I_1\odot\|G_2\|\odot\|G_3\|) + (\|G_1\|\odot I_2\odot\|G_3\|)\,.$$

Per dimostrare il teorema nel caso di $n>3$, osserviamo che dalla definizione di somma abbinata di n grafi si deduce la seguente relazione:

$$\tilde{G} = \Big(\tilde{\bigoplus_{i=1}^{n-1}} G_i\times\gamma_n\Big)\cup\Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} G_i\times G_n\Big)$$

nella quale γ_n denota il grafo costituito da $|V_n|$ vertici isolati in ciascuno dei quali esiste uno ed un sol cappio.

Da questa relazione si ricava che la matrice associata al grafo $\tilde{G}$ è data da:

$$\|\tilde{G}\| = \|\overset{n-1}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} G_i \times \gamma_n\| + \|\overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i \times G_n\| = \|\overset{n-1}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} G_i\| \odot I_n + \|\overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i\| \odot \|G_n\| .$$

Questa consente di dimostrare il teorema per induzione, in quanto supposto vero il teorema per l'indice $n-1$, tale formula fornisce la (**) per l'indice n.

È interessante rilevare che la matrice $\|\overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} G_i\|$ è la somma di n matrici ciascuna contenente solo gli elementi di $\|G_h \times G_k\|$ con $h, k \in \{1, \ldots, n\}$ e $h < k$.

Questa proprietà è l'espressione analitica della proprietà del grafo che rappresenta il grafo $\tilde{G}$ di contenere il grafo $G_h \times G_k$ ripetuto $m_1 \ldots m_{h-1} \cdot m_{h+1} \cdot \ldots \cdot m_{k-1} \cdot m_{k+1} \ldots m_n$ con $h < k$ e $h, k \in \{1, \ldots, n\}$.

5. – Denotiamo con M l'insieme delle matrici quadrate d'ordine finito sull'insieme N_0.

In tale insieme si può definire la somma abbinata di una famiglia finita $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ di matrici, e si designa con $\overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} A_i$, la matrice

$$\sum_{\substack{h,k\in\{1,\ldots n\}\\ h<k}} (I_1 \odot \ldots \odot I_{h-1} \odot A_h \odot I_{h+1} \odot \ldots \odot I_{k-1} \odot A_k \odot I_{k+1} \odot \ldots \odot I_n) .$$

È noto che la relazione $\sim$ di similitudine tra matrici è una relazione d'equivalenza nell'insieme M e sia $\mathscr{M} = M/\sim$ e $[A]$ la classe d'equivalenza determinata dalla matrice A.

Si dimostra che per ogni coppia di famiglie finite $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ e $(A'_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ tali che $A_i \sim A'_i$ risulta:

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} A_i \sim \overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} A'_i .$$

Si può quindi definire nell'insieme $\mathscr{M}$ l'operazione somma abbinata nel seguente modo:

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} [A_i] = [\overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} A_i] .$$

Denotiamo con Γ la classe dei grafi orientati e finiti.

È noto che la relazione d'isomorfismo $\sim$ tra grafi è una relazione d'equivalenza in Γ e sia $\mathscr{G} = \Gamma/\sim$ e $[G]$ la classe d'equivalenza del grafo G.

Si verifica che per ogni coppia di famiglie finite di grafi $(G_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ e $(G'_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ tali che $G_i \sim G'_i$ risulta:

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} G_i \sim \overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} G'_i .$$

Si può quindi definire nell'insieme $\mathscr{G}$ l'operazione di somma abbinata nel modo seguente:

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} [G_i] = [\overset{n}{\underset{i=1}{\tilde{\oplus}}} G_i] .$$

Conseguentemente, l'applicazione

$$\varphi\colon [G] \in \mathscr{G} \mapsto [\|G\|] \in \mathscr{M}$$

risulta essere un'isomorfismo di $(\mathscr{G}, \tilde{\oplus})$ su $(\mathscr{M}, \tilde{\oplus})$, a norma del teorema del n. **4**.

Bibliografia.

[1] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[2] N. BOURBAKI, *Elements de Mathematique*, Hérmann, Parigi 1968.

[3] A. FADINI: $[\cdot]_1$ *Sulla somma Kroneckeriana di matrici*, Ricerca **3** (1971); $[\cdot]_2$ *Associated matrix of cartesian sum of two graphs*, Ricerca **2** (1972).

[4] R. GUZZARDI, *Sulla connessione di composti di multigrafi in determinate strutture algebriche*, Ricerca **1** (1973).

* * *