Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 273-290

CORRADO SCARAVELLI (*)

Stretto legame fra equazioni alle prederivate ed equazioni differenziali quando le equazioni sono lineari e a coefficienti costanti.

Parte II - Caso di un ordine finito qualsiasi. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

§ 1. - Introduzione.

In questa Nota, che completa la trattazione iniziata in [**5**] limitatamente al caso delle equazioni del primo ordine, passo a considerare il caso generale delle equazioni di un ordine finito qualsiasi.

Analogamente a quanto ho fatto in [**5**], detto h il passo, pongo in parallelismo le due seguenti equazioni [nelle incognite rispettive $u(x; h)$ e $v(x)$]:

$$(1)_f \qquad p_0 u^{(n;h)}(x; h) + p_1 u^{(n-1;h)}(x; h) + \ldots + \\ + p_{n-1} u^{(1;h)}(x; h) + p_n u(x; h) = f(x) ,$$

$$(1)'_f \qquad p_0 v^{(n)}(x) + p_1 v^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1} v'(x) + p_n v(x) = f(x) .$$

La $(1)_f$ è un'equazione alle prederivate (¹), la $(1)'_f$ è un'equazione differenziale; entrambe le equazioni sono di ordine n, lineari, con gli *stessi* coefficienti p_r

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito col contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni. Ricevuto: 20-XII-1973.

(¹) Sulla definizione di equazione alle prederivate cfr. [**4**].

$(r = 0, 1, 2, \dots, n)$, e lo *stesso* termine noto $f(x)$. Nel caso particolare $f(x) \equiv 0$ si hanno poi le due equazioni omogenee $(1)_0$ ed $(1)'_0$.

Ipotesi: 1°) I coefficienti $p_0 \neq 0, p_1, p_2, \dots, p_n$ (reali o complessi) sono costanti tanto rispetto ad x che rispetto ad h.

2°) La funzione $f(x)$ è indipendente da h, è definita in un intervallo (non nullo) $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, ed ivi è ***integrabile secondo Mengoli e Cauchy*** (2).

3°) Per il passo h si ha: $0 < nh < x_1 - x_0$ (3).

Sotto queste ipotesi, dimostro i due Teoremi seguenti:

Teorema I. *Si ha:*

$$\lim_{h \to 0+} \mathscr{F}(x; h) = F(x) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1), \tag{2}$$

dove:

$\mathscr{F}(x; h)$ è la soluzione particolare (elementare) $(6)_f$ (v. n. **2.1**) *dell'equazione alle prederivate* $(1)_f$;

$F(x)$ è la soluzione particolare $(6)'_f$ (v. n. **2.2**) *dell'equazione differenziale* $(1)'_f$.

Inoltre, la tendenza espressa da (2) *è uniforme rispetto alla variabile x.*

Teorema II. *Si ha:*

$$\lim_{h \to 0+} \mathscr{U}_m(x; h) = V_1(x) \qquad (m = 1, 2, \dots, n;\ -\infty < x < +\infty), \tag{3}$$

dove:

$\mathscr{U}_m(x; h)$ $(m = 1, 2, \dots, n)$ sono le soluzioni particolari (elementari) $(7)_0$ (v. n. **2.1**) *dell'equazione omogenea alle prederivate* $(1)_0$;

$V_1(x)$ è la soluzione particolare $(7)'_0$ *(per $m = 1$:* v. n. **2.2**) *dell'equazione omogenea differenziale* $(1)'_0$.

Inoltre, la tendenza espressa da (3) *è uniforme rispetto alla variabile x in ogni intervallo limitato* (4).

Precisamente, qui, dopo alcuni richiami ed un'utile osservazione (cfr. § **2**), nei §§ **3** e **4** dò le dimostrazioni dei Teoremi I e II per gli ordini $n = 2$ e $n = 3$ rispettivamente. Da tali dimostrazioni risulta evidente come procedere

(2) Cfr. annotazione (2) di [**5**].

(3) Nel caso $x_0 - x_1 < nh < 0$ si ragiona analogamente (cfr. [**3**]).

(4) Si noterà, nella (3), una asimmetria: $\mathscr{U}_m(x; h)$ tende a $V_1(x)$ anzichè a $V_m(x)$, come ci si potrebbe aspettare. Credo, però, che questa asimmetria si possa togliere (come spero di mostrare in un prossimo lavoro) impostando un po' diversamente alcune considerazioni precedenti (cfr. [**3**], [**4**]).

nel caso di un ordine n qualsiasi, per il quale mi limito ad una descrizione pura e semplice del procedimento dimostrativo (v. § **5**). Nell'Appendice, infine (v. § **6**), giustifico l'espressione $(5)'$ delle quantità A_s (v. n. **2.1**), che utilizzo nelle dimostrazioni stesse.

§ 2. - Alcuni richiami, ed una osservazione.

2.1. - Richiamo di un recente modo di risolvere la $(1)_f$ [e in particolare la $(1)_0$].

