Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 253-271

GIOVANNI SANSONE (*)

Un teorema sui sistemi differenziali lineari con condizioni ai limiti lineari. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno.

1. - Sistemi differenziali lineari con indice di compatibilità massimo.

a) Siano $p_1(x), \dots, p_n(x)$ continue in $[a, b]$ e siano $\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)$ gli n integrali dell'equazione

$$L[z] = z^{(n)} + p_1(x) z^{(n-1)} + \dots + p_n(x) z = 0 \tag{1.1}$$

che soddisfano le condizioni iniziali

$$\sigma_r^{(i)}(a) = \delta_{i,r}\,, \qquad i, r = 0, 1, \dots, n-1\,, \qquad (\sigma_r^{(0)} = \sigma_r) \tag{1.2}$$

essendo $\delta_{i,r}$ il simbolo di KRONECKER.

Fissato i, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ il sistema lineare

$$\alpha_{0,i}\sigma_r^{(0)}(a) + \alpha_{1,i}\sigma_r^{(1)}(a) + \dots + \alpha_{n-1,i}\sigma_r^{(n-1)}(a) = \sigma_r^{(i)}(b) \qquad r = 0, 1, \dots, n-1$$

ha la soluzione

$$\alpha_{r,i} = \sigma_r^{(i)}(b)\,, \qquad (r = 0, 1, \dots, n-1)\,, \tag{1.3}$$

(*) Indirizzo: Università degli Studi, Istituto Matematico «Ulisse Dini», Viale Morgagni 67/a, 50134 Firenze, Italia.

(**) Ricevuto: 3-V-1973.

e per il teorema di LIOUVILLE si ha

$$\det \|\alpha_{r,i}\| = \det \|\sigma_r^{(i)}(b)\| = \exp\left(-\int_a^b p_1(s)\, ds\right). \tag{1.4}$$

b) Inversamente verifichiamo che *data l'equazione* (1.1) *e la matrice quadrata con elementi costanti* $\|\beta_{r,i}\|$, $r, i = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\det \|\beta_{r,i}\| \neq 0, \tag{1.5}$$

se esiste un sistema di n *integrali* $z_r(x)$, $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$ *dell'equazione* (1.1), *linearmente indipendenti* (sistema fondamentale) *che soddisfano il sistema*

$$U_i[z_r] = \beta_{r,i} z_r^{(0)}(a) + \beta_{i,i} z_r^{(1)}(a) + \ldots + \beta_{n-1} z_r^{(n-1)}(a) - z_r^{(1)}(b) = 0 \tag{1.6}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

supposto cioè che il sistema differenziale lineare

$$L[z] = 0, \quad U_0[z] = 0, \quad U_1[z] = 0, \quad \ldots, \quad U_{n-1}[z] = 0 \tag{1.7}$$

abbia l'indice di compatibilità n (massimo) *si ha allora*

$$\beta_{r,i} = \sigma_r^{(i)}(b), \qquad (r, i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{1.8}$$

Esiste infatti un sistema di costanti $c_{s,0}, c_{s,1}, \ldots, c_{s,n-1}$ tali che per $x \in [a, b]$ si ha

$$c_{s,0}\sigma_0(x) + c_{s,1}\sigma_1(x) + \ldots + c_{s,n-1}\sigma_{n-1}(x) = z_s(x) \quad s = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.9}$$

$$\det \|c_{s,r}\| \neq 0. \tag{1.10}$$

Derivando la (1.9) i volte, facendo $x = b$ e tenuto conto delle (1.6), si ha

$$\sum_{r=0}^{n-1} c_{s,r}\sigma_r^{(i)}(b) = z_s^{(i)}(b) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_{r,i} z_s^{(r)}(a) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_{r,i} \sum_{h=0}^{n-1} c_{s,h}\sigma_h^{(r)}(a) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_{r,i}\, c_{s,r},$$

perciò

$$\sum_{r=0}^{n-1} c_{s,r}[\sigma_r^{(i)}(b) - \beta_{r,i}] = 0, \qquad (i, r = 0, 1, \ldots, n-1),$$

e tenuto conto della (1.10) si ottengono le (1.8).

c) Da quanto è stato detto in a) e b) segue che *se* $z_0(x), z_1(x), \ldots, z_{n-1}(x)$ *sono* n *integrali linearmente indipendenti dell'equazione* (1.1), *e ogni* $z_r(x)$ *soddisfa le* n *condizioni* (1.6), *con le* $\beta_{r,i}$ *costanti, e* det $\|\beta_{s,i}\| \neq 0$, *dovranno essere allora verificate le* (1.8) *e inversamente.*

Ne deriva il corollario: *Il sistema*

$$L(z) = 0 \,, \qquad \beta_{0,i} z(a) + \beta_{1,i}\, z^{(1)}(a) + \ldots + \beta_{n-1,i}\, z^{(n-1)}(a) = z^{(i)}(b) \tag{1.11}$$

$$i = 0, s, \ldots, n-1 \,,$$

con le $\beta_{r,i}$ *costanti,* det $\|\beta_{r,i}\| \neq 0$, *eccettuato il caso in cui le* $\beta_{r,i}$ *soddisfino il sistema* (1.8) *non può avere* l'indice n, *esistono cioè integrali dell'equazione* (1.1) *che non soddisfano le* (1.11).

Ci varremo di questo risultato nella sez. 2.

