Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974) 291-308

MARIO SERVI (*)

Su alcuni funtori che conservano le SH. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

Premessa.

Nel presente lavoro si presuppone la lettura di [5], del quale per lo più si conservano le notazioni. Nel n. 8 di [5] si è dimostrato che se H è una SH ed A una struttura (in $\boldsymbol{K}$), allora H è vera in A se e solo se essa è vera uniformemente nelle $\boldsymbol{K}[X, A]$ $(X \in |\boldsymbol{K}|)$, con la struttura indotta. Qui ci proponiamo di generalizzare tale risultato (1). Più esattamente, sia $\boldsymbol{C}$ una categoria con prodotti finiti tale che, detto 1 un suo oggetto finale, il funtore standard $\boldsymbol{C}[1, —]$ sia pieno e fedele; sia $\boldsymbol{D}$ una categoria qualunque e sia $G: \boldsymbol{D}^{\mathrm{op}} \times \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ un funtore tale che $\boldsymbol{C}[1, G(—, —)] \approx \boldsymbol{D}[—, —]$. Se H è una SH ed A un oggetto di $\boldsymbol{D}$ dotato di $\mathscr{L}$-struttura, allora H è vera in A se e solo se è vera uniformemente nelle $G(X, A)$, $(X \in |\boldsymbol{D}|)$, dove $G(X, A)$ ha la struttura «indotta» da quella su A.

Quando $\boldsymbol{C}$ sia cartesianamente chiusa, sempre sotto l'ipotesi che $\boldsymbol{C}[1, —]$ sia pieno e fedele, si ottiene come caso particolare che H è vera in A (con una data struttura) se e solo se è vera uniformemente nelle A^X (con la struttura indotta). La conservazione delle SH per potenze, risultato che generalizza alle strutture relazionali quello che per le algebre si può trovare ad es. in [2], si può ottenere, sotto ipotesi più deboli, anche come corollario del teorema secondo cui la verità delle SH è conservata dai funtori che posseggono aggiunto sinistro.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del G.N.S.A.G.A.. — Ricevuto: 14-1-1974.

(1) Cfr. anche [1], in cui si affrontano questioni analoghe, ma sotto ipotesi diverse.

1. - Un utile teorema generale.

Il seguente teorema è spesso utile quando si tratta la conservazione della verità delle SH.

Teorema 1. *Siano* $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$ *e* $\mathscr{B} = \langle B, \Psi \rangle$ *due* $\mathscr{L}$*-strutture (anche in categorie diverse); sia data una funzione che, a ciascuna interpretazione* $\mathscr{A}^*$ *associata ad* $\mathscr{A}$*, faccia corrispondere una interpretazione* $\mathscr{B}'$ *associata a* $\mathscr{B}$*, e sia data inoltre una funzione che a ciascun morfismo* $g\colon Y \to B^n$ *faccia corrispondere un morfismo* $\bar{g}\colon \bar{Y} \to A^n$*, soddisfacenti la seguente condizione: per ogni* SH *atomica* H_0 *di rango* n*, per ogni* $\mathscr{A}^*$ *ed ogni* $g\colon Y \to B^n$ *si ha:*

$$(1) \qquad \models_{\mathscr{A}^*} H_0[\bar{g}] \qquad \textit{se e solo se} \qquad \models_{\mathscr{B}'} H_0[g] \,.$$

Allora ogni SH *vera in* $\mathscr{A}$ *è vera anche in* $\mathscr{B}$.

Dimostrazione. Sia $H_1 \wedge \ldots \wedge H_r \to H_0$ una SHE di rango n vera in $\mathscr{A}$. Esiste allora un'interpretazione $\mathscr{A}^*$ associata ad $\mathscr{A}$ tale che

$$(2) \qquad \models_{\mathscr{A}^*} H_1 \wedge \ldots \wedge H_r \to H_0 \,.$$

Si consideri $\mathscr{B}'$ (che per ipotesi è associata a $\mathscr{B}$) e dimostriamo che $\models_{\mathscr{B}'} H_1 \wedge \ldots \wedge H_r \to H_0$. Sia infatti $g\colon Y \to B^n$ tale che $\models_{\mathscr{B}'} H_1 \wedge \ldots \wedge H_r[g]$, cioè $\models_{\mathscr{B}'} H_i[g]$, per ogni $i = 1, \ldots, r$. Per (1) si ha allora $\models_{\mathscr{A}^*} H_1 \wedge \ldots \wedge H_r[\bar{g}]$, dove $\bar{g}\colon \bar{Y} \to A^n$; dalla (2) segue allora $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[\bar{g}]$, quindi $\models_{\mathscr{B}'} H_0[g]$, per la (1). Il teorema resta così dimostrato per le SHE. Sia ora H vera in $\mathscr{A}$; esiste allora una $\mathscr{A}^*$ in cui è vera la H, e quindi tutte le SHE delle quali H è congiunzione. Queste, per quanto visto sopra, sono vere in $\mathscr{B}'$, perciò anche H è vera in $\mathscr{B}'$ e quindi in $\mathscr{B}$.

2. - Funtori che ammettono un aggiunto sinistro.

Siano $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ due categorie con prodotti finiti, $G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ un funtore che conserva i prodotti finiti e i monomorfismi. Se $A \in |\boldsymbol{C}|$, sia $\alpha_m\colon G(A^m) \to G(A)^m$ l'isomorfismo canonico, definito da

$$\varepsilon_i \alpha_m = G(\varepsilon_i) \,,$$

e sia β_m l'isomorfismo inverso. Per ogni $\mathscr{L}$-struttura in $\boldsymbol{C}$, $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$, resta allora indotta su $G(A)$ una $\mathscr{L}$-struttura $G(\mathscr{A}) = \langle G(A), \Phi_G \rangle$ come segue. Se $R_P \overset{u_P}{\rightarrowtail} A^m$ rappresenta l'interpretazione $\Phi(P)$ di un predicato m-ario P, allora $\Phi_G(P)$ sarà rappresentata da

$$\alpha_m G(u_P) \colon G(R_P) \rightarrowtail G(A^m) \xrightarrow{\approx} G(A)^m \text{ (2)} .$$

Analogamente, se $\mathscr{A}^* = \langle A, \Phi^* \rangle$ è una $\mathscr{L}$-interpretazione in $\boldsymbol{C}$, si ha una $\mathscr{L}$-interpretazione (in $\boldsymbol{D}$), $G(\mathscr{A}^*) = \langle G(A), \Phi_G \rangle$ indotta su $G(A)$ interpretando i predicati come sopra e i simboli funzionali in modo ovvio: se $A^n \xrightarrow{\omega} A$ è l'interpretazione $\Phi^*(f)$ del simbolo funzionale f, allora $\Phi_G^*(f)$ sarà data da:

$$G(\omega)\beta_n \colon G(A)^n \to G(A^n) \to G(A) .$$

Con queste notazioni, vale ovviamente la seguente

Proposizione 1. *Se $\mathscr{A}^*$ è un'interpretazione associata ad $\mathscr{A}$, allora la interpretazione $G(\mathscr{A}^*)$ è associata a $G(\mathscr{A})$.*

Osservazione. Ovviamente, per svolgere le precedenti considerazioni, l'ipotesi che G conservi i monomorfismi è ridondante: è sufficiente che G conservi quei monomorfismi che rappresentano le interpretazioni dei predicati.