Recentemente, per l'equazione $(1)_f$, ho ottenuto la soluzione generale in forma razionale (cfr. [**4**]), che ho chiamato *la soluzione generale elementare*. Precisamente, ho posto (cfr. [**3**], [**4**]):

$$\nu = \nu_{(x-x_0)/h} = [\text{parte intera del rapporto } (x-x_0)/h]\,; \tag{4}$$

$$A_s = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \ldots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^r \binom{r}{r_1} \ldots \binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} a_0^{-r-1} a_1^{r-r_1} \ldots a_{n-1}^{r_{n-2}-r_{n-1}} a_n^{r_{n-1}} \varepsilon_{s-\sigma}\,, \tag{5}$$

dove:

$$s = 0, 1, 2, \ldots, \nu\,; \qquad \sigma = r + r_1 + \ldots + r_{n-1}\,, \qquad \varepsilon_{s-\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ per } s-\sigma = 0 \\ 0 \text{ per } s-\sigma \neq 0 \end{cases} \text{(5)},$$

$$a_\mu = \sum_0^\mu{}_r (-1)^{\mu-r} \binom{n-r}{\mu-r} p_r h^{r-n} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Indi ho trovato che:

« La soluzione generale elementare di $(1)_f$ è data da (cfr. [**4**])

$$u(x; h) = \mathscr{F}(x; h) + \mathscr{U}(x; h)\,,$$

dove:

La funzione $\mathscr{F}(x; h)$ è la soluzione particolare elementare [della $(1)_f$] così definita:

$$\mathscr{F}(x; h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (x_0 \ldots (x_0 + nh)-) \\ \sum_0^{\nu-n}{}_s A_s f(x-(n+s)h)\,, & x \in (x_0 + nh \ldots x_1)\,; \end{cases} \tag{6$_f$}$$

---

(5) Cfr. annotazione (5) di [**3**] (Parte II).

La funzione $\mathscr{U}(x; h)$ è la soluzione generale elementare, di $(1)_0$, così definita:

$$(6)_0 \qquad \mathscr{U}(x; h) = \sum_{1}^{n} {}_m\, \tilde{c}_m \mathscr{U}_m(x; h)\,, \qquad x \in (-\infty \ldots +\infty)\ (^6)\,,$$

con $\tilde{c}_m = \tilde{c}_m(x; h)$ arbitrarie costanti per l'incremento h, e

$$(7)_0 \qquad \mathscr{U}_m(x; h) = h^{-1} A_{\nu-m+1}\,, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.\ »$$

Per A_s, dato da (5), si ha anche [v. § **6** (Appendice), n. **6.2**]

$$(5)' \qquad A_s = p_0^{-1}\, h^n \sum_{0}^{s} {}_r \sum_{0}^{r} {}_{r_1} \ldots \sum_{0}^{r_{n-3}} {}_{r_{n-2}} (1 + \alpha_1 h)^{s-r} (1 + \alpha_2 h)^{r-r_1} \ldots$$

$$\ldots (1 + \alpha_{n-1} h)^{r_{n-3}-r_{n-2}} (1 + \alpha_n h)^{r_{n-2}}\,,$$

dove: $s = 0, 1, 2, \ldots, \nu$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono le radici dell'equazione caratteristica di $(1)_0$ [o di $(1)_0'$] (7).

2.2. - Un certo modo di risolvere la $(1)_f'$ [e in particolare la $(1)_0'$].

Per l'equazione $(1)_f'$ la soluzione generale è ben nota. È utile dare qui, però, a questa soluzione generale, una forma che si avvicini a quella della soluzione generale elementare di $(1)_f$. A tale scopo, utilizzando il lavoro [**2**], ottengo:

La soluzione generale di $(1)_f'$ è data da

$$v(x) = F(x) + V(x)\,,$$

dove, indicando sempre con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ le radici dell'equazione caratteristica di $(1)_0'$ [ossia di $(1)_0$] (8), si ha:

(6) Cfr. annotazione (5) di [**5**].

(7) Si tenga presente che, sia in $(5)'$ che nelle seguenti $(6)_f'$ e $(7)_0'$, per le n radici dell'equazione caratteristica (di grado n) della $(1)_0$ [o $(1)_0'$], non occorre sapere se tali radici sono semplici o multiple.

(8) Cfr. annotazione (7).

$F(x)$ è la soluzione particolare, della $(1)'_f$, data da

$$(6)'_f \quad F(x) = p_0^{-1} \exp(\alpha_n x) \int_{x_0}^{x} \exp((\alpha_{n-1} - \alpha_n) t_n) \, dt_n \int_{x_0}^{t_n} \exp((\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) t_{n-1}) \, dt_{n-1} \ldots$$

$$\ldots \int_{x_0}^{t_3} \exp((\alpha_1 - \alpha_2) t_2) \, dt_2 \int_{x_0}^{t_2} \exp(-\alpha_1 t_1) f(t_1) \, dt_1 \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1) ;$$

$V(x)$ è la soluzione generale, della $(1)'_0$, data da

$$(6)'_0 \qquad V(x) = \sum_{1}^{n} {}_m \, c_m V_m(x) , \qquad x \in (-\infty \ldots +\infty) ,$$

con c_m arbitrarie costanti, e

$$(7)'_0 \qquad V_m(x) = p_0^{-1} \exp(-\alpha_m x_0) \exp(\alpha_n x) \int_{x_0}^{x} \exp((\alpha_{n-1} - \alpha_n) t_n) \, dt_n$$

$$\int_{x_0}^{t_n} \exp((\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) t_{n-1}) \, dt_{n-1} \ldots \int_{x_0}^{t_{m+2}} \exp(\alpha_m - \alpha_{m+1}) t_{m+1}) \, dt_{m+1}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n-1) ,$$

$$V_n(x) = p_0^{-1} \exp(\alpha_n (x - x_0)) .$$

2.3. - Osservazione sull'utilità delle relazioni limiti (2) **e** (3).

Prima di passare a dimostrare le relazioni limiti (2) e (3), mi sembra opportuno un chiarimento sulla loro utilità.

1°) Circa la (2), va notato che nel suo primo membro *la funzione* $\mathscr{F}(x; h)$ *è sempre effettivamente nota*: infatti, nella $\mathscr{F}(x; h)$ [data da $(6)_f$] figurano le quantità A_s che, in virtù di (5), sono effettivamente note. Invece, nel secondo membro di (2) non si ha un'affermazione analoga per la funzione $F(x)$: infatti, nella $F(x)$ [data da $(6)'_f$] figurano i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ [radici dell'equazione caratteristica di $(1)'_0$] che, come è ben noto, si sa che esistono ma, in generale, non si conoscono effettivamente.

