Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974). 215-231

GIOVANNI BATTISTA RIZZA (*)

Funzioni para-olomorfe nelle algebre reali. (**)

ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Introduzione.

In questo lavoro si propone la considerazione di una nuova classe di funzioni (*funzioni para-olomorfe*) in una qualunque algebra A di dimensione finita n sul campo reale ([1]).

In luogo delle classiche equazioni di CAUCHY-RIEMANN dell'algebra dei numeri complessi le condizioni che qui vengono introdotte (n. **5**) appaiono formalmente analoghe a quelle considerate da G. C. MOISIL e R. FUETER nell'algebra dei quaternioni, successivamente da me estese ad un'algebra qualunque (condizioni di regolarità) ([2]).

La differenza essenziale consiste nel fatto che *le condizioni di para-olomorfia sono indipendenti dalla scelta di una base nell'algebra e consentono quindi di dar vita ad una teoria di natura intrinseca* (Osservazione $\boldsymbol{O}_3$, n. **5**).

Il desiderio di costruire una teoria invariantiva suggerisce di riguardare l'algebra A come *varietà centro-affine* (n. **2**) e di pensare le costanti di moltiplicazione di A relative ad una base $\{u_k\}$ come componenti di un *tensore* (Osservazione $\boldsymbol{O}_1$, n. **3**), ciò che consente tra l'altro di ritrovare per via tensoriale alcune note proposizioni di teoria delle algebre (Preposizioni $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, n. **3**).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale Strutture Algebriche, Geometriche e loro Applicazioni. – Ricevuto: 8-VIII-1974.

([1]) Di alcuni risultati in questo indirizzo di ricerca ho dato notizia in una conferenza tenuta a Milano nel 1973, attualmente in corso di pubblicazione (n. [**13**] della bibliografia).

([2]) Vedi p. es. R. FUETER [**8**], G. B. RIZZA [**11**]. Attualmente la teoria delle funzioni regolari consta di numerosi lavori con risultati e applicazioni interessanti.

L'interesse della nozione di para-olomorfia appare già dalla considerazione di alcuni casi particolari. Si osserva ad esempio al n. **6** che, *nell'algebra dei numeri complessi* $\boldsymbol{C}$ *(più in generale nelle algebre di dimensione due con unità) e nell'algebra dei quaternioni* $\boldsymbol{\Gamma}$, *le funzioni para-olomorfe della variabile* x *coincidono rispettivamente con le funzioni monogene e con le funzioni regolari di* MOISIL-FUETER *relativamente però alla variabile coniugata* $\bar{x}$.

Con riferimento poi ad un'algebra generale A le proposizioni $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$ del n. **7** consentono di concludere che *l'insieme delle funzioni para-olomorfe a sinistra, a destra in un aperto* U *di* A *è uno spazio vettoriale su* $\boldsymbol{R}$, *anzi una algebra su* $\boldsymbol{R}$ *quando* A *sia commutativa.*

Per le funzioni para-olomorfe si stabiliscono inoltre un *teorema integrale* $(n-1)$*-dimensionale di tipo* CAUCHY (n. **10**) e un *teorema inverso analogo a quello di* MORERA (n. **11**). Entrambi sono formulati in modo indipendente dalla scelta di una base nell'algebra, mercè la considerazione di un conveniente omomorfismo dell'algebra nel gruppo abeliano delle $(n-1)$-forme esterne, riguardate a meno di un fattore non nullo (n. **9**).

Un esame dettagliato delle algebre 2-dimensionali con unità e dell'algebra dei quaternioni mostra che il teorema integrale ottenuto al n. **10** è di tipo essenzialmente nuovo; da esso tuttavia nelle algebre ora accennate si possono dedurre teoremi integrali di struttura più vicina a quella nota nella letteratura (n. **12**).

2. - L'algebra A come varietà centro-affine.

Sia A un'algebra di dimensione finita n, sul campo reale $\boldsymbol{R}$, x un suo elemento ([3]).

Se $\{u_j\}$ è una base in A può scriversi

$$x = x^j u_j \qquad (x^j \in \boldsymbol{R}) \ (^4) . \tag{1}$$

Sia J l'applicazione iniettiva di A su $\boldsymbol{R}^n$ definita da

$$J : x \rightarrow (x^1, \ldots, x^n) .$$

Si consideri in A la topologia immagine della topologia ordinaria di $\boldsymbol{R}^n$ mediante l'applicazione J^{-1}. A diviene così uno spazio topologico di HAUSDORFF

([3]) Per le nozioni generali sulle algebre si veda S. SCORZA [**15**]; vedi anche A. A. ALBERT [**1**], J. H. M. WEDDERBURN [**16**].

([4]) Qui e nel seguito si fa uso della convenzione di EINSTEIN.

e J un omeomorfismo di A su $\boldsymbol{R}^n$. La coppia (A, J) è una carta locale di A; A è quindi una varietà topologica (5).