Lemma 1. *Sia t un termine n-ario. Allora*

$$\Phi_G^*(t) = G(\Phi^*(t))\beta_n . \tag{3}$$

Dimostrazione. Per induzione sulla costruzione dei termini.

Lemma 2. *Siano $G, G' \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ due funtori che conservano prodotti finiti e monomorfismi e sia $\psi \colon G \to G'$ una trasformazione naturale. Data una $\mathscr{L}$-struttura ($\mathscr{L}$-interpretazione) $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$, si ha $\psi_A \colon G(\mathscr{A}) \to G'(\mathscr{A})$, cioè ψ_A è un omomorfismo di strutture (interpretazioni).*

Dimostrazione. Sia $R \overset{u}{\rightarrowtail} A^m$ l'interpretazione in $\mathscr{A}$ del generico predicato P. Essendo ψ una trasformazione naturale, è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
G(R) \arrow[r, "G(u)"] \arrow[d, "\Psi_R"] & G(A^m) \arrow[r, "\alpha_m"] \arrow[d, "\Psi_{A^m}"] & G(A)^m \arrow[d, "\Psi_A^m"] \\
G'(R) \arrow[r, "G'(u)"] & G'(A^m) \arrow[r, "\alpha'_m"] & G'(A)^m
\end{tikzcd}$$

(2) È ovvio che $\Phi_G(P)$ non dipende dal rappresentante scelto per $\Phi(P)$.

donde ψ_A è compatibile con P. Analoga dimostrazione vale per la compatibilità coi simboli funzionali.

Lemma 3. *Siano $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ categorie con prodotti finiti, $G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ un funtore pieno e fedele che conservi i prodotti finiti e i monomorfismi. Sia $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$ una $\mathscr{L}$-struttura ed H una* SH *tale che $\models_{G(\mathscr{A})} H$. Allora $\models_{\mathscr{A}} H$.*

Dimostrazione (3). Sia $G(\mathscr{A})^*$ un'interpretazione associata a $G(\mathscr{A})$; mostriamo che ne esiste una, $\mathscr{A}^*$, associata ad $\mathscr{A}$, tale che $G(\mathscr{A})^* = G(\mathscr{A}^*)$. Sia $\omega\colon G(A)^n \to G(A)$ l'interpretazione in $G(\mathscr{A})^*$ di un simbolo funzionale n-ario, f. Allora $\omega\alpha_n\colon G(A)^n \to G(A)$, e poichè G è pieno (e fedele) esiste uno (ed un solo) morfismo $\omega'\colon A^n \to A$ tale che $G(\omega') = \omega\alpha_n$. La funzione $f \to \omega'$ fornisce l'interpretazione voluta $\mathscr{A}^*$. Sia ora $g\colon Y \to A^n$. Allora $G(g)\colon G(Y) \to G(A^n)$, quindi $\alpha_n G(g)\colon G(Y) \to G(A)^n$. Per il Teorema 1, sarà ora sufficiente provare che $\models_{G(\mathscr{A})^*} H_0[\alpha_n G(g)]$ se e solo se $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[g]$, per ogni H_0 che sia atomica. Supponiamo che H_0 sia $P(t_1, \ldots, t_m)$, di rango n. Da $\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\} g \leqslant u_P$ segue subito $\{\Phi^*_G(t_1), \ldots, \Phi^*_G(t_m)\}\alpha_n G(g) \leqslant \alpha_m G(u_P)$. Viceversa, sia ad esempio

$$\{\Phi^*_G(t_1), \ldots, \Phi^*_G(t_m)\}\alpha_n G(g) = \alpha_m G(u_P)x\,, \tag{4}$$

con $x\colon G(Y) \to G(R_P)$. Poichè G è pieno, esiste un $y\colon Y \to R_P$ tale che $x = G(y)$. La (4) diviene allora:

$$G(\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\} g) = G(u_P y)\,,$$

e l'asserto segue dalla fedeltà di G.

Passiamo ora a considerare il caso che G possegga un aggiunto sinistro F. Sia dunque $F \dashv G$ e siano

$$\eta\colon FG \to \mathrm{Id}_{\boldsymbol{C}} \qquad \text{ed} \qquad \varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\boldsymbol{D}} \to GF$$

le unità dell'aggiunzione. Se $g\colon Y \to G(A)^n$, allora $\beta_n g\colon Y \to G(A^n)$, quindi $\eta_{A^n} F(\beta_n g)\colon F(Y) \to A^n$. Posto

$$\bar{g} = \eta_{A^n} F(\beta_n g)\,,$$

si ha:

Lemma 4. *Sia $H_0 = P(t_1, \ldots, t_m)$ una* SH *atomica di rango n e sia $g\colon Y \to G(A)^n$. Allora $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[\bar{g}]$ se e solo se $\models_{G(\mathscr{A}^*)} H_0[g]$.*

---

(3) Cfr. anche [**1**].

Dimostrazione. Sia $\models_{G(\mathcal{A}^*)} H_0[g]$, diciamo

$$\{\Phi_G^*(t_1), \ldots, \Phi_G^*(t_m)\}\, g = \alpha_m G(u_P)\, y\,, \tag{4}$$

con $y\colon Y \to G(R_P)$. Dalla (3), usando ancora che G conserva i prodotti, ne segue $FG(\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\})\, F(\beta_n g) = FG(u_P)\, F(y)$; infine, essendo η una trasformazione naturale, si ha:

$$\begin{aligned}\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\}\, \bar{g} &= \{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\}\, \eta_{A^n} F(\beta_n g) = \\ &= \eta_{A^m} FG(\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\})\, F(\beta_n g) = \\ &= \eta_{A^m} FG(u_P)\, F(y) = u_P\, \eta_{R_P} F(y) \leqslant u_P\,,\end{aligned}$$

dunque

$$\models_{\mathcal{A}^*} H_0[\bar{g}]\,. \tag{5}$$

Viceversa, valga la (5), e sia $x\colon F(Y) \to R_P$ tale che

$$\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\}\, \bar{g} = u_P x\,.$$

Osserviamo anzitutto che $G(\eta_{A^n})\, GF(\beta_n g)\, \varepsilon_Y = \beta_n g$, cioè $G(\bar{g})\, \varepsilon_Y = \beta_n g$, come si prova tenendo conto delle proprietà di η, ε, α_n, β_n. La (6) fornisce allora:

$$\begin{aligned}\{\Phi_G^*(t_1), \ldots, \Phi_G^*(t_m)\}\, g &= \{G(\Phi^*(t_1)), \ldots, G(\Phi^*(t_m))\}\, \beta_n g = \\ &= \alpha_m G(\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\})\, G(\bar{g})\, \varepsilon_Y = \\ &= \alpha_m G(\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_m)\}\, \bar{g})\, \varepsilon_Y = \alpha_m G(u_P x)\, \varepsilon_Y \leqslant \alpha_m G(u_P)\,.\end{aligned}$$

Il Lemma 3 resta così dimostrato. Dal Teorema 1, segue ora banalmente:

Teorema 2. *Sia $G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ un funtore che possiede aggiunto sinistro, sia $\mathcal{A} = \langle A, \Phi\rangle$ una $\mathcal{L}$-struttura in $\boldsymbol{C}$, e sia $G(\mathcal{A})$ la struttura indotta. Allora ogni* SH *vera in $\mathcal{A}$ è vera anche in $G(\mathcal{A})$.*

3. - Strutture isomorfe. Equivalenze naturali.