Pertanto [tenendo presente che nella (2) la convergenza è uniforme rispetto ad x] si conclude: *mediante la* (2) *si può ottenere, in ogni caso, la* $F(x)$ *con quella approssimazione che si desidera* (*approssimazione che risulta la stessa per tutti gli* x).

2°) Circa la (3), ragionando come a 1°), si conclude: *mediante la* (3) *si può ottenere, in ogni caso, la* $V_1(x)$ *con quella approssimazione che si desidera* (*approssimazione che risulta la stessa per tutti gli* x).

§ 3. - Dimostrazione dei Teoremi I e II per le equazioni del secondo ordine.

3.1. - Dimostrazione del Teorema I.

Riferendoci alle equazioni $(1)_f$ e $(1)'_f$ con $n=2$, si ha:

L'espressione di $\mathscr{F}(x; h)$ in $x_0+2h \leqslant x \leqslant x_1$ [data da $(6)_f$, per $n=2$] (⁹), con A_s nella forma $(5)'$ [si veda anche $(23)''$, n. **6.3**], è la seguente

$$(8) \qquad \mathscr{F}(x; h) = p_0^{-1} h^2 \sum_0^{\nu-2}{}_s \sum_0^{s}{}_r (1+\alpha_1 h)^{s-r}(1+\alpha_2 h)^r f\big(x-(s+2)h\big), \qquad x_0+2h \leqslant x \leqslant x_1 ;$$

l'espressione di $F(x)$ [data da $(6)'_f$, per $n=2$] è la seguente

$$(9) \qquad F(x) = p_0^{-1} \exp(\alpha_2 x) \int_{x_0}^{x} \exp\big((\alpha_1-\alpha_2)t_2\big)\,dt_2 \int_{x_0}^{t_2} \exp(-\alpha_1 t_1) f(t_1)\,dt_1, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1 .$$

Distinguo ora il caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$, dal caso $\alpha_1 = \alpha_2$.

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Con semplici passaggi, le (8) e (9) si scrivono rispettivamente

$$(8)' \qquad \begin{cases} \mathscr{F}(x; h) = \dfrac{p_0^{-1} h}{\alpha_1-\alpha_2} \displaystyle\sum_0^{\nu-2}{}_s (1+\alpha_1 h)^{s+1} f\big(x-(s+2)h\big) - \\ \qquad - \dfrac{p_0^{-1} h}{\alpha_1-\alpha_2} \displaystyle\sum_0^{\nu-2}{}_s (1+\alpha_2 h)^{s+1} f\big(x-(s+2)h\big), \qquad x_0+2h \leqslant x \leqslant x_1 ; \end{cases}$$

$$(9)' \qquad F(x) = \frac{p_0^{-1}\exp(\alpha_1 x)}{\alpha_1-\alpha_2} \int_{x_0}^{x} \exp(-\alpha_1 t_1) f(t_1)\,dt_1 - \frac{p_0^{-1}\exp(\alpha_2 x)}{\alpha_1-\alpha_2} \int_{x_0}^{x} \exp(-\alpha_2 t_2) f(t_2)\,dt_2, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1 .$$

(⁹) Essendo $\lim\limits_{h\to 0+}(x_0+2h) = x_0$, non interessa l'espressione (identicamente nulla) di $\mathscr{F}(x; h)$ in $x_0 \leqslant x < x_0+2h$.

Poichè ho già dimostrato (cfr. [5]) che è

$$\lim_{h\to 0+} p_0^{-1} h \sum_{0}^{\nu-1}{}_s (1+\alpha h)^s f(x-(s+1)h) = p_0^{-1} \exp(\alpha x) \int_{x_0}^{x} \exp(-\alpha t) f(t)\, dt\,, \tag{10}$$

uniformemente rispetto alla variabile x ($x_0 \leqslant x \leqslant x_1$) (e poichè, quando $h \to 0+$, $\nu \to +\infty$), si ha, manifestamente, che il secondo membro di $(8)'$ [cioè di (8)], quando $h \to 0+$, tende (uniformemente rispetto alla variabile x) al secondo membro di $(9)'$ [cioè di (9)]. Il Teorema I, per $\alpha_1 \neq \alpha_2$, è così dimostrato.

Caso $\alpha_1 = \alpha_2$.

Indicando con α il valore comune di α_1 e α_2, le espressioni di $\mathscr{F}(x;h)$ e $F(x)$ sono qui, in effetti, le seguenti

$$\mathscr{F}(x;h) = p_0^{-1} h^2 \sum_{0}^{\nu-2}{}_s (s+1)(1+\alpha h)^s f(x-(s+2)h)\,, \qquad x_0 + 2h \leqslant x \leqslant x_1\,, \tag{8$''$}$$

$$F(x) = p_0^{-1} \exp(\alpha x) \int_{x_0}^{x} dt_2 \int_{x_0}^{t_2} \exp(-\alpha t_1) f(t_1)\, dt_1\,, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1\,, \tag{9$''$}$$

che, con semplici passaggi, diventano rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(x;h) = {} & p_0^{-1} h\, (x-h) \sum_{0}^{\nu-2}{}_s (1+\alpha h)^s f(x-(s+2)h) - \\ & - p_0^{-1} h \sum_{0}^{\nu-2}{}_s (1+\alpha h)^s \big(x-(s+2)h\big)\, f(x-(s+2)h)\,, \end{aligned} \tag{8$'''$}$$

$$\begin{aligned} F(x) = {} & p_0^{-1} \exp(\alpha x)\, x \int_{x_0}^{x} \exp(-\alpha t_1) f(t_1)\, dt_1 - \\ & - p_0^{-1} \exp(\alpha x) \int_{x_0}^{x} \exp(-\alpha t_2)\, t_2 f(t_2)\, dt_2\,. \end{aligned} \tag{9$'''$}$$

In virtù di (10) si conclude ancora con l'asserto del Teorema I, per $\alpha_1 = \alpha_2$.