La centro-affinità di $\boldsymbol{R}^n$, cioè le trasformazioni di $\boldsymbol{R}^n$ del tipo

$$x^{j'} = a^{j'}_j x^j \qquad \det(a^{j'}_j) \neq 0 \ (^6)\,, \tag{2}$$

con $a^{j'}_j \in \boldsymbol{R}$, costituiscono uno *pseudogruppo* $\Gamma_a(\boldsymbol{R}^n)$ di trasformazioni di $\boldsymbol{R}^n$.

Costruito, a partire della carta (A, J), l'atlante completo in relazione allo pseudogruppo $\Gamma_a(\boldsymbol{R}^n)$, l'algebra A diviene una *varietà differenziale a struttura centro-affine.*

Si noti che le strutture di spazio topologico di HAUSDORFF, di varietà topologica, di varietà centro-affine, introdotte nell'algebra A, hanno *carattere intrinseco*, cioè non dipendono dalla base $\{u_j\}$ fissata in A.

Invero, il cambiamento di base

$$u_{k'} = a^k_{k'} u_k \qquad \det(a^k_{k'}) \neq 0\,, \tag{3}$$

dà luogo sulle componenti dell'elemento x alla relazione (2), con le $a^{j'}_j$ soddisfacenti alla

$$a^{j'}_t a^t_{k'} = \delta^{j'}_{k'}\,, \qquad a^j_{t'} a^{t'}_k = \delta^j_k \ (^7)\,; \tag{4}$$

questa osservazione consente di pervenire all'asserto senza difficoltà.

3. - Il tensore γ.

È utile notare che *l'algebra A, pensata come spazio vettoriale, è canonicamente isomorfa allo spazio tangente $T_{\overset{x}{\circ}}$ alla varietà centro-affine A nel punto $\underset{\circ}{x}$.*

Si consideri infatti l'*isomorfismo* tra A e $T_{\overset{x}{\circ}}$ che alla base $\{u_j\}$ di A fa corrispondere la base naturale $\{e_j\}$ di $T_{\overset{x}{\circ}}$ relativa alle coordinate locali x^j. Si prova subito che l'isomorfismo definito non dipende dalla base scelta in A.

In conclusione, ad ogni elemento $\hat{x} = \hat{x}^j u_j$ di A corrisponde nell'isomorfismo un elemento di $T_{\overset{x}{\circ}}$; le $\hat{x}^j$ sono quindi componenti di un vettore di $T_{\overset{x}{\circ}}$ nella base naturale $\{e_j\}$ di $T_{\overset{x}{\circ}}$.

Si consideri ora l'algebra tensoriale relativa a $T_{\overset{x}{\circ}}$. È utile l'osservazione

(5) Per le nozioni di geometria differenziale si veda S. KOBAYASHI e K. NOMIZU [9].

(6) È comodo per il seguito scrivere semplicemente $x^{j'}$, $u_{k'}$, $\gamma^{j'}_{h'k'}$, ... in luogo di x'^j, u'_k, γ'^j_{hk}, ... vedi per es. J. A. SCHOUTEN [14], I.

(7) Le matrici $(a^{j'}_j)$, $(a^k_{k'})$ che intervengono rispettivamente nelle (2) e (3) sono dunque contragredienti. Cfr. p. es. N. BOURBAKI [4], p. 89.

$\boldsymbol{O}_1$ – *Le costanti di moltiplicazione γ^j_{hk} dell'algebra A in relazione alla base $\{u_j\}$ sono le componenti di un tensore di $T^*_{\overset{\circ}{z}} \otimes T^*_{\overset{\circ}{z}} \otimes T_{\overset{\circ}{z}}$ nella base ottenuta per prodotto tensoriale a partire dalla base naturale $\{e_j\}$ di $T_{\overset{\circ}{z}}$.*

Per la dimostrazione basta osservare che nella base $\{u_{k'}\}$ ottenuta dalla base $\{u_k\}$ mediante la (3), le costanti di moltiplicazione $\gamma^{j'}_{h'k'}$ sono date da

$$\gamma^{j'}_{h'k'} = a^h_{h'}\, a^k_{k'}\, a^{j'}_j\, \gamma^j_{hk} \text{ (8)} .$$

Denotato con γ il tensore di cui all'osservazione $\boldsymbol{O}_1$ (*tensore di moltiplicazione*), è immediato rilevare che la *relazione*

$$c^1_3(\gamma \otimes \gamma) = c^2_2(\gamma \otimes \gamma) \text{ (9)}$$

traduce la *proprietà associativa* dell'algebra, mentre la eventuale *simmetria* di γ negli indici di covarianza equivale alla *proprietà commutativa.*

Poichè, come si è visto, le x^r sono componenti di un vettore di $T_{\overset{\circ}{z}}$, la quantità $\gamma^j_{rk}x^r$, $\gamma^j_{hr}x^r$ (*parametri sinistri e destri* di x (10)) sono, rispettivamente le componenti di due *tensori* di $T^*_{\overset{\circ}{z}} \otimes T_{\overset{\circ}{z}}$, dipendenti da x.