Siano $\mathcal{A} = \langle A, \Phi\rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, \Psi\rangle$ due $\mathcal{L}$-strutture in $\boldsymbol{C}$. Come in [**5**], (cfr. n. 6) indichiamo con $\boldsymbol{C}(\mathcal{L})$ la categoria delle $\mathcal{L}$-strutture in $\boldsymbol{C}$ e degli omomorfismi, e con $C_f(\mathscr{L})$ quella delle $\mathscr{L}$-strutture e degli omomorfismi forti Con tali notazioni è facile allora provare la seguente

Proposizione 2. *Sia $\varphi: A \to B$. Sono equivalenti le seguenti tre condizioni:*

1) *φ è invertibile in $\mathbf{C}(\mathscr{L})$, cioè $\varphi \in \mathbf{C}(\mathscr{L})$ ed $\exists \psi \in \mathbf{C}(\mathscr{L})$ tale che $\psi = \varphi^{-1}$.*

2) *φ è invertibile in $\mathbf{C}$ e appartiene a $\mathbf{C}_f(\mathscr{L})$.*

3) *φ è invertibile in $\mathbf{C}$ ed esiste una famiglia $(\varphi_P: R_P \to S_P)_{P \in \Omega}$ di isomorfismi di $\mathbf{C}$ tale che per ogni $P \in \Omega(n)$ sia commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} R_P \arrow[r, tail, "u_P"] \arrow[d, "\varphi_P"'] & A^n \arrow[d, "\varphi^n"] \\ S_P \arrow[r, tail, "v_P"] & B^n \end{tikzcd}$$

dove $[u_P: R_P \to A^n] = \Phi(P)$ *e* $[v_P: S_P \to B^n] = \Psi(P)$.

Definizione. Scriveremo $\varphi: \mathscr{A} \xrightarrow{\approx} \mathscr{B}$ se φ soddisfa le condizioni della Proposizione 2; in tal caso diremo che φ è un *isomorfismo di $\mathscr{L}$-strutture.* Diremo che $\mathscr{A}$ *è isomorfa a* $\mathscr{B}$ ($\mathscr{A} \approx \mathscr{B}$) se esiste un φ tale che $\varphi: \mathscr{A} \xrightarrow{\approx} \mathscr{B}$.

Lemma 5. *Siano $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ due $\mathscr{L}$-strutture (in $\mathbf{C}$), con $\mathscr{A} \approx \mathscr{B}$, e sia H una qualunque* SH. *Allora $\models_{\mathscr{A}} H$ se e solo se $\models_{\mathscr{B}} H$.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$, $\mathscr{B} = \langle B, \Psi \rangle$, $\varphi: \mathscr{A} \xrightarrow{\approx} \mathscr{B}$. Definiamo $G: |\mathbf{C}| \to |\mathbf{C}|$ come segue:

$$\begin{cases} G(X) = X\,, & \text{se } X \neq A\,; \\ G(A) = B\,. \end{cases}$$

Per ogni $X \in |\mathbf{C}|$, definiamo ora un isomorfismo $\psi_X: X \xrightarrow{\approx} G(X)$ come segue:

$$\begin{cases} \psi_X = 1_X\,, & \text{se } X \neq A\,, \\ \psi_A = \varphi\,. \end{cases}$$

È ovvio che possiamo estendere G a un funtore $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definendo $G(f) = \psi_Y f \psi_X^{-1}$, se $f\colon X \to Y$. Con tale definizione risulta $\psi\colon \mathrm{Id}_C \xrightarrow{\approx} G$. Ne segue che G è un'equivalenza, e, tenuto conto della simmetria delle ipotesi, l'asserto segue dal Teorema 2, verificando che $\mathscr{B} = G(\mathscr{A})$.

Corollario. *Siano $F, F'\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ due funtori che conservano i prodotti finiti e monomorfismi e sia $\eta\colon F \xrightarrow{\approx} F'$ un isomorfismo naturale. Sia $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$ una $\mathscr{L}$-struttura (in $\mathbf{C}$), siano $F(\mathscr{A})$ ed $F'(\mathscr{A})$ le strutture indotte (in $\mathbf{D}$) e sia H una* SH. *Allora $\models_{F(\mathscr{A})} H$ se e solo se $\models_{F'(\mathscr{A})} H$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 5 sarà sufficiente mostrare che $F(\mathscr{A}) \approx F'(\mathscr{A})$, ma dal Lemma 2 segue appunto $\eta_A\colon F(\mathscr{A}) \xrightarrow{\approx} F'(\mathscr{A})$.

Teorema 3. *Sia $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un'equivalenza, $\mathscr{A}$ una $\mathscr{L}$-struttura in $\mathbf{C}$ e sia H una* SH. *Allora $\models_{\mathscr{A}} H$ se e solo se $\models_{G(\mathscr{A})} H$.*

Dimostrazione. Sia $F\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ un'equivalenza associata a G. Allora $F \dashv G$ e $G \dashv F$. Per il Teorema 2, da $\models_{\mathscr{A}} H$ segue $\models_{G(\mathscr{A})} H$. Viceversa, sia $\models_{G(\mathscr{A})} H$; per il Teorema 2, è $\models_{FG(\mathscr{A})} H$. Ma $FG \approx \mathrm{Id}_C$, quindi $\models_{\mathscr{A}} H$ per il corollario precedente.

Osservazione. Ovviamente, la seconda parte del Teorema 3 segue anche dal Lemma 3.

Definizione. Siano $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ due $\mathscr{L}$-strutture (anche in categorie diverse). Diremo che $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono SH-*equivalenti* se ogni SH vera in $\mathscr{A}$ è vera anche in $\mathscr{B}$ e viceversa.

Osservazione. Si noti che la definizione (così come il concetto stesso di «verità di una SH») dipende dalle categorie cui appartengono $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$.