Il Teorema I è quindi completamente dimostrato per le equazioni $(1)_r$ e $(1)'_r$ con $n = 2$.

3.2. - Dimostrazione del Teorema II.

Riferendoci ora alle equazioni $(1)_0$ e $(1)'_0$ con $n=2$, si ha:

L'espressione di $\mathscr{U}_m(x;h)$ [data da $(7)_0$, per $n=2$], con $A_{\nu-m+1}$ nella forma $(5)'$ [si veda anche $(23)''$, n. **6.3**], è la seguente

$$\mathscr{U}_m(x;h)=p_0^{-1}h\sum_0^{\nu-m+1}{}_r(1+\alpha_1 h)^{\nu-m+1-r}(1+\alpha_2 h)^r \qquad (m=1,2); \tag{11}$$

l'espressione di $V_1(x)$ [data da $(7)'_0$, per $n=2$] è la seguente

$$V_1(x)=p_0^{-1}\exp(-\alpha_1 x_0)\ \exp(\alpha_2 x)\int_{x_0}^{x}\exp\big((\alpha_1-\alpha_2)t_2\big)\,dt_2\,. \tag{12}$$

Distinguo ancora il caso $\alpha_1\neq\alpha_2$ dal caso $\alpha_1=\alpha_2$.

Caso $\alpha_1\neq\alpha_2$.

Le (11) e (12) si scrivono anche, come si vede facilmente:

$$\mathscr{U}_m(x;h)=\frac{p_0^{-1}}{\alpha_1-\alpha_2}\,[(1+\alpha_1 h)^{\nu-m+2}-(1+\alpha_2 h)^{\nu-m+2}] \qquad (m=1,2)\,, \tag{11$'$}$$

$$V_1(x)=\frac{p_0^{-1}}{\alpha_1-\alpha_2}\,\big[\exp\big(\alpha_1(x-x_0)\big)-\exp\big(\alpha_2(x-x_0)\big)\big]\,. \tag{12$'$}$$

Essendo (cfr. [**5**])

$$\lim_{h\to 0+}(1+\alpha h)^\nu=\exp\big(\alpha\cdot(x-x_0)\big)\,, \tag{13}$$

uniformemente (rispetto alla variabile x) in ogni intervallo limitato, si ha, manifestamente, che il secondo membro di $(11)'$ [cioè di (11)] quando $h\to 0+$, tende (uniformemente rispetto alla variabile x in ogni intervallo limitato) al secondo membro di $(12)'$ [cioè di (12)]. Il Teorema II, per $\alpha_1\neq\alpha_2$, è così dimostrato.

Caso $\alpha_1 = \alpha_2$.

Indicando con α il valore comune di α_1 e α_2, le espressioni di $\mathscr{U}_m(x; h)$ e $V_1(x)$ sono qui, in effetti, le seguenti

$$(11)'' \qquad \mathscr{U}_m(x; h) = p_0^{-1} h (\nu - m + 2)(1 + \alpha h)^{\nu - m + 1} \qquad (m = 1, 2),$$

$$(12)'' \qquad V_1(x) = p_0^{-1} (x - x_0) \exp\big(\alpha(x - x_0)\big).$$

In virtù di (13), e ricordando che è (cfr. [5])

$$(14) \qquad \lim_{h \to 0+} (\nu h) = x - x_0,$$

si conclude ancora, immediatamente, con l'asserto del Teorema II, per $\alpha_1 = \alpha_2$.

Il Teorema II è quindi completamente dimostrato, per le equazioni $(1)_0$ e $(1)_0'$ con $n = 2$.

§ 4. - Dimostrazione dei Teoremi I e II per le equazioni del terzo ordine.

4.1. - Dimostrazione del Teorema I.

Riferendoci alle equazioni $(1)_f$ e $(1)_f'$ con $n = 3$, si ha:

L'espressione di $\mathscr{F}(x; h)$ in $x_0 + 3h \leqslant x \leqslant x_1$ [data da $(6)_f$, per $n = 3$] (10), con A_s nella forma $(5)'$ [si veda anche $(23)'''$, n. **6.3**], è la seguente

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathscr{F}(x; h) = p_0^{-1} h^3 \sum_{0}^{\nu-3}{}_s \sum_{0}^{s}{}_r \sum_{0}^{r}{}_\varrho (1 + \alpha_1 h)^{s-r} (1 + \alpha_2 h)^{r-\varrho} \cdot \\ &\qquad \cdot (1 + \alpha_3 h)^\varrho f\big(x - (s + 3) h\big), \qquad x_0 + 3h \leqslant x \leqslant x_1; \end{aligned} \right.$$

l'espressione di $F(x)$ [data da $(6)_f'$, per $n = 3$] è la seguente

$$(16) \qquad \begin{aligned} F(x) = p_0^{-1} \exp(\alpha_3 x) &\int_{x_0}^{x} \exp\big((\alpha_2 - \alpha_3) t_3\big)\, dt_3 \\ &\int_{x_0}^{t_3} \exp\big((\alpha_1 - \alpha_2) t_2\big)\, dt_2 \int_{x_0}^{t_2} \exp(-\alpha_1 t_1)\, f(t_1)\, dt_1, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1. \end{aligned}$$

---

(10) Essendo $\lim_{h \to 0+} (x_0 + 3h) = x_0$, non interessa l'espressione (identicamente nulla) di $\mathscr{F}(x; h)$ in $x_0 \leqslant x < x_0 + 3h$.

Distinguo ora i casi: $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$.