Proseguendo in questo ordine di idee di natura tensoriale si ritrovano rapidamente alcune note proposizioni.

$\boldsymbol{P}_1$ – *I determinanti sinistro e destro, $'D(x)$, $D'(x)$, relativi ad un elemento x dell'algebra, sono indipendenti dalla base $\{u_k\}$.*

$\boldsymbol{P}_2$ – *Le tracce sinistra e destra, $'t(x)$, $t'(x)$, relative ad un elemento x dell'algebra, sono indipendenti dalla base $\{u_k\}$.*

Si ricordi anzitutto che $'D(x)$, $D'(x)$ e $'t(x)$, $t'(x)$ sono, rispettivamente, i determinanti e le tracce delle matrici

$$'X = (\gamma^j_{rk}x^r) , \qquad X' = (\gamma^j_{hr}x^r) ,$$

rappresentazione sinistra, *destra* dell'elemento x di A.

---

(8) Cfr. p. es. G. Scorza **[15]**, (5) p. 302.

(9) c^j_k è l'omomorfismo di contrazione relativo allo j-esimo indice di contravarianza e al k-esimo indice di covarianza.

(10) Per le nozioni di teoria delle algebre, che intervengono qui e più avanti, si veda G. Scorza **[15]**, n. 184-193; ved. anche A. A. Albert **[1]**, p. 218 e **[2]**, p. 16-18.

Ciò premesso, per giungere al risultato basterà provare che $'D(x)$, $D'(x)$, $'t(x)$, $t'(x)$ sono degli *scalari*. Questo, d'altra parte, risulta immediatamente dalle relazioni

$$'D(x) = \frac{1}{n!}\, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \varepsilon^{k_1 \dots k_n} \gamma^{j_1}_{r_1 k_1} x^{r_1} \dots \gamma^{j_n}_{r_n k_n} x^{r_n} ,$$

$$D'(x) = \frac{1}{n!}\, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \varepsilon^{h_1 \dots h_n} \gamma^{j_1}_{h_1 r_1} x^{r_1} \dots \gamma^{j_n}_{h_n r_n} x^{r_n} ,$$

$$'t(x) = \gamma^{s}_{rs} x^r , \qquad t'(x) = \gamma^{s}_{sr} x^r ,$$

quando si tenga presente che i simboli di Ricci $\varepsilon_{j_1 \dots j_n}$, $\varepsilon^{j_1 \dots j_n}$ sono componenti di tensori relativi di peso -1, $+1$, rispettivamente (11).

4. - Funzioni in A.

Si consideri ora una *funzione $y = f(x)$ di classe C^1 in un aperto U di A ed a valori in A*. Ciò significa che, in relazione alla base $\{u_k\}$, le componenti y^k di y sono funzioni di classe C^1 delle componenti x^j di x nell'aperto JU di $\boldsymbol{R}^n$. Le (3), (2), (4) mostrano che questa definizione non dipende dalla base $\{u_k\}$.

La funzione y determina nell'aperto U della varietà centro-affine A un *campo vettoriale*; precisamente, ad ogni punto $\underset{0}{x}$ di U si associ il vettore di $T_{\underset{0}{x}}$ di componenti $y^k(\underset{0}{x}{}^1, \dots, \underset{0}{x}{}^n)$ nella base naturale $\{e_k\}$. Il campo vettoriale è di classe C^1.

Sussiste l'osservazione

***O*$_2$** – *Sulla varietà centro-affine A le derivate $(\partial y^k/\partial x^j)_{\underset{0}{x}}$ sono le componenti di un tensore di $T_{\underset{0}{x}} \otimes T^*_{\underset{0}{x}}$ nella base ottenuta per prodotto tensoriale a partire dalla base naturale $\{e_k\}$ di $T_{\underset{0}{x}}$.*

Si consideri infatti il cambiamento di base

$$e_{k'} = a^k_{k'}\, e_k \qquad \det\,(a^k_{k'}) \neq 0 ,$$

in $T_{\underset{0}{x}}$. Esso può considerarsi indotto dal cambiamento di coordinate locali (2) e corrisponde, nell'isomorfismo di cui all'inizio del n. 3, al cambiamento di

(11) Ved. p. es. K. Yano [**17**], p. 3 e J. A. Schouten [**14**], p. 2.

base (3) dell'algebra. Ne viene che, in ogni punto x di U, le componenti del campo vettoriale $y = f(x)$ sono legate dalla relazione

$$y^{k'}(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) = a_k^{k'} y^k(x^1, \ldots, x^n) ;$$

da questa segue

$$\left(\frac{\partial y^{k'}}{\partial x^{j'}}\right)_{\underset{\circ}{x}} = a_k^{k'} a_{j'}^{j} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right)_{\underset{\circ}{x}} \quad (^{12})$$

ciò prova l'asserto.

