Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 367-373

BIANCA MANFREDI (*)

Su le funzioni asperiodiche in $+\infty$. (II) (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Introduzione.

Riprendo a considerare (cfr. [**3**], p. 281) la classe $K_{+\infty}$ di tutte e sole le funzioni, di una variabile reale t, definite in intorni di $+\infty$, ed ivi reali, univoche, *limitate* e *continue.*

Richiamo da [**3**] (p. 300) la seguente [1]

Definizione. Una funzione $y(t)$ di $K_{+\infty}$ si dice *asperiodica nel continuo in* $+\infty$, di *asperiodo* τ (>0), se si ha

(1) $\lim\limits_{t\to+\infty}[y(t+m\tau)-y(t)]=0$ *uniformemente rispetto ad* m $(m=1, 2, ...)$.

In questo lavoro mi propongo di provare il seguente

Teorema. *Affinchè una funzione* $y(t)$ *della classe* $K_{+\infty}$, *sia « asperiodica nel continuo in* $+\infty$, *di asperiodo* τ (>0) » *è necessario e sufficiente che valga la seguente coppia di condizioni:*

$$(2)\qquad \begin{cases} (2)_1 & y(t) \textit{ è uniformemente continua} \\ (2)_2 & \lim\limits_{t\to+\infty}[y(t+\tau)-y(t)]=0\,. \end{cases}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. nell'ambito del G.N.F.M. - Ricevuto: 6-X-1976.

(1) In [**3**] (pp. 303, 304) sono stati introdotti anche i concetti di « asperiodicità nel discreto in $+\infty$ » e di « asperiodicità libere e a passo iterato in $+\infty$ », le cui applicazioni intendo mostrare in un altro lavoro.

Mi sembra, che, in generale, la prova di validità delle condizioni (2) si presenti più facile della prova di validità della condizione (1). In ciò sta l'interesse del Teorema, quando si desideri ricercare moti periodici in Meccanica non lineare. Ad esempio, un problema meccanico retto da un'equazione differenziale ordinaria, non lineare, di ordine $n \geqslant 2$, del tipo esaminato in $[\mathbf{4}]_{2,3}$, con termine forzante periodico di periodo τ (>0), presenta oscillazioni periodiche quando le precedenti condizioni (2) sono soddisfatte da una soluzione di tale equazione differenziale.

La dimostrazione del Teorema poggia su tre Proprietà (cfr. n. **2**) che conseguono da teoremi provati in [**3**] e [**4**], quando nella classe $K_{+\infty}$ ci si limiti a considerare la sottoclasse delle funzioni uniformemente continue (quali sono le soluzioni dei sistemi dinamici che intendo studiare).

2. - Proprietà preliminari.

2.1. – Proprietà 1. *Una funzione $y(t)$, di $K_{+\infty}$, se verifica la* (1), *ossia se è asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ (>0), è anche uniformemente continua.*

Dimostrazione. Poichè l'ipotesi fatta su $y(t)$ non è altro che l'affermazione (β) del Teorema 4 di [**3**] (p. 284), in virtù dell'affermazione (γ) di questo Teorema 4, esisterà una funzione $Y(t;\tau)$ periodica di periodo τ tale che $y(t)$ sia aseguale nel continuo in $+\infty$ alla $Y(t;\tau)$, vale a dire

$$\lim_{t \to +\infty} [y(t) - Y(t;\tau)] = 0\,,$$

ossia: preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esista un t_ε tale che

$$|y(t) - Y(t;\tau)| < \varepsilon \qquad (t \geqslant t_\varepsilon)\,. \tag{3}$$

Inoltre, poichè $Y(t;\tau)$ appartiene alla classe $K_{+\infty}$ (cfr. l'affermazione 1 del Teorema 5 di [**3**] (p. 284)), questa $Y(t;\tau)$ è continua per ogni $t \in (-\infty \ldots +\infty)$, anzi (a motivo della sua periodicità) è uniformemente continua in $(-\infty \ldots +\infty)$; abbiamo cioè che, in corrispondenza al precedente ε, esisterà un δ_ε (>0) per il quale

$$|Y(t';\tau) - Y(t'';\tau)| < \varepsilon \qquad (|t', t''| < \delta_\varepsilon)\,. \tag{4}$$