Corollario 1. *Se $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ sono isomorfe, sono anche* SH-*equivalenti.*

Corollario 2. *Se $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un'equivalenza ed $\mathscr{A}$ una $\mathscr{L}$-struttura in $\mathbf{C}$, allora $\mathscr{A}$ è* SH-*equivalente a $G(\mathscr{A})$.*

Se $\mathscr{A}$ è una $\mathscr{L}$-struttura nella categoria $\mathscr{S}$ degli insiemi, allora $\mathscr{A} \approx \mathscr{S}[1, \mathscr{A}]$, quindi $\mathscr{A}$ ed $\mathscr{S}[1, \mathscr{A}]$ sono SH-equivalenti. In generale, tale affermazione perde di senso. Tenendo però presente il teorema 2 di [**5**], per il Lemma 3 possiamo enunciare il

Corollario 3. *$\mathscr{A}$ e $\boldsymbol{C}[1, \mathscr{A}]$ sono* SH-*equivalenti se* 1 *è un generatore di $\boldsymbol{C}$ e per ogni $F\colon \boldsymbol{C}[1, X] \to \boldsymbol{C}[1, Y]$ esiste un $f\colon X \to Y$ tale che $F = \boldsymbol{C}[1, f]$.*

Corollario 4. *Supponiamo $\boldsymbol{C}$ cartesianamente chiusa e per ogni $\mathscr{L}$-struttura $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$ indichiamo con $\mathscr{A}^B$ la struttura su A^B indotta. Sia H una* SH. *Allora*

$$\models_{\mathscr{A}} H \tag{7}$$

se e solo se

$$\textit{per ogni } B \in |\boldsymbol{C}|, \qquad \models_{\mathscr{A}^B} H\,. \tag{8}$$

Dimostrazione. Il funtore $G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ definito da $G(x) = x^B$ soddisfa le ipotesi del Teorema 2, quindi la (7) implica la (8). Viceversa, se vale la (8) allora H è vera in $\mathscr{A}^1$; ma $\mathscr{A}^1 \approx \mathscr{A}$, quindi H è vera in $\mathscr{A}$.

Corollario 5. *Sia $G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ un funtore pieno e fedele, sia $\boldsymbol{D}'$ la sottocategoria piena di $\boldsymbol{D}$ generata dall'immagine di G. Allora $\models_{\mathscr{A}} H$ (in $\boldsymbol{C}$) se e solo se $\models_{G(\mathscr{A})} H$ (in $\boldsymbol{D}'$).*

Dimostrazione. G è un'equivalenza fra $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}'$.

4. - Strutture su un funtore. Famiglie uniformi di interpretazioni.

Sia $\boldsymbol{D}$ una categoria con prodotti finiti, $\boldsymbol{C}$ una categoria arbitraria. Allora anche $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$ possiede i prodotti finiti, formati puntualmente. Più esplicitamente, supponiamo, come al solito ([4]), di aver scelto in $\boldsymbol{D}$ i prodotti; possiamo allora eseguire una scelta « puntuale » in $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$ come segue:

$$\begin{cases} (F \times G)(X) = F(X) \times G(X)\,, \\ (F \times G)(f) \;= F(f) \times G(f)\,, \\ \varepsilon_i^{\langle F, G \rangle}(X) \;\;= \varepsilon_i^{\langle F(X), G(X) \rangle}\,, \end{cases} \qquad (X \in |\boldsymbol{C}|;\ F, G \in |\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}|;\ f \in \operatorname{Mor} \boldsymbol{C})\,. \tag{9}$$

([4]) Per il simbolismo, si veda [**4**].

Osservazione. Sia $X \in |C|$. Indichiamo con X' il «funtore valutazione in X», definito da

$$\begin{cases} X'(F) = F(X)\,, \\ X'(\varphi) = \varphi_X\,, \end{cases} \qquad (G, F\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}\ ;\ \varphi\colon F \to G)\,.$$

Le (9) implicano allora che il funtore X' conservi i prodotti finiti.

Sia $\mathscr{A}\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}(\mathscr{L})$ un funtore che associa a ciascun $X \in |\boldsymbol{C}|$ una $\mathscr{L}$-struttura, $\mathscr{A}_X$ (in $\boldsymbol{D}$) e a ciascun morfismo $f\colon X \to Y$ un omomorfismo di $\mathscr{L}$-strutture $\mathscr{A}_f\colon \mathscr{A}_X \to \mathscr{A}_Y$. Con queste notazioni diremo che la famiglia $(\mathscr{A}_X)_{X\in|C|}$ è una *famiglia* $\boldsymbol{C}$*-uniforme di* $\mathscr{L}$*-strutture (in* $\boldsymbol{D}$*)*. Sia data ora, per ciascuna struttura $\mathscr{A}_X$ della famiglia uniforme, una interpretazione $\mathscr{A}^*_X$ ad essa associata. Diremo che la famiglia $(\mathscr{A}^*_X)_{X\in|C|}$ è una *famiglia uniforme di interpretazioni associata alla famiglia* $(\mathscr{A}_X)_{X\in|C|}$, se per ogni morfismo $f\colon X \to Y$ in $\boldsymbol{C}$, $\mathscr{A}_f\colon \mathscr{A}^*_X \to \mathscr{A}^*_Y$ è un omomorfismo di $\mathscr{L}$-interpretazioni. In altri termini, una famiglia uniforme di interpretazioni è un funtore $\mathscr{A}^*\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}(\mathscr{L})$ ed essa è associata ad $\mathscr{A}$ se è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C} \arrow[rr, "\mathscr{A}"] \arrow[dr, "\mathscr{A}^*"'] & & \boldsymbol{D}\,(\mathscr{L}) \\ & \boldsymbol{D}\,(\mathscr{L}^*) \arrow[ur, "U^*"'] & \end{tikzcd}$$

dove U^* è il dimenticante.

Definizione. Sia $(\mathscr{A}_X)_{X\in|C|}$ una famiglia $\boldsymbol{C}$-uniforme di $\mathscr{L}$-strutture in $\boldsymbol{D}$ e sia H una SH di $\mathscr{L}$. Diremo che H è *uniformemente vera in* $(\mathscr{A}_X)_{X\in|C|}$, e scriveremo

$$\overset{X\in C}{\underset{\mathscr{A}_X}{\models}} H$$

se esiste una famiglia uniforme di interpretazioni associata ad $(\mathscr{A}_X)_{X\in|C|}$, nelle quali H sia vera.

Sia $F\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ e sia $\mathscr{F}$ una $\mathscr{L}$-struttura (in $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$) su F. Diremo che essa è *monopuntuale* se per ogni predicato m-ario P, la sua interpretazione $\varphi\colon G \rightarrowtail F^m$ è monopuntuale, cioè φ_X è un monomorfismo per ogni $X \in |\boldsymbol{C}|$.

Osservazione. Con le notazioni dell'osservazione precedente, dire che $\mathscr{F}$ ha una struttura monopuntuale, equivale a dire che, per ogni X, il funtore valutazione X' conserva i monomorfismi che definiscono le interpretazioni dei predicati.