2. - Sistemi differenziali lineari del secondo ordine. Forme canoniche.

a) Si consideri il sistema differenziale lineare del secondo ordine

$$L[z] = \ddot{z}(x) + p(x)\dot{z}(x) + q(x)z(x) = 0 \,, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} U_1[z] = \alpha_0 z(a) + \alpha_1 \dot{z}(a) + \beta_0 z(b) + \beta_1 \dot{z}(b) = 0 \,, \\ U_2[z] = \gamma_0 z(a) + \gamma_1 \dot{z}(a) + \delta_0 z(b) + \delta_1 \dot{z}(b) = 0 \,, \end{cases} \tag{2.2}$$

con $p(x)$, $q(x)$ continue in $[a, b]$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i = 0, 1)$ costanti e *la matrice*

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_0 & \beta_1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \delta_0 & \delta_1 \end{matrix} \right\| \tag{2.3}$$

abbia la caratteristica 2.

Se $\beta_0\delta_1 - \beta_1\delta_0 \neq 0$, senza alterare le generalità, alle condizioni (2.2) possiamo sostituire due condizioni della forma

$$\alpha_0 z(a) + \alpha_1 \dot{z}(a) = z(b) \,, \qquad \gamma_0 z(a) + \gamma_1 \dot{z}(a) = \dot{z}(b) \,, \tag{2.4}$$

e lo stesso può dirsi se $\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 \neq 0$.

In conclusione se $(\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0)^2 + (\beta_0\delta_1 - \beta_1\delta_0)^2 \neq 0$ in luogo del sistema (2.1), (2.2) possiamo considerare un sistema della forma (2.1), (2.4).

Supponiamo invece $\alpha_0\gamma_1-\alpha_1\gamma_0=0$, $\beta_0\delta_1-\beta_1\delta_0=0$ e limitiamoci, senza alterare le generalità, a considerare i due casi

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2\neq 0\,,\ \gamma_0=l\alpha_0\,,\ \gamma_1=l\alpha_1\,;\ \beta_0^2+\beta_1^2\neq 0\,,\ \delta_0=m\beta_0\,,\ \delta_1=m\beta_1\,, \tag{2.5.1}$$

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2\neq 0\,,\ \gamma_0=l\alpha_0\,,\ \gamma_1=l\alpha_1\,;\ \delta_0^2+\delta_1^2\neq 0\,,\ \beta_0=m\delta_0\,,\ \beta_1=m\delta_1\,. \tag{2.5.2}$$

ai quali corrispondono rispettivamente le due condizioni ai limiti

$$\begin{cases}\alpha_0 z(a)+\alpha_1\dot z(a)+\beta_0 z(b)+\beta_1\dot z(b) = 0\,,\\ l[\alpha_0 z(a)+\alpha_1\dot z(a)]+m[\beta_0 z(b)+\beta_1\dot z(b)]=0\,;\end{cases} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{cases}\alpha_0 z(a)+\alpha_1\dot z(a)+m[\delta_0 z(b)+\delta_1\dot z(b)] = 0\,,\\ l[\alpha_0 z(a)+\alpha_1\dot z(a)]+[\delta_0 z(b)+\delta_1\dot z(b)]=0\,.\end{cases} \tag{2.6.2}$$

Valgano le (2.6.1); la matrice (2.3) diventa

$$\begin{Vmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \beta_0 & \beta_1\\ l\alpha_0 & l\alpha_1 & m\beta_0 & m\beta_1\end{Vmatrix}$$

e siccome ha la caratteristica 2 è $l\neq m$, e in conseguenza le (2.6.1) equivalgono alle due condizioni

$$\begin{cases}\alpha_0 z(a)+\alpha_1\dot z(a)=0\,, & \beta_0 z(b)+\beta_1\dot z(b)=0\,,\\ \alpha_0^1+\alpha_1^2\neq 0\,, & \beta_0^2+\beta_1^2\neq 0\,.\end{cases} \tag{2.7}$$

Se vale il sistema (2.6.2) e se $lm\neq 1$ si hanno le due condizioni $\alpha_0 z(a)+$ $+\alpha_1\dot z(a)=0$, $\delta_0 z(b)+\delta_1\dot z(b)=0$ della stessa forma delle (2.7).

D'altra parte la matrice diventa $\begin{Vmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & m\delta_0 & m\delta_1\\ l\alpha_0 & l\alpha_1 & \delta_0 & \delta_1\end{Vmatrix}$

e non può essere $lm=1$ perchè la seconda riga di questa matrice moltiplicata per m si ridurrebbe alla prima riga ed essa non potrebbe avere la caratteristica 2, così come abbiamo supposto per ipotesi.

Dalle cose dette segue che *per i sistemi differenziali considerati possiamo supporre che le due condizioni ai limiti abbiano una delle seguenti forme canoniche*

$$\alpha_0 z(a) + \alpha_1 \dot{z}(a) = z(b)\,, \qquad \gamma_0 z(a) + \gamma_1 \dot{z}(a) = \dot{z}(b)\,, \tag{2.8.1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 z(a) + \alpha_1 \dot{z}(a) = 0\,, & \beta_0 z(b) + \beta_1 \dot{z}(b) = 0\,, \\ \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0\,, & \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0\,. \end{cases} \tag{2.8.2}$$

b) In applicazione dei risultati della sez. 1 vogliamo notare che *se i sistema* (2.1), (2.8.1) *ha l'indice di compatibilità* 2, *con le notazioni della sez.* 1 *dovrà aversi*