Al variare di $\underset{\circ}{x}$ nell'aperto U il tensore di cui sopra genera un campo tensoriale di classe C^0.

5. - Funzioni para-olomorfe.

Le premesse fin qui sviluppate consentono ora di dare la definizione di para-olomorfia. Precisamente la funzione $y = f(x)$ si dirà *para-olomorfa a sinistra, a destra* nel punto $\underset{\circ}{x}$ di U, quando sia rispettivamente

$$(5) \qquad \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \gamma^j_{rk} = 0, \qquad \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \gamma^j_{hr} = 0 ,$$

con $h, k = 1, \ldots, n$, le derivate intendendosi calcolate in x.

Conviene sottolineare l'osservazione

$\boldsymbol{O}_3$ – *Le condizioni* (5) *hanno carattere intrinseco, indipendente cioè dalla base* $\{u_k\}$ *dell'algebra.*

Alla $\boldsymbol{O}_3$ si perviene subito, notando che, in virtù delle osservazioni $\boldsymbol{O}_1$, $\boldsymbol{O}_2$, ciascuna delle (5) esprime l'annullarsi di un vettore covariante.

Rispettivamente equivalenti alle (5) sono le *condizioni*

$$(6) \qquad \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \gamma^j_{rk} z^k = 0 , \qquad \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \gamma^j_{hr} z^h = 0 ,$$

con z arbitrario in A.

---

(12) Cfr. J. A. SCHOUTEN **[14]**, formula (3.6) p. 70, tenendo conto che nel caso attuale le derivate $\partial x^{k'}/\partial x^k = a_k^{k'}$ sono costanti.

Si considerino ora la *matrice jacobiana* $J = (\partial y^k / \partial x^j)$, relativa al punto $\underset{0}{x}$, e le matrici $'Z$, Z' *rappresentazione sinistra, destra* dell'elemento z di A (n. **3**). La condizione di para-olomorfia a sinistra, a destra diviene

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Tr}(J'Z) = 0\,, \qquad \operatorname{Tr}(JZ') = 0$$

dove Tr denota la *traccia* e *z è un arbitrario elemento di A.*

Infine, è facile riconoscere che la para-olomorfia a sinistra, a destra della funzione $y = f(x)$ in ogni punto dell'aperto U può anche esprimersi in termini di forme differenziali e precisamente con le *condizioni*

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial y^r}{\partial x^j}\, \gamma^j_{rk}\, \mathrm{d}x^k = 0\,, \qquad \frac{\partial y^r}{\partial x^j}\, \gamma^j_{hr}\, \mathrm{d}x^h = 0\,,$$

nell'aperto U.

Se l'algebra A è commutativa le funzioni para-olomorfe a destra sono anche para-olomorfe a sinistra; e viceversa.

6. - Casi particolari.

Vengono qui considerate le funzioni para-olomorfe a sinistra, a destra in alcune algebre notevoli. I risultati che seguono mostrano che in queste algebre la classe delle *funzioni para-olomorfe a sinistra, a destra è strettamente collegata ad alcune note classi di funzioni.*

a – *Algebra dei numeri reali* ($A = \boldsymbol{R}$).

Posto $u_1 = u$ (unità dell'algebra), si ha $\gamma^1_{11} = 1$ onde le (5) si riducono a $\partial y^1/\partial x^1 = 0$. In definitiva *le funzioni para-olomorfe in un aperto connesso si riducono alle costanti.*

b – *Algebre di dimensione due, con unità.*

Si riducono a tre casi ($A = A_\varepsilon$, con $\varepsilon = \pm 1, 0$) ([13]). Conviene porre $u_1 = u$ (unità di A_ε) e scegliere u_2 in modo che $u_2 u_2 = \varepsilon u_1$.

Ciò premesso le (5) si riducono a

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial y^1}{\partial x^2} + \varepsilon\, \frac{\partial y^2}{\partial y^1} = 0\,.$$

([13]) Sulle algebre A_ε si veda per esempio L. Bassotti e G. B. Rizza [**3**], n. 2, 3, 6.

In definitiva, le *funzioni para-olomorfe in queste algebre sono le funzioni anti-monogene*, cioè le funzioni monogene della variabile coniugata $\bar{x}$ o, ciò che è lo stesso, le coniugate delle funzioni monogene.