Se $\mathscr{F}$ è una $\mathscr{L}$-struttura monopuntuale su F, per ogni $X \in |\boldsymbol{C}|$, in virtù delle osservazioni precedenti, $X'(\mathscr{F})$ ha una $\mathscr{L}$-struttura, cioè $X'(\mathscr{F}) \in |\boldsymbol{D}(\mathscr{L})|$, diciamo $X'(\mathscr{F}) = \langle F(X), \Phi_X \rangle$. Se poi $X \xrightarrow{f} Y$, f' (definito in analogia con X') è una trasformazione naturale fra X' ed Y', perciò $f'_F \colon X'(\mathscr{F}) \to Y'(\mathscr{F})$. Definiamo allora $\mathscr{A} \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}(\mathscr{L})$ come segue:

$$\begin{cases} \mathscr{A}(X) = X'(\mathscr{F}) \,, \\ \mathscr{A}(f) \;\; = f'_F \,. \end{cases}$$

A partire da $\mathscr{F}$ si è ottenuta così una famiglia $\boldsymbol{C}$-uniforme di strutture $\mathscr{A}$, tale che $U \circ \mathscr{A} = F$, dove $U \colon \boldsymbol{D}(\mathscr{L}) \to \boldsymbol{D}$ è il dimenticante. Analogamente, se $\mathscr{F}^*$ è una $\mathscr{L}$-interpretazione associata ad $\mathscr{F}$, allora $\mathscr{A}^* \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}(\mathscr{L}^*)$, definito puntualmente, è una famiglia uniforme di interpretazioni associata ad $\mathscr{A}$.

Viceversa, mostriamo che questa è l'unica via per ottenere famiglie uniformi di strutture e di interpretazioni. Sia infatti $\mathscr{A} \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}(\mathscr{L})$ una famiglia uniforme di strutture. Detto $U \colon \boldsymbol{D}(\mathscr{L}) \to \boldsymbol{D}$ il dimenticante, poniamo $F = U \circ \mathscr{A}$. Mostriamo che esiste una ed una sola struttura monopuntuale $\mathscr{F}$ su F tale che la famiglia uniforme ad essa associata sia $\mathscr{A}$. Preso $X \in |\boldsymbol{C}|$, $\mathscr{A}_X$ è per ipotesi una $\mathscr{L}$-struttura, diciamo $\mathscr{A}_X = \langle A_X, \Phi_X \rangle$. Allora $F(X) = A_X$. Se $P \in \Omega(m)$, supponiamo che $\Phi_X(P)$ sia rappresentata da $R_X \rightarrowtail^{u_X} A_X^m$. Dall'ipotesi che $\mathscr{A}$ sia uniforme, segue che per ogni morfismo $f \colon X \to Y$, $F(f) = U(\mathscr{A}_f) \colon A_X \to A_Y$ è un omomorfismo di $\mathscr{L}$-strutture; esiste cioè un (unico) morfismo $g_f \colon R_X \to R_Y$ tale che sia commutativo il diagramma

(10)
$$\begin{tikzcd} R_X \arrow[r, tail, "u_X"] \arrow[d, "g_f"'] & A_X^m \arrow[d, "F(f)^m = F^m(f)"] \\ R_Y \arrow[r, tail, "u_Y"] & A_Y^m \end{tikzcd}$$

Definendo $G(X) = R_X$ e $G(f) = g_f$, si verifica facilmente che $G \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$, mentre la (10) prova che $u \colon G \to F^m$ è una trasformazione naturale. Consideriamo allora $G \xrightarrow{u} F^m$ come l'interpretazione in $\mathscr{F}$ di P; essa è ovviamente monopuntuale, essendo u_X un monomorfismo per ogni X. Considerazioni analoghe valgono per le interpretazioni. Possiamo dunque riassumere nella

Proposizione 3. *C'è corrispondenza biunivoca fra le $\mathscr{L}$-strutture (interpretazioni) su $F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ e le famiglie uniformi di strutture (interpretazioni) $\mathscr{A}$ tali che $U \circ \mathscr{A} = F$. Inoltre una interpretazione Φ^* su F è associata ad una struttura Φ su F se e solo se per le corrispondenti famiglie uniformi $\mathscr{A}^*$ ed $\mathscr{A}$ si ha $\mathscr{A} = U^* \circ \mathscr{A}^*$.*

5. - Il bifuntore G.

Il presente paragrafo è dedicato ad una generalizzazione dei risultati contenuti nel n. 8 di [**5**].

In tutto il paragrafo supporremo $\boldsymbol{D}$ arbitraria, $\boldsymbol{C}$ con prodotti finiti e soddisfacente la seguente ipotesi

$$(\boldsymbol{C}) \qquad h^1 = \boldsymbol{C}[1, -] \text{ è pieno e fedele },$$

dove 1 è un oggetto finale di $\boldsymbol{C}$. Osserviamo che dalla $(\boldsymbol{C})$ segue

$$(\boldsymbol{C}') \qquad \text{Se } \boldsymbol{C}[1, E] = \emptyset, \text{ allora } E \text{ è iniziale }.$$

Indicheremo inoltre con

$$G: \boldsymbol{D}^{\mathrm{op}} \times \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$$

un bifuntore tale che

$$h^1 \circ G \approx \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{D}} \tag{11}$$

e sia

$$\Phi_{-,-}: \boldsymbol{D}[-, -] \to \boldsymbol{C}[1, G(-, -)]$$

un isomorfismo naturale.

Un esempio notevole di bifuntore soddisfacente la (11) è $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{D}}$, dove $\boldsymbol{C}$ è la categoria $\mathscr{S}$ degli insiemi. Un altro esempio si ha se $\boldsymbol{D}$ è cartesianamente chiusa, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ soddisfa la $(\boldsymbol{C})$ e $G(x, y) = y^x$. La condizione (11) è soddisfatta in virtù dell'aggiunzione

$$\frac{1 \to A^B}{B \times 1 \to A}$$

essendo $B \times 1 \approx B$.

Indicheremo con $\hat{G}\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{D}^{\mathrm{op}}}$ il monofuntore associato a G nell'aggiunzione dell'esponenziale. Più esplicitamente, valga la

$$\hat{G}(x)(y) = G(y, x) \qquad (x, y \in \boldsymbol{D}) . \tag{12}$$

Nel primo dei due esempi citati, $\hat{G}$ risulta l'immersione di YONEDA.