$$\begin{cases} \alpha_0 = \sigma_0(b)\,, \quad \alpha_1 = \sigma_1(b)\,, \quad \gamma_0 = \dot{\sigma}_0(b)\,, \quad \gamma_1 = \dot{\sigma}_1(b)\,, \\ [\sigma_0(a) = 1\,,\ \dot{\sigma}_0(a) = 0\,,\ \sigma_1(a) = 0\,,\ \dot{\sigma}_1(a) = 1]\,, \end{cases} \tag{2.9}$$

perciò

$$\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 = \begin{vmatrix} \sigma_0(b) & \sigma_1(b) \\ \dot{\sigma}_0(b) & \dot{\sigma}_1(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \exp\left(-\int_a^b p(s)\,ds\right) = \exp\left(-\int_a^b p(s)\,ds\right)$$

od anche

$$(\alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\gamma_1) \exp \int_a^b p(s)\,ds + 1 = 0\,. \tag{2.10}$$

La (2.10) *esprime una condizione necessaria, indipendente da* $q(x)$, *perchè il sistema* (2.1), (2.8.1) *abbia l'indice* 2.

3. - Il problema di Čech per i sistemi differenziali lineari del secondo ordine.

Come ricorderemo nel sommario, nello studio dei sistemi differenziali lineari del secondo ordine

$$\ddot{y} + p(x)\dot{y} + [q(x) + \lambda]y = 0\,, \tag{3.1}$$

$p(x), q(x) \in C$ in $[a, b]$, λ parametro,

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 \dot{y}(a) + \beta_0 y(b) + \beta_1 \dot{y}(b) = 0\,, \\ \gamma_0 y(a) + \gamma_1 \dot{y}(a) + \delta_0 y(b) + \delta_1 \dot{y}(b) = 0\,, \end{cases}$$

con la matrice

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_0 & \beta_1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \delta_0 & \delta_1 \end{Vmatrix}$$

a termini costanti e di caratteristica 2 si parte dall'ipotesi che tali sistemi per qualche valore di λ siano incompatibili, cioè soddisfatti unicamente dalla soluzione $y(x) \equiv 0$.

Si presenta naturalmente la domanda, che come diremo nel sommario una volta mi fu posta da E. ČECH, *se esistono sistemi* (3.1), (3.2) *compatibili qualunque sia il valore del parametro λ, tali cioè che comunque fissato λ esiste corrispondentemente una $y(x)$ non identicamente nulla che soddisfa il sistema.*

Per dimostrare che ciò non può verificarsi procederemo in questo modo: ammesso, senza alterare le generalità, *che il sistema* (3.1), (3.2) *sia compatibile per $\lambda = 0$, esistono valori di $\lambda \neq 0$ per i quali lo stesso sistema è incompatibile* (¹).

Per le cose dette nella sez. 1.2 basterà considerare separatamente i sistemi

$$(3.3.1)\qquad \ddot{y}(x) + p(x)\dot{y}(x) + [q(x) + \lambda]y(x) = 0\,,$$

$$(3.3.2)\qquad \begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 \dot{y}(a) = 0\,, \qquad \beta_0 y(b) + \beta_1 \dot{y}(b) = 0\,, \\ \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0\,, \qquad \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0\,, \qquad \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \text{ costanti}; \end{cases}$$

$$(3.4.1)\qquad \ddot{y}(x) + p(x)\dot{y}(x) + [q(x) + \lambda]y(x) = 0\,,$$

$$(3.4.2)\qquad \begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 \dot{y}(a) = y(b)\,, \qquad \gamma_0 y(a) + \gamma_1 \dot{y}(a) = \dot{y}(b)\,, \\ \alpha_0, \alpha_1, \gamma_0, \gamma_1 \text{ costanti}\,, \end{cases}$$

con $p(x)$, $q(x)$ continue in $[a, b]$ e dimostrare il teorema che *se uno di questi sistemi è compatibile per $\lambda = 0$, si possono determinare valori di $\lambda \neq 0$ per i quali lo stesso sistema è incompatibile.*

(¹) Il problema qui discusso è quello studiato nei Trattati dedicati alle *Equazioni Differenziali Ordinarie* (cfr. ad es. G. SANSONE, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, I (2ª ed. 1965), p. 279) ma se passiamo a casi più generali e consideriamo ad esempio il sistema lineare $\ddot{y} - \lambda(\sin x)\dot{y} + (\lambda \cos x + 1)y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, esso, qualunque sia il valore del parametro λ ha la soluzione $y = \sin x$, ed è perciò sempre compatibile.

Nella sez. 4 daremo la dimostrazione del teorema per il sistema (3.3.1), (3.3.2) e nelle sez. 5, 6 daremo la dimostrazione del teorema per il sistema (3.4.1), (3.4.2).

4. - Dimostrazione del teorema nel caso del sistema (3.3.1), (3.3.2).

a) Ferme restando le ipotesi su $p(x)$, $q(x)$, α_0, α_1, β_0, β_1 dichiarate nella sez. 3 supponiamo che $y_1(x)$ sia una soluzione (non identicamente nulla) del sistema

$$\ddot{y}_1(x) + p(x)\dot{y}_1(x) + q(x)y_1(x) = 0\,, \tag{4.1.1}$$

$$\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 \dot{y}_1(a) = 0\,, \qquad \beta_0 y_1(b) + \beta_1 \dot{y}_1(b) = 0\,, \tag{4.1.2}$$