Si noti che in corrispondenza al valore $\varepsilon = -1$ si ha l'*algebra complessa* ($A_{-1} = \boldsymbol{C}$) e che in $\boldsymbol{C}$ monogeneità e olomorfia sono sinonimi.

c – *Algebra dei quaternioni* ($A = \boldsymbol{\Gamma}$).

Sia $\{u_k\}$ l'ordinaria base nell'algebra dei quaternioni $\boldsymbol{\Gamma}$. La $(5)_1$ diviene

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial y^1}{\partial x^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \frac{\partial y^3}{\partial x^3} + \frac{\partial y^4}{\partial x^4} = 0\,, \\ &\frac{\partial y^1}{\partial x^2} - \frac{\partial y^2}{\partial x^1} - \frac{\partial y^3}{\partial x^4} + \frac{\partial y^4}{\delta x^3} = 0\,, \\ &\frac{\partial y^1}{\partial x^3} + \frac{\partial y^2}{\partial x^4} - \frac{\partial y^3}{\partial x^1} - \frac{\partial y^4}{\partial x^2} = 0\,, \\ &\frac{\partial y^1}{\partial x^4} - \frac{\partial y^2}{\partial x^3} + \frac{\partial y^3}{\partial x^2} - \frac{\partial y^4}{\partial x^1} = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Si riconosce quindi che *le funzioni para-olomorfe a sinistra in* $\boldsymbol{\Gamma}$ *sono le funzioni anti-regolari a sinistra, cioè sono le funzioni regolari a sinistra* nel senso di MOISIL-FUETER, ma relativamente alla variabile coniugata $\bar{x}$ (14).

Dalle (9) segue ancora che la coniugata $\bar{y}$ di una funzione para-olomorfa a sinistra è una funzione regolare a destra secondo MOISIL-FUETER; e viceversa.

Analogamente per la para-olomorfia a destra.

Conviene sottolineare che l'ultima osservazione consente di *caratterizzare in modo intrinseco la classe delle funzioni regolari a destra, a sinistra relativa alla ordinaria base dell'algebra dei quaternioni* (15).

Ciò è immediata conseguenza del fatto che la nozione di para-olomorfia a sinistra e quella di coniugio nell'algebra $\boldsymbol{\Gamma}$ sono indipendenti dalla scelta di una base (16).

---

(14) Ved. p. es. R. FUETER **[8]**, p. 310. In un'algebra qualunque e con riferimento ad una qualunque base, ved. G. B. RIZZA **[11]**, p. 172.

(15) Una diversa caratterizzazione deriva dal teorema φ_3 del n. 6 del lavoro **[7]** di P. DENTONI e G. B. RIZZA.

(16) Si tenga presente la osservazione $\boldsymbol{O}_3$ del n. **5** e il fatto che nell'algebra $\boldsymbol{\Gamma}$ il coniugio è l'unico anti-morfismo involutorio φ con la proprietà $x + \varphi(x) \in \boldsymbol{R}u$, essendo u l'unità di $\boldsymbol{\Gamma}$.

Il risultato segnalato ha interesse in quanto la definizione di funzione regolare a destra, a sinistra fa intervenire esplicitamente una base fissata nell'algebra, e la classe delle funzioni regolari a destra, a sinistra varia al variare della base scelta ([17]).

d – *Algebra delle matrici reali di ordine* m ($A = M_m$).

Si ha $\dim A = n = m^2$. Si consideri la base costituita dalle matrici $u_{(p-1)m+q}$. ($p, q = 1, \ldots, m$) con elementi tutti nulli, salvo quello appartenente alla riga p-esima ed alla colonna q-esima, che vale 1.

L'elemento x di M_m è dunque la matrice

$$x = \begin{pmatrix} x^1 & \ldots & x^m \\ x^{m+1} & \ldots & x^{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(m-1)m+1} & \ldots & x^{m^2} \end{pmatrix}.$$

Si riconosce che le costanti di moltiplicazione sono tutte nulle, salvo che

$$\gamma^{(p-1)m+r}_{(p-1)m+q,(q-1)m+r} = 1 \qquad (p, q, r = 1, \ldots, m).$$

La condizione $(5)_1$ di *para-olomorfia a sinistra diviene quindi*

$$\frac{\partial y^q}{\partial x^r} + \frac{\partial y^{m+q}}{\partial x^{m+r}} + \ldots + \frac{\partial y^{m(m-1)+q}}{\partial x^{m(m-1)+r}} = 0, \tag{10}$$

con $q, r = 1, \ldots, m$.

Le (10) possono compendiarsi in una unica relazione tra matrici jacobiane

$$J\begin{pmatrix} y^1 & \ldots & y^m \\ x^1 & \ldots & x^m \end{pmatrix} + \ldots + J\begin{pmatrix} y^{m(m-1)+1} & \ldots & y^{m^2} \\ x^{m(m-1)+1} & \ldots & x^{m^2} \end{pmatrix} = 0. \tag{11}$$

Dalla (11) appare che nelle algebre delle matrici, la classe delle funzioni para-olomorfe a sinistra risulta piuttosto ampia.