Con semplici passaggi, le (15) e (16) si scrivono rispettivamente

$$(15)' \quad \begin{cases} \mathscr{F}(x;\, h) = \dfrac{p_0^{-1} h^2}{\alpha_2 - \alpha_3} \sum\limits_0^{\nu-3}{}_s \; \sum\limits_0^{s}{}_r \, (1 + \alpha_1 h)^{s-r} \, (1 + \alpha_2 h)^{r+1} \, f(x - (s+3)\, h) \, - \\ - \dfrac{p_0^{-1} h^2}{\alpha_2 - \alpha_3} \sum\limits_0^{\nu-3}{}_s \; \sum\limits_0^{s}{}_r \, (1 + \alpha_1 h)^{s-r} \, (1 + \alpha_3 h)^{r+1} \, f(x - (s+3)\, h) \,, \\ \hfill x_0 + 3h \leqslant x \leqslant x_1 \,, \end{cases}$$

$$(16)' \quad \begin{cases} F(x) = \dfrac{p_0^{-1} \exp(\alpha_2 x)}{\alpha_2 - \alpha_3} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \exp\big((\alpha_1 - \alpha_2)\, t_2\big)\, dt_2 \int_{x_0}^{t_2} \exp(-\alpha_1 t_1)\, f(t_1)\, dt_1 \, - \\ - \dfrac{p_0^{-1} \exp(\alpha_3 x)}{\alpha_2 - \alpha_3} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \exp\big((\alpha_1 - \alpha_3)\, t_3\big)\, dt_3 \int_{x_0}^{t_3} \exp(-\alpha_1 t_1)\, f(t_1)\, dt_1 \,, \\ \hfill x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \,. \end{cases}$$

Confrontando i secondi membri di (15)′ e (16)′ coi secondi membri di (8) e (9), e ricordando le conclusioni del n. **3.1** (Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$), si ha, manifestamente, che il secondo membro di (15)′ [cioè di (15)], quando $h \to 0+$, tende (uniformemente rispetto alla variabile x) al secondo membro di (16)′ [cioè di (16)]. Il Teorema I, in questo caso, è così dimostrato.

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3$.

Indicando con α_2 il valore comune di α_2 e α_3, le espressioni di $\mathscr{F}(x;h)$ e $F(x)$ sono qui, in effetti, le seguenti

$$\mathscr{F}(x;\, h) = p_0^{-1} \, h^3 \sum_0^{\nu-3}{}_s \; \sum_0^{s}{}_r \, (r+1)(1 + \alpha_1 h)^{s-r} \, (1 + \alpha_2 h)^{r} \, f(x - (s+3)\, h) \,,$$

$$x_0 + 3h \leqslant x \leqslant x_1 \,,$$

$$F(x) = p_0^{-1} \exp(\alpha_2 x) \int_{x_0}^{x} dt_3 \int_{x_0}^{t_3} \exp\big((\alpha_1 - \alpha_2)\, t_2\big)\, dt_2 \int_{x_0}^{t_2} \exp(-\alpha_1 t_1)\, f(t_1)\, dt_1 \,,$$

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \,,$$

che, con semplici passaggi, diventano rispettivamente

$$(15)'' \quad \begin{cases} \mathscr{F}(x;\,h) = \dfrac{p_0^{-1}h^2}{\alpha_1-\alpha_2} \sum\limits_0^{\nu-3}{}_s \sum\limits_0^{s+1}{}_r (1+\alpha_1 h)^{s+1-r}(1+\alpha_2 h)^r f(x-(s+3)h) - \\[2ex] -\dfrac{p_0^{-1}h^2}{\alpha_1-\alpha_2} \sum\limits_0^{\nu-3}{}_s (s+2)(1+\alpha_2\,h)^{s+1} f(x-(s+3)h)\,, \end{cases}$$

$$(16)'' \quad \begin{cases} F(x) = \dfrac{p_0^{-1}\exp(\alpha_2 x)}{\alpha_1-\alpha_2} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \exp((\alpha_1-\alpha\,)t_3)\,\mathrm{d}t_3 \int_{x_0}^{t_3} \exp(-\alpha_1 t_1)\,f(t_1)\,\mathrm{d}t_1 - \\[2ex] -\dfrac{p_0^{-1}\exp(\alpha_2 x)}{\alpha_1-\alpha_2} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t_3 \int_{x_0}^{t_3} \exp(-\alpha_2 t_2)\,f(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,. \end{cases}$$

In virtù di quanto si è concluso al n. **3.1** (Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$, e Caso $\alpha_1 = \alpha_2$), anche in questo caso si ha l'asserto del Teorema I.

Caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Indicando con α il valore comune di α_1, α_2, α_3, le espressioni di $\mathscr{F}(x;h)$ e $F(x)$ sono qui, in effetti, le seguenti

$$\mathscr{F}(x;\,h) = \frac{p_0^{-1}h^3}{2} \sum_0^{\nu-3}{}_s (s+2)(s+1)(1+\alpha h)^s f(x-(s+3)h)\,, \qquad x_0+3h \leqslant x \leqslant x_1\,,$$

$$F(x) = p_0^{-1}\exp(\alpha x) \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t_3 \int_{x_0}^{t_3} \mathrm{d}t_2 \int_{x_0}^{t_2} \exp(-\alpha t_1)\,f(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1\,,$$

che, con semplici passaggi, diventano rispettivamente

$$(15)''' \quad \begin{cases} \mathscr{F}(x;\,h) = \dfrac{p_0^{-1}h^2}{2}(x-2h) \sum\limits_0^{\nu-3}{}_s (s+2)(1+\alpha h)^s f(x-(s+3)h) - \\[2ex] -\dfrac{p_0^{-1}h^2}{2} \sum\limits_0^{\nu-3}{}_s (s+2)(1+\alpha h)^s\,(x-(s+3)h)\,f(x-(s+3)h)\,, \end{cases}$$

$$(16)''' \quad \begin{cases} F(x) = \dfrac{p_0^{-1}\exp(\alpha x)\,x}{2} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t_3 \int_{x_0}^{t_3} \exp(-\alpha t_1)\,f(t_1)\,\mathrm{d}t_1 - \\[2ex] -\dfrac{p_0^{-1}\exp(\alpha x)}{2} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t_3 \int_{x_0}^{t_3} \exp(-\alpha t_2)\,t_2 f(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,. \end{cases}$$

Per quanto si è concluso al n. **3.1** (Caso $\alpha_1 = \alpha_2$), anche qui si ha di nuovo l'asserto del Teorema I.