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0\,, \qquad \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0\,,$$

e $y_2(x)$ un secondo integrale dell'equazione

$$\ddot{y}(x) + p(x)\dot{y}(x) + q(x)y(x) = 0$$

linearmente indipendente da $y_1(x)$, perciò

$$w(x) = y_1(x)\dot{y}_2(x) - y_2(x)\dot{y}_1(x) \neq 0 \qquad \text{per } a \leqslant x \leqslant b\,. \tag{4.2}$$

Ammesso che non valga il teorema enunciato nella sez. 3, fissato $\lambda \neq 0$, consideriamo l'integrale $z_0(x)$ (non identicamente nullo) dell'equazione

$$\ddot{z}_0(x) + p(x)\dot{z}_0(x) + q(x)z_0(x) = -\lambda z_0(x) \tag{4.3}$$

che soddisfa le condizioni ai limiti

$$\alpha_0 z_0(a) + \alpha_1 \dot{z}(a) = 0\,; \tag{4.4.1}$$

$$\beta_0 z_0(b) + \beta_1 \dot{z}_0(b) = 0\,. \tag{4.4.2}$$

Per il teorema di Lagrange esistono due costanti c_1, c_2 tali che

$$z_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \lambda y_1(x)\int_a^x \frac{y_1(s)}{w(s)}\, z_0(s)\, ds + \lambda y_2(x)\int_x^b \frac{y_2(s)}{w(s)}\, z_0(s)\, ds\,, \tag{4.5}$$

perciò

$$\dot{z}_0(x) = c_1 \dot{y}_1(x) + c_2 \dot{y}_2(x) + \lambda \dot{y}_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds + \lambda \dot{y}_2(x) \int_x^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds .$$

Si ha da queste, tenuto conto della seconda delle (4.1.1) e della (4.4.2)

$$0 = \beta_0 z_0(b) + \beta_1 \dot{z}_0(b) = c_2[\beta_0 y_2(b) + \beta_1 \dot{y}_2(b)] ; \tag{4.6}$$

non può aversi $\beta_0 y_1(b) + \beta_1 \dot{y}_2(b) = 0$ perchè questa relazione accoppiata con la seconda delle (4.1.2) darebbe $y_1(b)\dot{y}_2(b) - y_2(b)\dot{y}_1(b) = 0$ e ciò implicherebbe la dipendenza lineare di $y_1(x)$, $y_2(x)$, di guisa che la (4.6) dà $c_2 = 0$, e in conseguenza la (4.5) diventa

$$z_0(x) = c_1 y_1(x) + \lambda y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds + \lambda y_2(x) \int_x^b z_0(s)\, ds , \tag{4.7}$$

si ha da questa

$$0 = \alpha_0 z_0(a) + \alpha_1 \dot{z}_0(a) = \lambda[\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 \dot{y}_2(a)] \int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds ,$$

e siccome per la prima delle (4.1.2) è $\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 \dot{y}_2(a) \neq 0$, risulta

$$\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds = 0 .$$

Ne viene che nella (4.7) è $c_1 \neq 0$, perchè in caso opposto si avrebbe $z_0(a) = \dot{z}_0(a) = 0$ e perciò $z(x)$ identicamente nulla, e dalle cose dette segue che *condizione necessaria e sufficiente perchè $z_0(x)$ verifichi la* (4.3) *e le* (4.4.1), (4.4.2) *è che si abbia*

$$z_0(x) = c_1 y_1(x) + \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds , \qquad c_1 \neq 0 , \tag{4.8}$$

$$\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds = 0 \tag{4.9}$$

con

$$k(x, s) = y_1(x) y_2(s) \qquad \text{per } a \leqslant s \leqslant x \leqslant b ,$$

$$k(x, s) = y_2(x) y_1(s) \qquad \text{per } a \leqslant x \leqslant s \leqslant b .$$

Il nucleo $k(x, s)$ è simmetrico, ed essendo per la (4.2) $w(s) \neq 0$, per il teorema di SCHMIDT esistono valori di λ non nulli per i quali l'equazione integrale omogenea aggiunta dell'equazione (4.8)

$$v(x) = \frac{\lambda}{w(x)} \int_a^b k(x, s)\, v(s)\, ds \tag{4.10}$$

ammette soluzioni non identicamente nulle, e poichè la (4.8) ammette la soluzione $z_0(x)$ ed è $c_1 \neq 0$ dovrà aversi

$$\int_a^b y_1(s) v(s)\, ds = 0$$

ed anche posto

$$u(x) = v(x) w(x)$$

e perciò

$$u(x) = \lambda \int_a^b \frac{k(s, s)}{w(s)} u(s)\, ds \tag{4.11}$$

risulta

$$\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} u(s)\, ds = 0\,. \tag{4.12}$$

Si ha

$$u(x) = \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} u(s)\, ds = \lambda y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{w(s)} u(s)\, ds + \lambda y_2(x) \int_x^b \frac{y_1(s)}{w(s)} ds\,, \tag{4.13}$$

$$\dot{u}(x) = \lambda \dot{y}_1(x) \int_a^\lambda \frac{y_2(s)}{w(s)}\, u(s)\, ds + \lambda \dot{y}_2(x) \int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} ds\,, \tag{4.14}$$

e da queste ultime per la (4.11) risulta

$$u(a) = \dot{u}(a) = 0\,. \tag{4.15}$$

Ma $u(x)$ per la (4.13) soddisfa l'equazione (4.3) e dalla (4.15) segue allora $u(x)$ identicamente nulla e ciò è contrario a quanto abbiamo supposto per $u(x)$.