Analoghi risultati per la para-olomorfia a destra.

([17]) Sui cambiamenti di base che lasciano invariata la classe delle funzioni regolari a destra, a sinistra ved. G. B. RIZZA **[12]** e P. DENTONI **[6]**.

7. - Primi risultati.

Dalla (5) seguono immediatamente le proprietà.

$\boldsymbol{P}_3$ – *Le costanti dell'algebra A sono funzioni para-olomorfe a sinistra e a destra in A.*

$\boldsymbol{P}_4$ – *La somma di funzioni para-olomorfe a sinistra, a destra è una funzione para-olomorfa a sinistra, a destra, rispettivamente.*

Siano ora $y = f(x)$, $z = g(x)$ due funzioni di classe C^1 in un aperto U di A. Posto $w = yz$, con riferimento alla base $\{u_k\}$, si ha $w^r = \gamma^r_{st}\, y^s z^t$. Pertanto

$$\frac{\partial w^r}{\partial x^j}\, \gamma^j_{rk} = \gamma^r_{st}\, \gamma^j_{rk}\, \frac{\partial (y^s z^t)}{\partial x^j}\,, \tag{12}$$

e tenuta presente la proprietà associativa dell'algebra

$$\frac{\partial w^r}{\partial x^j}\, \gamma^j_{rk} = \gamma^j_{sr}\, \gamma^r_{tk} \left(\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\, z^t + \frac{\partial z^t}{\partial x^j}\, y^s \right).$$

Ne discende la proprietà

$\boldsymbol{P}_5$ – *Il prodotto $w = ya$ di una funzione para-olomorfa a sinistra per una costante dell'algebra è una funzione para-olomorfa a sinistra. Analogamente, per il prodotto $w = az$ con ipotesi di para-olomorfia a destra.*

Si ottiene ancora

$\boldsymbol{P}_6$ – *Se l'algebra è commutativa, il prodotto di funzioni para-olomorfe è una funzione para-olomorfa.*

Invero, nell'ipotesi attuale, la (12) può scriversi

$$\frac{\partial w^r}{\partial x^j}\, \gamma^j_{rk} = \gamma^r_{st}\, \gamma^j_{kr}\, \frac{\partial y^s}{\partial x^j}\, z^t + \gamma^r_{ts}\, \gamma^j_{rk}\, \frac{\partial z^t}{\partial x^j}\, y^s\,.$$

Di qui, tenuta presente la proprietà associativa dell'algebra, si perviene subito all'asserto.

Sulla base delle proprietà dimostrate è facile concludere che *l'insieme delle funzioni para-olomorfe a sinistra, a destra in un aperto U di A è uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{R}$, anzi un'algebra su $\boldsymbol{R}$ nell'ipotesi che A sia commutativa.*

8. - Algebre riducibili e para-olomorfia.

Sia A somma diretta delle sottoalgebre $\underset{1}{A}$, $\underset{2}{A}$; cioè $A = \underset{1}{A} \oplus \underset{2}{A}$. Ogni x di A può scriversi univocamente nella forma

$$x = \underset{1}{x} + \underset{2}{x}\,, \tag{13}$$

con $\underset{i}{x}$ in $\underset{i}{A}$, e per ogni y, z di A risulta

$$yz = \underset{1}{y}\underset{1}{z} + \underset{2}{y}\underset{2}{z}\,, \tag{14}$$

con $\underset{i}{y}$, $\underset{i}{z}$ in $\underset{i}{A}$. Posto $n_i = \dim \underset{i}{A}$, risulta $n = n_1 + n_2$:

Scelta una base $\{\overset{i}{u}_k\}$ in $\underset{i}{A}$ $(k = 1, \ldots, n_i)$ si consideri in A la base $\{u_k\}$ dove,

$$u_k = \overset{1}{u}_k \qquad \text{ovvero} \qquad u_k = \overset{2}{u}_{k-n_1}\,,$$

secondo che $k \leqslant n_1$, ovvero $n_1 < k \leqslant n$. Ne segue

$$x^k = \underset{1}{x}{}^k \qquad \text{ovvero} \qquad x^k = \underset{2}{x}{}^{k-n_1}\,, \tag{15}$$

per $k \leqslant n_1$, $n_1 < k \leqslant n$.

Indicate con $\overset{i}{\gamma}{}^j_{hk}$ le costanti di moltiplicazione di $\underset{i}{A}$, dalla (14) segue subito

$$\gamma_{hk}^j = \overset{1}{\gamma}{}_{hk}^j \qquad \text{ovvero} \qquad \gamma_{hk}^j = \overset{2}{\gamma}{}^{j-n_1}_{h-n_1,\,k-n_1}\,, \tag{16}$$

secondo che $j, h, k \leqslant n_1$ ovvero $n_1 < j, h, k \leqslant n$, e $\gamma_{hk}^j = 0$ negli altri casi.