Teorema 4. *Il funtore $\hat{G}$ è pieno.*

Dimostrazione. Sia $\varphi\colon \hat{G}(D) \to \hat{G}(D')$, con $D, D' \in |\boldsymbol{D}|$. Allora $\varphi_D\colon G(D, D) \to G(D, D')$. Poichè $\Phi_{D,D}\colon \boldsymbol{D}[D, D] \to \boldsymbol{C}[1, G(D, D)]$, posto $\varrho_D = \Phi_{D,D}(1_D)$, si ha $\varrho_D\colon 1 \to G(D, D)$ e quindi $\varphi_D \varrho_D\colon 1 \to G(D, D')$. Posto $f = \Phi^{-1}_{D,D'}(\varphi_D \varrho_D)$, si avrà $f\colon D \to D'$; l'asserto sarà provato, se dimostriamo che $\varphi = \hat{G}(f)$, cioè $\varphi_X = G(X, f)$. Poichè h^1 è fedele, basterà dimostrare che $h^1(\varphi_X) = h^1(G(X, f))$, cioè

$$\boldsymbol{C}[1, \varphi_X] = \boldsymbol{C}[1, G(X, f)] \qquad (X \in |\boldsymbol{D}|) . \tag{13}$$

Si osservi che, essendo Φ una trasformazione naturale, è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{D}[X, D] \arrow[r, "\Phi_{X,D}"] \arrow[d, "{\boldsymbol{D}[X, f]}"'] & \boldsymbol{C}[1, G(X, D)] \arrow[d, "{\boldsymbol{C}[1, G(X, f)]}"] \\ \boldsymbol{D}[X, D'] \arrow[r, "\Phi_{X,D'}"] & \boldsymbol{C}[1, G(X, D')] \end{tikzcd}$$

Essendo $\Phi_{X,D}$ e $\Phi_{X,D'}$ biiezioni, la (13) equivale allora a provare che è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{D}[X, D] \arrow[r, "\Phi_{X,D}"] \arrow[d, "{\boldsymbol{D}[X, f]}"'] & \boldsymbol{C}[1, G(X, D)] \arrow[d, "{\boldsymbol{C}[1, \varphi_X]}"] \\ \boldsymbol{D}[X, D'] \arrow[r, "\Phi_{X,D'}"] & \boldsymbol{C}[1, G(X, D')] \end{tikzcd}$$

e cioè la

$$\varphi_X \Phi_{X,D}(\alpha) = \Phi_{X,D'}(f\alpha) \qquad (\alpha\colon X \to D)\,. \tag{14}$$

Ora, la φ è una trasformazione naturale, quindi $\varphi_X G(\alpha, D) = G(\alpha, D')\varphi_D$, da cui

$$h^1(\varphi_X) \circ h^1\big(G(\alpha, D)\big) \circ \Phi_{D,D} = h^1\big(G(\alpha, D')\big) \circ h^1(\varphi_D) \circ \Phi_{D,D}\,,$$

e quindi

$$h^1(\varphi_X) \circ \Phi_{X,D} \circ \boldsymbol{D}[\alpha, D] = h^1\big(G(\alpha, D')\big) \circ h^1(\varphi_D) \circ \Phi_{D,D}\,, \tag{15}$$

giacchè Φ è naturale. Applicando ambo i membri della (15) ad 1_D, si ottiene appunto la (14).

Teorema 5. *$\hat{G}$ è fedele.*

Dimostrazione. Siano $f, g\colon D \to D'$ tali che $\hat{G}(f) = \hat{G}(g)$. Per ogni $X \in |\boldsymbol{D}|$ si avrà allora $G(X, f) = G(X, g)$, da cui

$$\boldsymbol{C}[1, G(X, f)] \circ \Phi_{X,D} = \boldsymbol{C}[1, G(X, g)] \circ \Phi_{X,D}$$

e quindi

$$\Phi_{X,D'} \circ \boldsymbol{D}[X, f] = \Phi_{X,D'} \circ \boldsymbol{D}[X, g] \qquad (X \in |\boldsymbol{D}|)\,. \tag{16}$$

Ponendo $X = D$ nella (16) ed applicando ambo i membri dell'uguaglianza ottenuta ad 1_D, si ottiene $\Phi_{D,D'}(f) = \Phi_{D,D'}(g)$, da cui $f = g$.

Teorema 6. *Sia $\boldsymbol{I}$ uno schema di diagrammi e sia $F\colon \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{D}$ un diagramma in $\boldsymbol{D}$. Allora L è un limite per F se e solo se per ogni $X \in |\boldsymbol{D}|$, $G(X, L)$ è un limite per $G(X, -) \circ F$.*

Dimostrazione. Sia $L = \varprojlim F$. È noto che il funtore $\boldsymbol{D}[X, -]$ conserva i limiti, quindi $\boldsymbol{D}[X, L] = \varprojlim \boldsymbol{D}[X, -] \circ F = \varprojlim \boldsymbol{D}[X, F(-)]$. Per la condizione (11) su G, si ha allora $h^1\big(G(X, L)\big) = \varprojlim h^1\Big(G\big(X, F(-)\big)\Big)$. In virtù della condizione ($\boldsymbol{C}$), h^1 riflette i limiti, quindi $G(X, L)$ è un limite per $G\big(X, F(-)\big) = G(X, -) \circ F$.

Per il viceversa, supponiamo che la famiglia

$$\big(L \xrightarrow{p_i} F_i\big)_{i \in |I|} \tag{17}$$

sia tale che per ogni $X \in |\boldsymbol{D}|$,

$$G(X, L) \xrightarrow{G(X, p_i)} G(X, F_i) \tag{18_X}$$

sia un limite per $G(X, F(-))$. Mostriamo allora che la famiglia (17) è compatibile per F e universale.

Sia $m\colon i \to j \in \boldsymbol{I}$. Allora

$$G(X, F(m))\, G(X, p_i) = G(X, p_j) \qquad (X \in |\boldsymbol{D}|)\,. \tag{19}$$

In particolare la (19) vale per $X = L$, da cui

$$h^1\big(G(L, F(m))\big) \circ h^1(G(L, p_i)) \circ \Phi_{L,L} = h^1(G(L, p_j)) \circ \Phi_{L,L}\,. \tag{20}$$

Essendo Φ naturale, la (20) fornisce

$$\Phi_{L,F_j} \circ \boldsymbol{D}[L, F(m)] \circ \boldsymbol{D}[L, p_i] = \Phi_{L,F_j} \circ \boldsymbol{D}[L, p_j]$$

e quindi

$$\boldsymbol{D}[L, F(m)] \circ \boldsymbol{D}[L, p_i] = \boldsymbol{D}[L, p_j]\,. \tag{21}$$

Applicando ambo i membri della (21) ad 1_L si ottiene $F(m)p_i = p_j$, quindi la famiglia (17) è compatibile per F.