Abbiamo così dimostrato il teorema: *se λ è un autovalore dell'equazione integrale* (4.11), *il sistema* (4.3), (4.4.1), (4.4.2) *è incompatibile.*

b) Nella sez. 6 vedremo che la dimostrazione del teorema per i sistemi (3.4.1), (3.4.2) si basa su un procedimento analogo.

5. - Un'equazione integrale fra soluzioni corrispondenti a due valori distinti del parametro λ nel caso di condizioni ai limiti

$$\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 \dot{y}_1(a) = y_1(b)\,, \qquad \gamma_0 y_1(a) + \gamma_1 \dot{y}_1(a) = \dot{y}_1(b)\,.$$

a) Sia $y_1(x)$ una soluzione (non identicamente nulla) del sistema

$$\ddot{y}_1(x) + p(x)\dot{y}_1(x) + q(x)y_1(x) = 0\,, \tag{5.1}$$

$$\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 \dot{y}_1(a) = y_1(b)\,, \qquad \gamma_0 y_1(a) + \gamma_1 \dot{y}_1(b) = \dot{y}_1(b)\,, \tag{5.2}$$

e $z_0(x)$ un integrale (non identicamente nullo) dell'equazione

$$\ddot{z}_0(x) + p(x)\dot{z}_0(x) + [q(x) + \lambda] z_0(x) = 0\,, \qquad (\lambda \neq 0)\,, \tag{5.3}$$

soddisfacente le condizioni

$$\alpha_0 z_0(a) + \alpha_1 \dot{z}_0(a) = z_0(b)\,, \qquad \gamma_0 z_0(a) + \gamma_1 \dot{z}_0(a) = \dot{z}_0(b)\,. \tag{5.4}$$

Se $y_2(x)$ è un integrale dell'equazione (5.1) linearmente indipendente da $y_1(x)$, posto

$$w(x) = y_1(x)\,\dot{y}_2(x) - y_2(x)\,\dot{y}_1(x) = \exp\left(-\int_a^x p_1(s)\,ds\right) \tag{5.5}$$

esistono due costanti c_1, c_2 tali che

$$z_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \lambda y_1(x)\int_a^x \frac{y_2(s)}{w(s)} z_0(s)\,ds - \lambda y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\,ds \tag{5.6}$$

e perciò

$$\dot{z}_0(x) = c_1\,\dot{y}_1(x) + c_2\,\dot{y}_2(x) + \lambda \dot{y}_1(x)\int_a^x \frac{y_2(s)}{w(s)} z_0(s)\,ds - \lambda\,\dot{y}_2(x)\int_a^x \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\,ds\,. \tag{5.7}$$

Risulta

$$z_0(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a)\,, \qquad \dot z_0(a) = c_1 \dot y_1(a) + c_2 \dot y_2(a)$$

e per la (5.4)

$$z_0(b) = \alpha_0 z_0(a) + \alpha_1 \dot z(a) = c_1[\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 \dot y_1(a)] + c_2[\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 \dot y_2(a)]\,,$$

$$z_0(b) = c_1 y_1(b) + c_2[\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 \dot y_2(a)]$$

e analogamente, partendo dalla seconda delle (5.4)

$$\dot z_0(b) = c_1 \dot y_1(b) + c_2[\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 \dot y_2(a)]\,,$$

talchè facendo nelle (5.6), (5.7) $x = b$ si hanno le seguenti equazioni

$$\text{(5.8)} \quad \begin{cases} \lambda y_1(b) \displaystyle\int_a^b \frac{y_2(s) z_0(s)}{w(s)}\,\mathrm{d}s - \lambda y_2(b) \int_a^b \frac{y_1(s) z_0(s)}{w(s)}\,\mathrm{d}s = c_2[\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 \dot y_2(a) - y_2(b)]\,, \\ \lambda \dot y_1(b) \displaystyle\int_a^b \frac{y_2(s) z_0(s)}{w(s)}\,\mathrm{d}s - \lambda \dot y_2(b) \int_a^b \frac{y_1(s) z_0(s)}{w(s)}\,\mathrm{d}s = c_2[\gamma_0 y_2(a) + \gamma_1 \dot y_2(a) - \dot y_2(b)]\,, \end{cases}$$

e da quest'ultime si ricava

$$\text{(5.9)} \qquad \lambda \int_a^b \frac{y_2(s)\, z_0(s)}{w(s)}\,\mathrm{d}s = -\frac{c_2}{w(b)} \begin{vmatrix} \alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 \dot y_2(a) & -y_2(b) \\ \gamma_0 y_2(a) + \gamma_1 \dot y_2(a) & -\dot y_2(b) \end{vmatrix}\,,$$

$$\text{(5.10)} \qquad \lambda \int_a^b \frac{y_1(s) z_0(s)}{w(s)}\,\mathrm{d}s = -\frac{c_2}{w(b)} \begin{vmatrix} y_1(b) & \alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 \dot y_2(a) - y_2(b) \\ \dot y_1(b) & \gamma_0 y_2(a) + \gamma_1 \dot y_2(a) - \dot y_2(b) \end{vmatrix}\,.$$

Il secondo membro di quest'ultima vale

$$\frac{c_2}{w(b)}[y_2(a)\,(\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0)\,\dot y_1(a) + \dot y_2(a)(\alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\gamma_1) y_1(a) + w(b)] =$$

$$= c_2\,[\exp\,(\int_a^b p(s)\,\mathrm{d}s)]\,[\alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\gamma_1 + \exp\,(-\int_a^b p(s)\,\mathrm{d}s)]$$

e perciò

$$(5.11)\qquad \lambda\int_a^b \frac{y_1(s)z_0(s)}{w(s)}\,\mathrm{d}s = c_2\left[\exp\left(\int_a^b p(s)\,\mathrm{d}s\right)\right]\left[\alpha_1\gamma_0-\alpha_0\gamma_1+\exp\left(-\int_a^b p(s)\,\mathrm{d}s\right)\right],$$

e le (5.9), (5.11) esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la $z_0(x)$ soluzione dell'equazione integrale (5.6) soddisfi il sistema (5.3), (5.4).