La topologia τ di A (n. **2**) è prodotto delle topologie τ_1, τ_2, indotte da τ in $\underset{1}{A}$, $\underset{2}{A}$ rispettivamente. Sia ora $\underset{i}{U}$ un aperto di $\underset{i}{A}$ $(i = 1, 2)$ ed $U = \underset{1}{U} \times \underset{2}{U}$. In base alla (13), una funzione $y = f(x)$ definita in U è somma delle funzioni $\underset{i}{y}(\underset{1}{x}, \underset{2}{x})$ definite in U.

Ciò premesso sussiste la *proprietà*

***P**$_7$ – Se y è para-olomorfa a sinistra, a destra in U, le funzioni $\underset{i}{y}$ sono para-olomorfe a sinistra, a destra nella variabile $\underset{i}{x}$ in $\underset{i}{U}$; e viceversa.*

Per la dimostrazione, si tengono presenti la (13), le osservazioni sulle γ_{hk}^j, le (15) e le analoghe per y. Per ogni $k_1 \leqslant n_1$, $n_1 < k_2 \leqslant n$ risulta

$$\frac{\partial y^r}{\partial x^j}\gamma_{rk_1}^j = \frac{\partial y^{r_1}}{\partial x^{j_1}}\,\gamma_{r_1 k_1}^{j_1} = \frac{\partial \underset{1}{y}{}^{r_1}}{\partial \underset{1}{x}{}^{j_1}}\,\overset{1}{\gamma}{}_{r_1 k_1}^{j_1}\,,$$

$$\frac{\partial y^r}{\partial x^j}\gamma_{rk_2}^j = \frac{\partial y^{r_2}}{\partial x^{j_2}}\,\gamma_{r_2 k_2}^{j_2} = \frac{\partial \underset{2}{y}{}^{r_2-n_1}}{\partial \underset{2}{x}{}^{j_2-n_1}}\,\overset{2}{\gamma}{}_{r_2-n_1,\,k_2-n_1}^{j_2-n_1}\,,$$

dove si intende che r_1, j_1 percorrano gli interi $1, \dots, n_1$; mentre r_2, j_2 percorrano gli interi $n_1 + 1, \dots, n$.

Dalle relazioni ottenute segue subito l'asserto nel caso della para-olomorfia a sinistra. L'altro caso è del tutto analogo.

9. - L'olomorfismo ϱ.

Sia ora F^{n-1} lo spazio vettoriale su $\boldsymbol{R}$ delle $(n-1)$-*forme esterne*, definite sulla varietà centro-affine A. Si consideri in F^{n-1} la *relazione di equivalenza* $\mathcal{R}$ cosí definita:

Per ogni coppia di elementi ω', ω'' di F^{n-1} è $\omega' \mathcal{R} \omega''$, se e solo se esiste una costante reale non nulla λ, tale che $\omega' = \lambda \omega''$.

Si indichi con $\overset{\circ}{F}{}^{n-1}$ il *gruppo additivo* quoziente $F^{n-1}/\mathcal{R}$. Gli elementi di $\overset{\circ}{F}{}^{n-1}$ sono dunque le $(n-1)$-forme riguardate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Ciò premesso, si consideri l'*omomorfismo* tra gruppi additivi

$$\varrho \colon A \to \overset{\circ}{F}{}^{n-1}, \tag{17}$$

definito da

$$\varrho(x) = \left[\frac{1}{n!} x^j \varepsilon_{jj_1 \dots j_{n-1}} \, \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_{n-1}}\right], \tag{18}$$

le $\varepsilon_{jj_1 \dots j_{n-1}}$ essendo gli ordinari simboli di RICCI.

È bene notare che *l'omomorfismo ϱ non dipende dalla base scelta nell'algebra*. Invero, poichè le $\varepsilon_{jj_1 \dots j_{n-1}}$ sono le componenti di un tensore relativo di peso -1 ([18]), passando alla base $\{u_{k'}\}$ data dalla (3), la forma entro parentesi quadre nella (18) si altera solo per il fattore non nullo $\det(a_j^{j'})$.

10. - Teorema integrale.

L'omomorfismo ϱ, introdotto al n. **9**, consente di ottenere un teorema integrale di tipo CAUCHY.

([18]) Ved. nota ([11]).

T_1 – *Se* $y = y(x)$, $z = z(x)$ *sono funzioni para-olomorfe, rispettivamente a sinistra e a destra, in un aperto* U *di* A, *risulta*

$$\int_{V_{n-1}} \omega = 0\,, \tag{19}$$

dove ω *è un'arbitraria* $(n-1)$-*forma della classe di equivalenza* $\varrho(yz)$ *e* V_{n-1} *un qualunque* $(n-1)$-*ciclo omologo a zero in* U *nell'omologia di classe* C^1 *a supporto compatto.*

Il teorema si stabilisce in questo modo.