Essendo, poi,

$$\begin{aligned} |y(t') - y(t'')| &= |\{y(t') - Y(t';\tau)\} - \{y(t'') - Y(t'';\tau)\} + \{Y(t';\tau) - Y(t'';\tau)\}| \\ &\leqslant |y(t') - Y(t';\tau)| + |y(t'') - Y(t'';\tau)| + |Y(t';\tau) - Y(t'';\tau)|\,, \end{aligned}$$

da (3) e (4) segue

$$|y(t') - y(t'')| < 3\varepsilon \qquad (t', t'' > t_\varepsilon;\ \ |t' - t''| < \delta_\varepsilon)\,,$$

e ciò prova l'uniforme continuità di $y(t)$.

2.2. – Proprietà 2. *Si abbia una funzione $y(t)$ di $K_{+\infty}$ e si consideri la sua funzione $y(t)$ a passo τ (>0) iterato, cioè la funzione delle due variabili t e ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) data da* (²)

$$y(t + \nu\tau) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{5}$$

Allora: 1) (Teorema 2 di [**3**]) *La successione* (5), *se converge per $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$ ($t_0 > -\infty$), converge anche per ogni $t > -\infty$ e, posto*

$$\lim_{\nu \to +\infty} y(t + \nu\tau) = Y(t;\, \tau) \qquad (t > -\infty)\,, \tag{6}$$

si ha che $Y(t;\tau)$ è limitata e periodica di periodo τ.

2) *Se la precedente $y(t)$ oltre ad appartenere a $K_{+\infty}$ è anche uniformemente continua, dalla convergenza della successione* (5) *per $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$ segue l'uniforme convergenza di* (5) *nell'intervallo illimitato $t \geqslant t_0$ e, quindi, l'asperiodicità nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ, della data funzione $y(t)$.*

Dimostrazione. La proposizione 1) è stata ottenuta in [**3**] (pp. 283, 291 e 305). Per provare la proposizione 2) osservo dapprima che le infinite funzioni della successione (5) definite per $t \geqslant t_0$ ($t_0 > -\infty$) sono equilimitate in virtù dell'appartenenza di $y(t)$ a $K_{+\infty}$; inoltre, poichè qui si suppone l'uniforme continuità di $y(t)$, le suddette funzioni sono equicontinue per $t \geqslant t_0$. Allora, poichè l'ipotesi di convergenza della successione (5) per $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$ implica la convergenza della stessa successione per $t > -\infty$ (cfr. proposizione 1)), questa convergenza risulta uniforme in ogni intervallo limitato (cfr. [**5**], pp. 99 e 100). Ne segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{\nu}_\varepsilon$ (indipendente da t) tale che (cfr. (6))

$$|y(t + \nu\tau) - Y(t;\, \tau)| < \varepsilon \qquad (t_0 \leqslant t < t_0 + \tau;\ \nu > \bar{\nu}_\varepsilon)\,. \tag{7}$$

D'altra parte, preso un qualunque $t' \geqslant t_0 + \tau$ e detto m l'intero positivo per cui: $t' = t + m\tau$, con $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$, in conseguenza della periodicità di $Y(t;\tau)$

(²) La successione (5) è stata chiamata in [**4**]₁ la « progressione di aritmeticità di generatrice $y(t)$ e di ragione τ ».

(cfr. proposizione 1)) si ha

$$y(t'+\nu\tau)-Y(t';\tau)=y(t+(\nu+m)\tau)-Y(t;\tau)\,.$$

Pertanto, valendo (7), in corrispondenza ai precedenti numeri ε e $\bar{\nu}_\varepsilon$, sarà pure

$$|y(t'+\nu\tau)-Y(t';\tau)|<\varepsilon \qquad (t'\geqslant t_0+\tau;\,\nu>\bar{\nu}_\varepsilon)\,. \tag{8}$$

Dalle (7) e (8) si deduce l'uniforme convergenza della successione (5) per $t\geqslant t_0$. Infine, poichè questa conclusione di uniforme convergenza di (5) nell'intervallo illimitato $t\geqslant t_0$ non è altro che l'affermazione (α) del Teorema 4 di [**3**] (p. 284), in virtù dell'affermazione (β) dello stesso teorema, risulta che la data funzione $y(t)$ è asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ.