Posto

$$(5.12)\qquad H = (\alpha_1\gamma_0-\alpha_0\gamma_1)(\exp\int_a^b p(s)\,\mathrm{d}s)+1$$

l'equazione (5.6) diventa

$$(5.13)\qquad z_0(x) = c_1y_1(x)+c_2(1-H)y_2(x)+\lambda\int_a^b \frac{k(x,s)}{w(s)}z_0(s)\,\mathrm{d}s$$

con

$$(5.14)\qquad \begin{cases} k(x,s)=y_1(x)y_2(s) & \text{per } a\leqslant s\leqslant x\leqslant b\,,\\ k(x,s)=y_2(x)y_1(s) & \text{per } a\leqslant x\leqslant s\leqslant b\,,\end{cases}$$

e abbiamo così dimostrato il teorema: *condizione necessaria e sufficiente perchè fissato il parametro λ esista una $z_0(x)$ che soddisfi le* (5.3), (5.4) *è che esistano due costanti c_1, c_2 per le quali $z_0(x)$ soddisfi l'equazione integrale di seconda specie* (5.13), *e le due condizioni*

$$(5.15)\qquad \begin{aligned} &\lambda\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)}z_0(s)\,\mathrm{d}s = c_2H\,,\\ &\lambda\int_a^b \frac{y_2(s)}{w(s)}z_0(s)\,\mathrm{d}s = \frac{c_2}{w(b)}\begin{vmatrix}\alpha_0y_2(a)+\alpha_1\dot y_2(a) & y_2(b)\\ \gamma_0y_2(a)+\gamma_1\dot y_2(a) & \dot y_2(b)\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

6. - Il teorema generale per il sistema (5.3) (5.4).

a) In questa sezione vogliamo dimostrare il teorema: *se $p(x)$, $q(x)$ sono continue in $[a, b]$, se $y_1(x)$ è una soluzione* (non identicamente nulla) *del sistema* *differenziale*

(6.1) $$\ddot{y}(x) + p(x)\dot{y}(x) + q(x)y(x) = 0 ,$$

(6.2) $$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 \dot{y}(a) = y(b) , \quad \gamma_0 y(a) + \gamma_1 \dot{y}(a) = \dot{y}(b) , \quad (\alpha_0, \alpha_1, \gamma_0, \gamma_1 \text{ costanti})$$

se $y_0(x)$ *è un integrale della* (6.1) *linearmente indipendente da* $y_1(x)$, *se* λ *è un autovalore dell'equazione integrale a nucleo di Schmidt*

(6.3) $$u(x) = \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} u(s)\, ds ,$$

$$k(x, s) = y_1(x)y_2(s) \text{ per } a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, \quad k(x, s) = y_2(x)y_1(s) \text{ per } a \leqslant x \leqslant s \leqslant b$$

(6.4) $$w(x) = y_1(x)\dot{y}_2(x) - y_2(x)\dot{y}_1(x)$$

allora il sistema

(6.5) $$\ddot{z}_0(x) + p(x)\dot{z}_0(x) + [q(x) + \lambda]z_0(x) = 0 ,$$

(6.6) $$\alpha_0 z_0(a) + \alpha_1 \dot{z}_0(a) = z_0(b) , \quad \gamma_0 z_0(a) + \gamma_1 \dot{z}_0(a) = \dot{z}_0(b) ,$$

è incompatibile ($z_0(x)$ è identicamente nulla).

Per dimostrare questo teorema daremo in b) un lemma che occorrerà in c) per il caso $H = 0$ e in d) per il caso $H \neq 0$.

b) i) Vale il seguente lemma: *se* $p(x)$, $q(x)$ *sono continue in* $[a, b]$, *se* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *sono due integrali linearmente indipendenti dell'equazione*

(6.1) $$\ddot{y} + p(x)\dot{y} + q(x)y = 0$$

se $z_0(x)$ *soddisfa l'equazione integrale*

(6.7) $$z_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds , \qquad (\lambda \neq 0) ,$$

$$k(x, s) = y_1(x)y_2(s) \text{ per } a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, \quad k(x, s) \equiv y_2(x)y_1(s) \text{ per } a \leqslant x \leqslant s \leqslant b,$$

$$w(x) = y_1(x)\dot{y}_2(x) - y_2(x)\dot{y}_1(x) (C_1,\ C_2 \text{ costanti})$$

se $C_1 C_2 = 0$, $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, *e se* λ $(\lambda \neq 0)$ *è un autovalore dell'equazione*

$$u(x) = \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} u(s)\, ds$$

$(u(x)$ non identicamente nulla$)$ *allora* $z_0(x)$ *è identicamente nulla.*

Così pure se $C_1 = C_2 = 0$, *e uno degli integrali*

$$\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds\,, \qquad \int_a^b \frac{y_2(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds \tag{6.8}$$