Sia ora $(E \xrightarrow{q_i} F_i)_{i \in |I|}$ una famiglia compatibile per F. Poichè $G(E, -)$ è un funtore, la famiglia $G(E, E) \xrightarrow{G(E, q_i)} G(E, F_i)$ è compatibile per $G(E, F(-))$. Essendo (18_E) un limite per questo funtore, esisterà un $k\colon G(E, E) \to G(E, L)$ tale che

$$G(E, p_i)\, k = G(E, q_i) \qquad (i \in |\boldsymbol{I}|)\,. \tag{22}$$

Si ha $\boldsymbol{D}[E, E] \xrightarrow{\Phi_{E,E}} h^1(G(E, E)) \xrightarrow{h^1(k)} h^1(G(E, L)) \xrightarrow{\Phi^{-1}_{E,L}} \boldsymbol{D}[E, L]$. Poniamo

$$q = \Phi^{-1}_{E,L}(k\Phi_{E,E}(1_E))\colon E \to L\,, \tag{23}$$

cioè

$$\Phi_{E,L}(q) = k\Phi_{E,E}(1_E) \tag{24}$$

e mostriamo che

$$p_i q = q_i \qquad (i \in |\boldsymbol{I}|) \tag{25}$$

e che ogni q soddisfacente la (25) ha l'espressione (23). Si ha

$$\Phi_{E,F_i}(p_i q) = \big(\Phi_{E,F_i} \circ \boldsymbol{D}[E, p_i]\big)(q) = \big(\boldsymbol{C}[1, G(E, p_i)] \circ \Phi_{E,L}\big)(q) =$$

$$= \boldsymbol{C}[1, G(E, p_i)]\big(\Phi_{E,L}(q)\big) = G(E, p_i)\, \Phi_{E,L}(q) ;$$

analogamente si ha:

$$\Phi_{E,F_i}(q_i) = G(E, q_i)\, \Phi_{E,E}(1_E) .$$

Per la (24) e la (22) si ha allora:

$$\Phi_{E,F_i}(p_i q) = \Phi_{E,F_i}(q_i) , \tag{26}$$

da cui la (25). Supponiamo infine che q soddisfi la (25). Allora vale la (26), quindi, tenuto conto della (22), $G(E, p_i)\, k\Phi_{E,E}(1_E) = G(E, p_i)\, \Phi_{E,L}(q)$. Essendo $\big(G(E, p_i)\big)_{i \in |I|}$ la famiglia dei morfismi canonici del limite (18), ne segue $k\Phi_{E,E}(1_E) = \Phi_{E,L}(q)$, da cui la (23).

Più che il Teorema 6, avranno per noi interesse i seguenti due teoremi che ne sono ovvi corollari.

Teorema 7. *Per ogni $X \in |\boldsymbol{D}|$, il funtore $G(X, —)$ conserva i monomorfismi.*

Corollario. *Il funtore $\hat{G}$ conserva i monomorfismi.*

Dimostrazione. Se u è un monomorfismo, $\hat{G}(u)$ è una trasformazione naturale monopuntuale.

Teorema 8. *Per ogni $X \in |\boldsymbol{D}|$, il funtore $G(X, —)$ conserva i prodotti finiti.*

Corollario. *Il funtore $\hat{G}$ conserva i prodotti finiti.*

Osservazione. In virtù del Teorema 8, il morfismo canonico $G(X, A^n) \to$ $\to G(X, A)^n$ è un isomorfismo. Lo indicheremo con α_n^X e indicheremo con β_n^X il suo inverso. Essi sono naturali in X, cioè α_n^- realizza l'isomorfismo canonico $\hat{G}(A^n) \to \hat{G}(A)^n$.

Passiamo ora alla considerazione delle $\mathscr{L}$-strutture e delle formule SH. Premettiamo anzitutto il seguente

Lemma 6. *Sia* $\mathscr{B}^* = \langle B, \Psi^* \rangle$ *una* $\mathscr{L}$*-interpretazione in* $\boldsymbol{C}$, *sia* H_0 *una* SH *atomica di rango* n *e sia* $\xi: E \to B^n$. *Allora* $\models_{\mathscr{B}^*} H_0[\xi]$ *se e solo se per ogni* $x: 1 \to E$ *si ha* $\models_{\mathscr{B}^*} H_0[\xi x]$.

Dimostrazione. Ovviamente se ξ soddisfa H_0, allora anche ξx la soddisfa. Per il viceversa, preso $x: 1 \to E$, $\models_{\mathscr{B}^*} H_0[\xi x]$ significa che esiste un $y_x: 1 \to R$ (5) tale che

$$\{t_1, \ldots, t_m\} \xi x = u y_x \qquad (x: 1 \to E) . \tag{27}$$

Posto $y: x \leadsto y_x$, si ha $y: \boldsymbol{C}[1, E] \to \boldsymbol{C}[1, R]$; essendo h^1 pieno, esiste un $k: E \to R$ tale che $y_x = kx$, per ogni $x: 1 \to E$. La (27) fornisce allora $\{t_1, \ldots, t_m\} \xi x = ukx$ e quindi $\{t_1, \ldots, t_m\} \xi = uk$, essendo 1 un generatore.

Sia ora $\mathscr{A} = \langle A, \Psi \rangle$ una $\mathscr{L}$-struttura in $\boldsymbol{D}$. Poichè $\hat{G}$ conserva prodotti finiti e monomorfismi, secondo le considerazioni del n. 2, esso induce una $\mathscr{L}$-struttura $\hat{G}(\mathscr{A}) = \langle \hat{G}(A), \Psi_{\hat{G}} \rangle$. Analogamente, ogni interpretazione $\mathscr{A}^* = \langle A, \Psi^* \rangle$ associata ad $\mathscr{A}$ dà luogo ad una interpretazione $\hat{G}(\mathscr{A}^*) = \langle \hat{G}(A), \Psi^*_{\hat{G}} \rangle$ associata a $\hat{G}(\mathscr{A})$; essendo inoltre $\hat{G}$ pieno e fedele si ha che, viceversa, per ogni interpretazione $\hat{G}(\mathscr{A})^*$ associata a $\hat{G}(\mathscr{A})$ esiste una ed una sola interpretazione $\mathscr{A}^*$ associata ad $\mathscr{A}$ tale che $\hat{G}(\mathscr{A}^*) = \hat{G}(\mathscr{A})^*$. Dunque, dare un'interpretazione associata ad $\mathscr{A}$ equivale a darne una associata a $\hat{G}(\mathscr{A})$. Per le considerazioni nel n. 4, $\hat{G}(\mathscr{A})$ fornisce poi una famiglia uniforme di strutture $\mathscr{A}_X = G(X, \mathscr{A}) = \langle G(X, A) \, \Psi_X \rangle$, dove $\Psi_X(P)$ è rappresentata da:

$$u_X = \alpha^X_m G(X, u): G(X, R) \rightarrowtail G(X, A^m) \xrightarrow{\approx} G(X, A)^m ,$$

se $R \xrightarrow{u} A^m$ rappresenta $\Psi(P)$. Ricordiamo poi (cfr. n. 4) che le famiglie uniformi di interpretazioni $\mathscr{A}^*_X$ associate alla famiglia $\mathscr{A}_X$ sono determinate biunivocamente dalle interpretazioni $\hat{G}(\mathscr{A})^*$ associate a $\hat{G}(\mathscr{A})$ e quindi, in ultima analisi, dalle interpretazioni $\mathscr{A}^*$ associate ad $\mathscr{A}$. Vale la pena di sottolineare inoltre che se f ha in $\mathscr{A}^*$ l'interpretazione $\omega: A^n \to A$, allora in $\mathscr{A}^*_X$ esso ha l'interpretazione $\omega_X = G(X, \omega) \beta^X_n$. Dai risultati precedenti si ricava poi, per ogni termine n-ario t,

$$t_X = G(X, t) \beta^X_n \tag{28}$$

ove col medesimo simbolo t si indica un termine e la sua interpretazione $\Psi^*(t)$