2.3. – Proprietà 3. *Si abbia una funzione $y(t)$ di $K_{+\infty}$, e un numero $\tau>0$. La relazione limite nel continuo data da*

$$\lim_{t\to+\infty}[y(t+\tau)-y(t)]=0 \tag{$(2)_2$}$$

è equivalente alla seguente relazione limite nel discreto (essendo $\nu=0,1,2,\ldots$ e $t_0>-\infty$)

$$\lim_{\nu\to+\infty}[y(t+(\nu+1)\tau)-y(t+\nu\tau)]=0,\ \textit{uniformemente per } t\geqslant t_0\,. \tag{9}$$

Dimostrazione [3]. 1) Si ha: $(2)_2 \Rightarrow (9)$. Invero, la $(2)_2$ afferma che, per ogni $\varepsilon>0$, esiste un t_ε tale che sia

$$|y(t+\tau)-y(t)|<\varepsilon \qquad (t>t_\varepsilon), \tag{$(2)_2'$}$$

da cui, cambiando t in $t+\nu\tau$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$,

$$|y(t+(\nu+1)\tau)-y(t+\nu\tau)|<\varepsilon \qquad (t>t_\varepsilon-\nu\tau;\,\nu=0,1,2,\ldots)\,. \tag{$(2)_2''$}$$

Osservando ora che $t_\varepsilon-\nu\tau\to-\infty$ quando $\nu\to+\infty$, da $(2)_2''$ segue: fissato un qualunque $t_0>-\infty$, in corrispondenza al precedente ε, esiste un intero posi-

---

[3] Questa Dim. è analoga a quella seguita per provare la «Proprietà di equivalenza» di [**3**] (pp. 302 e 303).

tivo $\bar{\nu}_{\varepsilon, t_0}$ (indipendente da t) tale che

$$(10) \qquad |y(t+(\nu+1)\tau)-y(t+\nu\tau)|<\varepsilon \qquad (t\geqslant t_0;\ \nu>\bar{\nu}_{\varepsilon,t_0}),$$

cioè proprio quanto afferma la (9).

2) Si ha: (9) $\Rightarrow (2)_2$. Invero, la (9) equivale alla (10); ora, posto $t'=t+\nu\tau$, la (10) diventa

$$(10)' \qquad |y(t'+\tau)-y(t')|<\varepsilon \qquad (t'>t_0+\nu\tau;\ \nu>\bar{\nu}_{\varepsilon,t_0}),$$

ed anche, se fissiamo per ν il valore particolare $\bar{\nu}_{\varepsilon,t_0}+1$ e se poniamo $t'_\varepsilon=t_0+$ $+(\bar{\nu}_{\varepsilon,t_0}+1)$,

$$|y(t'+\tau)-y(t')|<\varepsilon \qquad (t'>t'_\varepsilon).$$

Questa relazione non è altro che la $(2)'_2$, cioè la $(2)_2$ da ottenere.

3. - Dimostrazione del teorema.

3.1. – Le condizioni (2) sono *necessarie*. Invero, la $(2)_1$ segue dalla Proprietà 1, e la $(2)_2$ coincide con la (1) per $m=1$.

3.2. – Le condizioni (2) sono *sufficienti*. Invero, valendo $(2)_1$, posso applicare il Teorema 4 di [4] (p. 154) e concludere l'esistenza di una funzione $\lambda(t)_{t>-\infty}$ che è *una* accumulazione della successione (5) in ogni intervallo limitato (4).

Sia allora

$$y(t+\nu_k\tau) \qquad (k=0,1,2,\ldots;\ \nu_1<\nu_2<\nu_3\ldots)$$

la sottosuccessione, della (5), completa per $\lambda(t)$ (5) e tale che

$$(11) \qquad \lim_{k\to+\infty} y(t+\nu_k\tau)=\lambda(t) \qquad (t_0\leqslant t<t_0+2\tau).$$

---

(4) Simile funzione $\lambda(t)$ è stata chiamata in $[4]_2$ una «transaccumulazione» della successione (5).