è nullo si ha allora $z_0(x)$ *identicamente nulla.*

Si ha infatti

$$\left\{\begin{aligned} u(x) &= \lambda y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{w(s)} u(s)\, ds + \lambda y_2(x) \int_x^b \frac{y_1(s)}{w(s)} u(s)\, ds\,, \\ \dot u(x) &= \lambda \dot y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{w(s)} u(s)\, ds + \lambda \dot y_2(x) \int_x^b \frac{y_1(s)}{w(s)} u(s)\, ds\,, \end{aligned}\right. \tag{6.9}$$

e $u(x)$ come abbiamo già osservato in sez. 4 b) soddisfa l'equazione differenziale

$$\ddot u + p(x) \dot u\,(x) + [q(x) + \lambda] u(x) = 0\,. \tag{6.10}$$

Se $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ $[C_2 = 0,\ C_1 \neq 0]$ l'esistenza di una soluzione dell'equazione integrale non omogenea (6.7) implica

$$\int_a^b \frac{y_2(s)}{w(s)} u(s)\, ds = 0\,, \qquad \left[\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} u(s)\, ds = 0\right]$$

e per le (6.9)

$$u(b) = \dot u(b) = 0 \qquad \big(u(a) = \dot u(a) = 0\big)\,,$$

il che implica per la (6.10) $u(x) \equiv 0$, mentre $u(x)$ non è identicamente nulla.

Infine se $C_1 = C_2 = 0$ sostituendo nella (6.9) ad $u(x)$ $z_0(x)$ e tenuto conto che uno almeno degli integrali (6.8) è nullo si ha $z_0(a) = \dot z(a) = 0$, oppure $z_0(b) = \dot z_0(b) = 0$ e perciò $z_0(x)$ identicamente nulla.

b) ii) Dal lemma ora dimostrato segue che nel caso di $C_1^1 + C_2^2 \neq 0$ per ogni $z_0(x)$ non identicamente nulla che soddisfi le (6.7) le due costanti C_1, C_2, a causa della indipendenza lineare di $y_1(x)$, $y_2(x)$, sono univocamente determinate e non nulle.

c) *Il caso* $H = 0$.

c) i) Ammettiamo dapprima per assurdo che per il considerato valore di λ il sistema (6.5), (6.6) abbia l'indice di compatibilità 2, esistono allora due soluzioni $z_0(x)$, $\bar{z}_0(x)$, linearmente indipendenti, del sistema (5.3), (5.4) per le quali essendo $H = 0$ risulta per la (5.15)

$$z_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds\,, \tag{6.11.1}$$

$$\bar{z}_0(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} \bar{z}_0(s)\, ds\,, \tag{6.11.2}$$

c_1, c_2, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ costanti,

$$\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds = 0\,, \qquad \int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} \bar{z}_0(s)\, ds = 0\,, \tag{6.12}$$

e in virtù del lemma dimostrato in b), non essendo $z_0(x)$, $\bar{z}_0(x)$ identicamente nulle le costanti c_1, c_2, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ sono tutte diverse da zero.

Posto

$$\bar{c}_1 z_0(x) - c_1 \bar{z}_0(x) = z(x) \tag{6.13}$$

dalle (6.11.1), (6.11.2) si ricava

$$z(x) = (\bar{c}_1 c_2 - c_1 \bar{c}_2) y_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z(s)\, ds\,.$$

Se fosse $\bar{c}_1 c_2 - c_1 \bar{c}_2 = 0$, per il lemma dimostrato in b) essendo

$$\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z(s)\, ds = 0\,,$$

$z(x)$ dovrebbe essere identicamente nulla e per la (6.13) $z_0(x)$, $\bar{z}_0(x)$ dovrebbero essere linearmente dipendenti il che non è.

Se poi $\bar{c}_1 c_2 - c_1 \bar{c}_2 \neq 0$ per lo stesso lemma dimostrato in b), $z(x)$ dovrebbe essere identicamente nulla e ancora $z_0(x)$, $\bar{z}_0(x)$ dovrebbero essere linearmente dipendenti.

Concludiamo quindi che per il considerato valore di λ il sistema (6.5) (6.6) non può avere l'indice 2.

c) ii) Proveremo ora che per il considerato valore di λ il sistema (5.3), (5.4), (6.5), (6.6), neppure ha l'indice 1 ed esso è quindi incompatibile.

Sia $z_0(x)$

$$z_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds\,, \tag{6.14}$$

$$\int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds = 0\,, \tag{6.15}$$

la soluzione (a meno di una costante moltiplicativa) del sistema (5.3), (5.4).

Nella (6.14) le costanti c_1, c_2 per quanto abbiamo detto in b) ii) sono entrambe diverse da zero.

Anzichè partire dal sistema $[y_1(x), y_2(x)]$ partiamo ora dal sistema $[y_1(x), \bar{y}_2(x)]$

$$\bar{y}_2(x) = y_2(x) + h y_1(x) \tag{6.16}$$

dove h è una costante. La soluzione $z_0(x)$ del sistema (5.3), (5.4), poichè

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) + h y_1(x) \\ \dot{y}_1(x) & \dot{y}_2(x) + h \dot{y}_1(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \dot{y}_1(x) & \dot{y}_2(x) \end{vmatrix} = w(x)$$

avrà la forma

$$z_0(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 \bar{y}_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{\bar{k}(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds \tag{6.17}$$

con

$$\bar{k}(x, s) = y_1(x)[\bar{y}_2(s) + h y_1(s)] \qquad \text{per } a \leqslant s \leqslant x \leqslant b\,,$$