(5) Supponiamo che H_0 sia $P(t_1, \ldots, t_m)$ e che $u: R \rightarrowtail B^m$ sia l'interpretazione di P in $\mathscr{B}^*$. Indichiamo con t_j anche l'interpretazione di t_j in $\mathscr{B}^*$.

in $\mathscr{A}^*$, mentre con t_X si indica $\Psi_X^*(t)$. Infine, se $t^1, \dots, t^m$ sono termini n-ari, si ha:

$$G(X, \{t^1, \dots, t^m\}) = \beta_m^X \{t_X^1, \dots, t_X^m\} \alpha_n^X . \tag{29}$$

Lemma 7. *Sia H_0 atomica di rango n. Per ogni $g: X \to A^n$, si ponga $\hat{g} = \alpha_n^X \Phi_{X,A^n}(g): 1 \to G(X, A)^n$. Con tali notazioni si ha:*

$$\models_{\mathscr{A}^*} H_0[g] \quad \textit{se e solo se} \quad \models_{\mathscr{A}_X^*} H_0[\hat{g}] .$$

Dimostrazione. Supponiamo che H_0 sia $P(t^1, \dots, t^m)$. Se $x: 1 \to G(X, R_P)$ e $y: X \to R$, con $x = \Phi_{X,R}(y)$, allora sono equivalenti i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
&\{t_X^1, \dots, t_X^m\} \hat{g} = \{t_X^1, \dots, t_X^m\} \alpha_n^X \Phi_{X,A^n}(g) = \alpha_m^X G(X, u) x ; \\
&G(X, \{t^1, \dots, t^m\}) \Phi_{X,A^n}(g) = \boldsymbol{C}[1, G(X, u)](x) ; \\
&(\boldsymbol{C}[1, G(X, \{t^1, \dots, t^m\})] \circ \Phi_{X,A^n})(g) = (\boldsymbol{C}[1, G(X, u)] \circ \Phi_{X,R})(y) ; \\
&\Phi_{X,A^m}(\boldsymbol{D}[X, \{t^1, \dots, t^m\}](g)) = \Phi_{X,A^m}(\boldsymbol{D}[X, u](y)) ; \\
&\{t^1, \dots, t^m\} g = uy .
\end{aligned}$$

Essendo $\Phi_{X,R}$ una biiezione, ne segue che $\{t_X^1, \dots, t_X^m\} \hat{g} \leqslant \alpha_m^X G(X, u)$ se e solo se $\{t^1, \dots, t^m\} g \leqslant u$, cioè l'asserto.

Corollario 1. *Sia H una* SH *vera in $\mathscr{A}_X^*$, per ogni $X \in |\boldsymbol{D}|$. Allora H è vera in $\mathscr{A}^*$.*

Dimostrazione. Supponiamo $H = H_1 \wedge \dots \wedge H_r \to H_0$ e sia $g: X \to A^n$. Ragionando come nel Teorema 1, da $\models_{\mathscr{A}_X^*} H[\hat{g}]$ e dal Lemma 7 si ottiene $\models_{\mathscr{A}^*} H[g]$. L'asserto resta così provato per le SHE. Per le SH qualunque, esso segue ora dall'osservazione 1 di [**5**].

Corollario 2. *Sia $\xi: E \to G(X, A)^n$ e sia $x: 1 \to E$. Posto $g_x = \Phi_{X,A^n}^{-1}(\beta_n^X \xi x)$, si ha che $\models_{\mathscr{A}^*} H_0[g_x]$ se e solo se $\models_{\mathscr{A}_X^*} H_0[\xi x]$.*

Dimostrazione. Segue banalmente dal Lemma 7, osservando che $\hat{g}_x = \xi x$.

Il Corollario 1 si può ora invertire come segue.

Corollario 3. *Sia H una* SH *vera in $\mathscr{A}^*$ e sia $X \in |\boldsymbol{D}|$. Allora H è vera in $\mathscr{A}_X^*$.*

Dimostrazione. In virtù dell'osservazione 1 di [5] è sufficiente dimostrare l'asserto per le SHE. Se H è $H_1 \wedge \ldots \wedge H_r \to H_0$ e

$$\models_{\mathcal{A}^*} H\,, \tag{30}$$

prendiamo $\xi\colon E \to G(X, A)^n$ tale che $\models_{\mathcal{A}_X^*} H_1 \wedge \ldots \wedge H_r[\xi]$. Per il Lemma 6 si ha che per ogni $x\colon 1 \to E$, è $\models_{\mathcal{A}_X^*} H_1 \wedge \ldots \wedge H_r[\xi x]$, quindi $\forall x$, $\models_{\mathcal{A}^*} H_1 \wedge \ldots \wedge H_r[g_x]$ in virtù del Corollario 2. Dalla (30) segue allora $\models_{\mathcal{A}^*} H_0[g_x]$, $\forall x$, da cui l'asserto, ancora per il Corollario 2 e il Lemma 6.

Tenendo presente la definizione data nel n. 4 sulla verità uniforme, i Corollari 1 e 3 permettono finalmente di formulare il seguente

Teorema 7. *Una* SH *è vera in* $\mathscr{A}$ *se e soltanto se è uniformemente vera nelle* $\mathscr{A}_X$ $(X \in \boldsymbol{D})$.

Come nel n. 8 di [**5**], possiamo aggiungere che la verità in $\mathscr{A}$ di una SH universale si riconduce alla sua verità in tutte le $\mathscr{A}_X$.

Bibliografia.

[1] C. Marchini, *Funtori che conservano e riflettono le formule di Horn*, (in corso di stampa sugli Atti del Seminario di Matematica e Fisica dell'Università di Modena.)

[2] T. Montali, *Un'osservazione sui funtori che conservano i prodotti finiti*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2) **11** (1970), 239-243.

[3] B. Pareigis, *Categories and Functors*, Academic Press, 1970.

[4] M. Servi, *Questioni di algebra universale in una categoria astratta*, I, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII, **13**, 9 (1969), 93-116.

[5] M. Servi, *Una questione di teoria dei modelli nelle categorie con prodotti finiti*, Matematiche (Catania) **26**, 2 (1971), 307-324.

Summary.

We extend some results of [**5**]. *We first prove that if G is a functor having a left adjoint, then G preserves the truth of* SH's; *as a special case it follows that if H is an* SH, *true in some structure A, then it is also true in A^B. Secondly, we consider a bifunctor G satisfying suitable hypotheses (which are true for the functor* Mor [—, —]); *for it we prove that if H is an* SH *and if A has an $\mathscr{L}$-structure, then H is true in A iff it is «uniformly true» in the $G(X, A)$'s with the induced structures.*

* * *