Il Teorema I è quindi completamente dimostrato, per le equazioni $(1)_f$ e $(1)'_f$ con $n = 3$.

4.2. - Dimostrazione del Teorema II.

Riferendoci ora alle equazioni $(1)_0$ e $(1)'_0$ con $n = 3$, si ha:

L'espressione di $\mathscr{U}_m(x; h)$ [data da $(7)_0$, per $n = 3$], con $A_{\nu-m+1}$ nella forma $(5)'$ [si veda anche $(23)'''$, n. **6.3**], è la seguente

$$(17) \qquad \mathscr{U}_m(x;h) = p_0^{-1} h^2 \sum_{0}^{\nu-m+1}{}_r \;\; \sum_{0}^{r}{}_\varrho (1+\alpha_1 h)^{\nu-m+1-r}(1+\alpha_2 h)^{r-\varrho}(1+\alpha_3 h)^{\varrho} \qquad (m = 1, 2, 3)\,,$$

l'espressione di $V_1(x)$ [data da $(7)'_0$, per $n = 3$] è la seguente

$$(18) \quad V_1(x) = p_0^{-1} \exp(-\alpha_1 x_0) \exp(\alpha_3 x) \int_{x_0}^{x} \exp((\alpha_2 - \alpha_3) t_3)\, dt_3 \int_{x_0}^{t_3} \exp((\alpha_1 - \alpha_2) t_2)\, dt_2 .$$

Distinguo ancora i casi: $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$.

Le (17 e (18) si scrivono anche, come si vede facilmente,

$$(17)' \quad \begin{cases} \mathscr{U}_m(x;h) = \dfrac{p_0^{-1} h}{\alpha_2 - \alpha_3} \displaystyle\sum_{0}^{\nu-m+1}{}_r \; (1+\alpha_1 h)^{\nu-m+1-r}(1+\alpha_2 h)^{r+1} - \\[2ex] - \dfrac{p_0^{-1} h}{\alpha_2 - \alpha_3} \displaystyle\sum_{0}^{\nu-m+1}{}_r \; (1+\alpha_1 h)^{\nu-m+1-r}(1+\alpha_3 h)^{r+1} \qquad (m = 1, 2, 3)\,, \end{cases}$$

$$(18)' \quad \begin{cases} V_1(x) = \dfrac{p_0^{-1} \exp(-\alpha_1 x_0) \exp(\alpha_2 x)}{\alpha_2 - \alpha_3} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \exp((\alpha_1 - \alpha_2) t_2)\, dt_2 - \\[2ex] - \dfrac{p_0^{-1} \exp(-\alpha_1 x_0) \exp(\alpha_3 x)}{\alpha_2 - \alpha_3} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \exp((\alpha_1 - \alpha_3) t_3)\, dt_3 . \end{cases}$$

Confrontando i secondi membri di (17)′ e (18)′ coi secondi membri di (11) e (12), e ricordando le conclusioni del n. **3.2** (Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$), si ha, manifestamente, che il secondo membro di (17)′ [cioè di (17)], quando $h \to 0+$, tende (uniformemente rispetto alla variabile x in ogni intervallo limitato) al secondo membro di (18)′ [cioè di (18)]. Il Teorema II, in questo caso, è così dimostrato.

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3$.

Indicando con α_2 il valore comune di α_2 e α_3, le espressioni di $\mathcal{U}_m(x; h)$ e $V_1(x)$ sono qui, in effetti, le seguenti

$$\mathcal{U}_m(x; h) = p_0^{-1} h^2 \sum_{0}^{\nu-m+1}{}_r \, (r+1)\,(1+\alpha_1 h)^{\nu-m+1-r}(1+\alpha_2 h)^r \qquad (m = 1, 2, 3)\,,$$

$$V_1(x) = p_0^{-1} \exp(-\alpha_1 x_0) \exp(\alpha_2 x) \int_{x_0}^{x} dt_3 \int_{x_0}^{t_3} \exp\big((\alpha_1 - \alpha_2) t_2\big)\, dt_2\,,$$

che, con semplici passaggi, diventano rispettivamente

$$(17)'' \quad \begin{cases} \mathcal{U}_m(x; h) = \dfrac{p_0^{-1} h}{\alpha_1 - \alpha_2} \displaystyle\sum_{0}^{\nu-m+2}{}_r \, (1+\alpha_1 h)^{\nu-m+2-r}(1+\alpha_2 h)^r - \\[2ex] - \dfrac{p_0^{-1} h}{\alpha_1 - \alpha_2} (\nu - m + 3)(1+\alpha_2 h)^{\nu-m+2}\,, \end{cases}$$

$$(18)'' \quad \begin{cases} V_1(x) = \dfrac{p_0^{-1} \exp(-\alpha_1 x_0) \exp(\alpha_2 x)}{\alpha_1 - \alpha_2} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \exp\big((\alpha_1 - \alpha_2) t_3\big)\, dt_3 - \\[2ex] - \dfrac{p_0^{-1} (x - x_0)}{\alpha_1 - \alpha_2} \exp\big(\alpha_2 (x - x_0)\big)\,. \end{cases}$$

In virtù di quanto si è concluso al n. **3.2** (Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$, e Caso $\alpha_1 = \alpha_2$), anche in questo caso si ha l'asserto del Teorema II.

Caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Indicando con α il valore comune di α_1, α_2 e α_3, le espressioni di $\mathcal{U}_m(x; h)$ e $V_1(x)$ sono qui, in effetti, le seguenti

$$(17)''' \quad \mathcal{U}_m(x; h) = \frac{p_0^{-1}}{2} h(\nu - m + 3) h (\nu - m + 2)(1 + \alpha h)^{\nu-m+1} \quad (m = 1, 2, 3)\,,$$

$$(18)''' \quad V_1(x) = \frac{p_0^{-1}}{2} (x - x_0)^2 \exp\big(\alpha (x - x_0)\big)\,.$$

Per quanto si è concluso al n. **3.2** (Caso $\alpha_1 = \alpha_2$) [e ricordando la (14)], anche qui si ha di nuovo l'asserto del Teorema II.

Il teorema II è quindi completamente dimostrato, per le equazioni $(1)_0$ e $(1)_0'$ con $n = 3$.

§ 5. - Sulla dimostrazione dei Teoremi I e II per le equazioni di un ordine n qualsiasi.

La dimostrazione del Teorema I per le equazioni di ordine $n = 2$ e $n = 3$, mostra chiaramente come, in virtù del principio di induzione, si possa concludere con la validità del Teorema stesso per le equazioni di un ordine n qualsiasi. Precisamente:

1°) Ci si riferisce alle equazioni $(1)_f$ e $(1)_f'$ con $n = k+1$, prendendo in considerazione le espressioni $(6)_f$ di $\mathscr{F}(x; h)$ [con A_s nella forma $(5)'$] (11) e $(6)_f'$ di $F(x)$ (sempre con $n = k + 1$).

2°) Si distinguono tutti i casi possibili di molteplicità o meno delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$.

3°) In ciascun caso si scrivono (con semplici passaggi, del tutto simili a quelli per gli ordini $n = 2$ e $n = 3$) le funzioni $\mathscr{F}(x; h)$ e $F(x)$ come differenza di due termini, ognuno dei quali ha un'espressione analoga ad una delle espressioni che $\mathscr{F}(x; h)$ e $F(x)$ (rispettivamente) assumono nei vari casi possibili per le equazioni di ordine $n = k$.

4°) Supponendo vero il Teorema I per le equazioni di ordine $n = k$, si conclude immediatamente con la validità del Teorema stesso per le equazioni di ordine $n = k + 1$: per induzione, allora (sulle equazioni del primo ordine cfr. [**5**]), si ha il Teorema I in tutta la sua generalità.

Analogamente si procede per la dimostrazione del Teorema II.

Onde evitare inutili pesantezze di scrittura, tali dimostrazioni non vengono però, qui, esplicitamente date.

---

(11) Anche qui, essendo $\lim_{h \to 0+} (x_0 + (k + 1) h) = x_0$, non interesserà l'espressione (identicamente nulla) di $\mathscr{F}(x; h)$ in $x_0 \leqslant x < x_0 + (k + 1) h$.

§ 6. - Appendice.

6.1. – Dalle considerazioni svolte in [4] (cfr., in particolare, nn. **3.1**, **3.2**), si può dedurre che:

Date due equazioni algebriche

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0\,, \tag{19}$$

$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n = 0\,, \tag{20}$$

di grado n, e prefissato un numero h non nullo (reale o complesso), fra le radici β di (19) *e le radici α di* (20) *si ha il legame*

$$\beta = 1 + \alpha h\,, \tag{21}$$

se e solo se i coefficienti a_μ di (19) *e i coefficienti p_r di* (20) *sono così legati:*

$$a_\mu = \sum_0^\mu {}_r\,(-1)^{\mu-r}\binom{n-r}{\mu-r}\, p_r\, h^{r-n} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \dots, n) \tag{22}$$ [12].

6.2. – Com'è noto (cfr. [1], I, p. 138, (19)'; e [1], II, p. 51, (54')), fra i coefficienti a_μ e le radici β_r di (19) sussiste il legame [13]:

$$\sum_0^s {}_r \sum_0^r {}_{r_1} \dots \sum_0^{r_{n-2}} {}_{r_{n-1}} (-1)^r \binom{r}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\dots\binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} a_0^{-r}\, a_1^{r-r_1} \dots a_{n-1}^{r_{n-2}-r_{n-1}}\, a_n^{r_{n-1}}\, \varepsilon_{s-\sigma} = \tag{23}$$

$$= \sum_0^s {}_r \sum_0^r {}_{r_1} \dots \sum_0^{r_{n-3}} {}_{r_{n-2}}\, \beta_1^{s-r}\, \beta_2^{r-r_1} \dots \beta_{n-2}^{r_{n-3}-r_{n-2}}\, \beta_n^{r_{n-2}}\,,$$

---

(12) Una dimostrazione diretta di questo teorema è la seguente. Esprimendo che il numero $\alpha = (\beta - 1)/h$ sia radice di (20), si ha successivamente:

$$\sum_0^n {}_r\, p_r \{(\beta-1)/h\}^{n-r} = 0\;, \qquad \sum_0^n {}_r\, p_r\, h^{r-n} \sum_0^{n-r} {}_s (-1)^s \binom{n-r}{s} \beta^{n-r-s} = 0\,,$$

$$\sum_0^n {}_r \sum_r^n {}_\mu (-1)^{\mu-r}\binom{n-r}{\mu-r} p_r\, h^{r-n}\, \beta^{n-\mu} = 0\,, \quad \sum_0^n {}_\mu \left\{\sum_0^\mu {}_r (-1)^{\mu-r}\binom{n-r}{\mu-r} p_r\, h^{r-n}\right\} \beta^{n-\mu} = 0\,.$$

E viceversa.