$$\bar{k}(x, s) = [y_2(x) + h y_1(x)] y_1(s) \qquad \text{per } a \leqslant x \leqslant s \leqslant b\,,$$

con $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ costanti. Resta soddisfatta la (6.15) e da

$$\lambda \int_a^b \frac{\bar{k}(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds = \lambda y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds + \lambda y_2(x) \int_x^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds +$$

$$+ \lambda h y_1(x) \int_a^x \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds + \lambda h y_1(x) \int_x^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds ,$$

risulta

$$\lambda \int_a^b \frac{\bar{k}(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds = \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds ,$$

e la (6.17) si scrive

$$z_0(x) = (\bar{c}_1 + h\bar{c}_2) y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds ,$$

la quale confrontata con la (6.14), poichè $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti, dà

$$\bar{c}_2 = c_2 , \qquad \bar{c}_1 + h\bar{c}_2 = c_1 ,$$

e se prendiamo $h = c_1/c_2$ ne viene che $\bar{c}_1 = 0$, e il sistema delle (6.17), (6.15) dà per $z_0(x)$

$$z_0(x) = c_2 \bar{y}_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{\bar{k}(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds , \qquad (c_2 \neq 0) ,$$

e allora per il lemma dimostrato in b) dovrebbe aversi $z_0(x) \equiv 0$.

Abbiamo così dimostrato che se $H = 0$ il sistema (6.5), (6.6) per il considerato valore di λ è incompatibile.

d) *Il caso* $H \neq 0$.

Poichè $H \neq 0$, tenuto conto della (5.12) e della sez. 2, b) segue che il sistema (5.1), (5.2) ha l'indice di compatibilità 1, e così pure supposto che il sistema (5.3), (5.4) sia possibile esso avrà l'indice di compatibilità 1.

Come abbiamo detto nella sez. 5 per $z_0(x)$ valgono le (5.13), (5.15) e possiamo subito notare che è $c_2(1-H) \neq 0$, perchè in caso opposto per il lemma dimostrato in b) i) è $z_0(x) \equiv 0$.

Invece di partire dalla soluzione $[y_1, y_2]$ per arrivare alla (5.13) partiamo dalla soluzione $[y_1, y_2 + hy_1]$ dove h è una costante. Si avrà per $z_0(x)$ (determinata a meno di una costante moltiplicativa)

$$z_0(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2(1 - H)\bar{y}_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{\bar{k}(x, s)}{\bar{w}(s)} z_0(s)\, ds \tag{6.18}$$

dove $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ sono costanti, $\bar{w}(s) = w(s)$

$$\bar{k}(x, s) = y_1(s)[y_2(s) + hy_1(s)] \qquad \text{per } a \leqslant s \leqslant x \leqslant b\,,$$

$$\bar{k}(x, s) = [y_2(x) + hy_1(s)]y_1(s) \qquad \text{per } a \leqslant x \leqslant s \leqslant b\,.$$

Si ha

$$\lambda \int_a^b \frac{\bar{k}(x, s)}{\bar{w}(s)} z_0(s)\, ds = \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds + \lambda h y_1(x) \int_a^b \frac{y_1(s)}{w(s)} z_0(s)\, ds\,,$$

e per la (5.15)

$$\int_a^b \frac{\bar{k}(x, s)}{\bar{w}(s)} z_0(s)\, ds = \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds + hHc_2 y_1(x)\,, \tag{6.19}$$

e la (6.18) dà

$$z_0(x) = [c_1 + hHc_2 + h(1 - H)\bar{c}_2]y_1(x) + \bar{c}_2(1 - H)y_2(x) + \lambda \int_a^b \frac{k(x, s)}{w(s)} z_0(s)\, ds\,,$$

e confrontando con la (5.13) e tenuto conto dell'indipendenza lineare di $y_1(x)$, $y_2(x)$ risulta $\bar{c}_2 = c_2 \neq 0$, ed anche $\bar{c}_1 + hHc_2 + h(1 - H)\bar{c}_2 = \bar{c}_1 + hc_2 = c_1$. Se scegliamo allora $h = c_1/c_2$ nella (6.18) (relativa alla coppia $y_1, \bar{y}_2$) risulta $\bar{c}_1 = 0$ e per il lemma dimostrato in b) ne viene $z_0(x) \equiv 0$, il che non è.

Sommario.

Per il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\ddot{y}(x) + p(x)\dot{y}(x) + [q(x) + \lambda]y(x) = 0\,, \\ &\alpha_0 y(a) + \alpha_1 \dot{y}(a) + \beta_0 y(b) + \beta_1 \dot{y}(b) = 0\,, \\ &\gamma_0 y(a) + \gamma_1 \dot{y}(a) + \delta_0 y(b) + \delta_1 \dot{y}(b) = 0\,, \end{aligned}$$

$p(x)$, $q(x) \in C$ in $[a, b]$, λ parametro, $\alpha_0, \ldots, \delta_1$, costanti, con la matrice

$$\left|\begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_0 & \beta_1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \delta_0 & \delta_1 \end{matrix}\right|$$

di caratteristica 2, si dimostra che esistono valori del parametro λ per i quali il sistema è incompatibile.

L'esistenza di tali valori è tacitamente ammessa nelle opere dedicate alle Equazioni Differenziali Ordinarie quando si inizia lo studio dei sistemi (*), e l'opportunità di darne subito una dimostrazione mi fu segnalata dal compianto E. Čech.

* * *