(5) Secondo la definizione data in $[4]_1$ (p. 152) una sottosuccessione di (5) è *completa per* $\lambda(t)$ quando sopprimendo in (5) le funzioni della sottosuccessione, si ottiene una successione che non ha $\lambda(t)$ per accumulazione.

Si osserva che due sottosuccessioni di (5), la prima completa per $\lambda(t)$ e convergente a $\lambda(t)$, la seconda soltanto convergente a $\lambda(t)$ sono così legate: i termini della seconda sottosuccessione con indici abbastanza grandi appartengono tutti alla prima sottosuccessione.

Da (11), cambiando t in $t+\tau$, segue che esiste $\lim\limits_{k\to+\infty} y(t+(\nu_k+1)\tau)$ per $t_0 \leqslant t < t_0+\tau$. Inoltre, poichè vale $(2)_2$ e quindi la (9), sarà

$$\lim_{k\to+\infty} y(t+(\nu_k+1)\tau)=\lambda(t) \qquad (t_0\leqslant t<t_0+\tau)\,. \tag{12}$$

Ragiono ora come in $[4]_1$ (p. 156): essendo $\{y(t+\nu_k\tau)\}$ una sottosuccessione completa per $\lambda(t)$, da (11) e (12) segue (cfr. annotazione ([5])) l'esistenza di un intero positivo k^* (abbastanza grande) tale che i numeri

$$\nu_{k^*}+1\,,\qquad \nu_{k^*+1}+1\,,\qquad \nu_{k^*+2}+1\,,\qquad \ldots \tag{13}$$

figuranti in (12), appartengono tutti alla successione c r e s c e n t e $\nu_{k^*}, \nu_{k^*+1}, \nu_{k^*+2}, \ldots$; precisamente risulta

$$\nu_{k^*}+1=\nu_{k^*+1}\,,\qquad \nu_{k^*+1}+1=\nu_{k^*+2}\,,\qquad \nu_{k^*+2}+1=\nu_{k^*+3}\,,\qquad \ldots,$$

onde gli interi (13) formano la successione crescente di tutti i numeri naturali $>\nu_{k^*}$.

Allora, la (12) si può scrivere nella forma

$$\lim_{s\to s\infty} y(t+(\nu_{k^*}+s)\tau)=\lambda(t) \qquad (t_0\leqslant t<t_0+\tau)\,, \tag{12$'$}$$

e questa relazione assicura che la successione (5) converge per $t_0\leqslant t<t_0+\tau$: in virtù della Proprietà 2, la data funzione $y(t)$ risulta quindi asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ.

Il Teorema è così concluso.

Bibliografia.

[1] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, Berlin 1969.

[2] W. Hahn, *Stability of motion*, Springer, Berlin 1967.

[3] A. Mambriani e B. Manfredi, *Su le funzioni asperiodiche in* $+\infty$ - (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 281-308.

[4] B. Manfredi: $[\cdot]_1$ *Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni di accumulazioni periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 149-159; $[\cdot]_2$ *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des solutions périodiques de certaines équations différentielles non linéaires, d'ordre* $n\geqslant 2$, Colloque de Mons (57-65), Vander, Louvain 1970; $[\cdot]_3$ *Aspériodicité globale en* $+\infty$ *et solutions périodiques*, « Equa. Diff., 73 » (479-488), Hermann, Paris.

[5] M. Picone, *Lezioni di analisi funzionale*, Tumminelli, Roma 1947.

Summary.

On the ground of the « continuus asperiodicity in $+\infty$ », notion introduced in [**3**], *we prove that a function $y(t)$ (real, bounded and continuous in a $+\infty$ neighbourhood) is continuous asperiodical in $+\infty$, of asperiod $\tau(>0)$ if, and only if, $y(t)$ is uniformly continuous and the following condition $\lim_{t\to+\infty}[y(t+\tau)-y(t)]=0$ holds.*

* * *

Mi torna particolarmente caro che spetti a me, allieva del prof. Antonio Mambriani, maestro di scienza e di profonda umanità, l'onore di chiudere questo volume della Rivista da lui voluta e con tanto sapiente amore realizzata.

BIANCA MANFREDI