(13) Un legame analogo sussiste, ovviamente, anche fra i coefficienti p_r e le radici α_r di (20): ma qui non interessa.

dove:

$$s = 0, 1, 2, \dots ; \quad \sigma = r + r_1 + \dots + r_{n-1}, \quad \varepsilon_{s-\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{per } s - \sigma = 0 \\ 0 & \text{per } s - \sigma \neq 0 \end{cases} \text{ (14)}.$$

Se ora, nella (23), agli a_μ si dà l'espressione (22) ed ai β_r si dà l'espressione (21), la (23) stessa si trasforma in un legame fra i coefficienti p_r e le radici α_r dell'equazione (20) [che è l'equazione caratteristica di $(1)_0$ e $(1)_0'$]. Moltiplicando poi ambo i membri di quest'ultimo legame per $a_0^{-1} = p_0^{-1} h^n$, si ottiene un'uguaglianza i cui membri sono proprio, rispettivamente, A_s dato da (5) e A_s dato da (5)'. È così giustificata l'affermazione fatta alla fine del n. **2.1**.

6.3. – Per i gradi $n = 1, 2, 3$ la (22) si scrive ordinatamente:

$$(22)' \qquad \begin{cases} a_0 = \quad p_0/h, \\ a_1 = -(p_0/h) + p_1; \end{cases}$$

$$(22)'' \qquad \begin{cases} a_0 = \quad p_0/h^2, \\ a_1 = -(2p_0/h^2) + p_1/h, \\ a_2 = \quad p_0/h^2 - (p_1/h) + p_2; \end{cases}$$

$$(22)''' \qquad \begin{cases} a_0 = \quad p_0/h^3, \\ a_1 = -(3p_0/h^3) + p_1/h^2, \\ a_2 = \quad 3p_0/h^3 - (2p_1/h^2) + p_2/h, \\ a_3 = -(p_0/h^3) + p_1/h^2 - (p_2/h) + p_3. \end{cases}$$

Per i gradi $n = 1, 2, 3$, il legame (23) trasformato nel modo descritto in **6.2**, cioè le due espressioni (5) e (5') di A_s, si scrivono rispettivamente:

$$(23)' \quad A_s \equiv (-1)^s[-(p_0/h) + p_1]^s (p_0/h)^{-s-1} = p_0^{-1} h (1 + \alpha h)^s \quad (s = 0, 1, 2, \dots, \nu),$$

(14) Cfr. annotazione (5) di [**3**] (Parte II).

$$(23)'' \quad A_s \equiv \sum_0^s {}_r (-1)^r \binom{r}{s-r} \left(\frac{p_0}{h^2}\right)^{-r-1} \left(-\frac{2p_0}{h^2} + \frac{p_1}{h}\right)^{2r-s} \left(\frac{p_0}{h^2} - \frac{p_1}{h} + p_2\right)^{s-r} =$$

$$= p_0^{-1} h^2 \sum_0^s {}_r (1 + \alpha_1 h)^{s-r} (1 + \alpha_2 h)^r \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$(23)''' \quad A_s \equiv \sum_0^s {}_r \sum_0^r {}_\varrho (-1)^r \binom{r}{\varrho} \binom{\varrho}{s-r-\varrho} \left(\frac{p_0}{h^3}\right)^{-r-1}$$

$$\left(-\frac{3p_0}{h^3} + \frac{p_1}{h^2}\right)^{r-\varrho} \left(\frac{3p_0}{h^3} - \frac{2p_1}{h^2} + \frac{p_2}{h}\right)^{r+2\varrho-s} \left(-\frac{p_0}{h^3} + \frac{p_1}{h^2} - \frac{p_2}{h} + p_3\right)^{s-r-\varrho} =$$

$$= \sum_0^s {}_r \sum_0^r {}_\varrho (1 + \alpha_1 h)^{s-r} (1 + \alpha_2 h)^{r-\varrho} (1 + \alpha_3 h)^\varrho \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \nu).$$

Bibliografia.

[1] A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle successioni* (I-II), Ann. Mat. Pura Appl.: (4) **8** (1930), 103-139; (4) **9** (1931), 25-56.

[2] A. MAMBRIANI, *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari*, Atti I Congresso Naz. dell'Un. Mat. Ital. (Firenze, aprile 1937), 231-237.

[3] C. SCARAVELLI, *Risoluzione, razionale nelle funzioni date, delle equazioni alle differenze (con un passo $h \neq 0$), d'ordine finito, lineari e a coefficienti periodici di periodo h* (I - II), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 15-41; (2) **12** (1971), 151-165.

[4] C. SCARAVELLI, *Opportunità di presentare le equazioni alle differenze finite anche nella forma di equazioni alle prederivate. Il caso lineare e a coefficienti costanti*, Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **52** (1972), 861-867.

[5] C. SCARAVELLI, *Stretto legame fra equazioni alle prederivate ed equazioni differenziali quando le equazioni sono lineari e a coefficienti costanti* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (3) **2** (1973).

Sommario

Si mette in evidenza lo stretto legame fra le soluzioni elementari delle equazioni alle prederivate e le soluzioni delle equazioni differenziali, quando le equazioni sono lineari con gli stessi coefficienti costanti e lo stesso termine noto. Precisamente, si dimostra che le soluzioni elementari dell'equazione alle prederivate, quando il passo $h \to 0+$, tendono uniformemente a soluzioni dell'equazione differenziale. In questa Parte II si studia il caso di un ordine n qualsiasi.

Summary

We emphasize the close connection between elementary solutions of linear prederivative equations and solutions of linear differential equations with the same constant coefficients and the same known term. Precisely, we show that elementary solutions of the prederivative equation, when step $h \to 0+$, *converge uniformly to solutions of the differential equation. In this Part II we display the n-th order case.*

* * *