Poichè $\omega \in \varrho(yz)$, risulta

$$\omega = \frac{\lambda}{n!}\gamma^j_{hk}\, y^h z^k \varepsilon^{jj_1 \dots j_{n-1}} \mathrm{d}x^{j_1}\wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_{n-1}}\,,$$

con λ opportuna costante reale non nulla. Segue

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\lambda}{n!}\gamma^j_{hk}\left(\frac{\partial y^h}{\partial x^r}z^k + y^h\frac{\partial z^k}{\partial x^r}\right)\varepsilon_{jj_1 \dots j_{n-1}} \mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_{n-1}}\,.$$

A causa dell'emisimmetria dei simboli di RICCI e dei prodotti esterni $\mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_{n-1}}$ ci si può limitare a sommare rispetto ad indici $jj_1 \dots j_{n-1}$ tutti diversi e ad indici $rj_1 \dots j_{n-1}$ tutti diversi. In altri termini $jj_1 \dots j_{n-1}$ e $rj_1 \dots j_{n-1}$ possono riguardarsi come permutazioni degli interi $1, 2, \dots, n$. Ne segue $r = j$.

D'altra parte, fissata una permutazione $jj_1 \dots j_{n-1}$ degli interi $1, 2, \dots, n$; risulta

$$\varepsilon_{jj_1 \dots j_{n-1}} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{j_1}\wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_{n-1}} = \mathrm{d}x^1\wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n\,.$$

In definitiva si ha:

$$\mathrm{d}\omega = \lambda\left(\gamma^j_{hk}\frac{\partial y^h}{\partial x^j}z^k + \gamma^j_{hk}\, y^h\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^1\wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{20}$$

quindi nelle ipotesi di para-olomorfia a sinistra, destra relative ad y, z rispettivamente, risulta $\mathrm{d}\omega = 0$.

Segue finalmente l'asserto, in virtù del teorema generale di GREEN-STOKES [17].

---

[17] Ved. p. es. A. LICHNEROWICZ [**10**], p. 174. Ved. anche H. CARTAN [**5**], p. 92.

Conviene ora accennare a qualche caso particolare.

Se a è una costante dell'algebra, in virtù dell'osservazione $\boldsymbol{P}_3$, si può scegliere $z = a$. Il teorema $\boldsymbol{T}_1$ diviene allora un *teorema di tipo Cauchy per le funzioni y para-olomorfe a sinistra.* In particolare si può assumere $a = u_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ essendo $\{u_k\}$ una base di A. Se l'algebra è dotata di *unità destra* u', si può scegliere $a = u'$; in questo caso ω appartiene alla classe $\varrho(y)$.

Analoghe considerazioni per le funzioni z para-olomorfe a destra.

11. - Teorema del tipo di Morera.

Il teorema $\boldsymbol{T}_1$ del n. **10**, con riferimento ad una sola funzione, può invertirsi nel modo seguente.

Siano $a_1, \ldots, a_n$ costanti di A, linearmente indipendenti. In relazione ad una funzione $y = f(x)$ definita in un aperto U di A si considerino n arbitrarie $(n-1)$-forme $\omega_1, \ldots, \omega_n$, appartenenti rispettivamente alle classi di equivalenza $\varrho(ya_1), \ldots, \varrho(ya_n)$.

Ciò premesso, sussiste un teorema del tipo di Morera; precisamente

$\boldsymbol{T}_2$ - *Se $y = f(x)$ è di classe C^1 in un aperto U di A e, per ogni $(n-1)$-ciclo V_{n-1} omologo a zero in U, risulta*

$$\int_{V_{n-1}} \omega_t = 0 \qquad\qquad t = 1, \ldots, n\ ;$$

allora la funzione $y = f(x)$ è para-olomorfa a sinistra in U.

Un analogo teorema sussiste in relazione alla para-olomorfia a destra.

Per la dimostrazione si noti che l'ipotesi sulle a_j consente di scegliere come base $\{u_j\}$ nell'algebra A proprio quella costituita dalle a_j, cioè di porre $u_j = a_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Posto ora $z = a_t$, risulta $z^k = \delta^k_t$. Dalla (20) segue

$$\mathrm{d}\omega_t = \lambda_t\, \gamma^j_{ht} \frac{\partial y^h}{\partial x^j}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n\,,$$

con $\lambda_t \neq 0$.

A questo punto un classico ragionamento permette di concludere che, nelle ipotesi del teorema, in ogni punto di U risulta $\mathrm{d}\omega_t = 0$. Poichè t è un qualunque intero dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$, in ogni punto di U sussistono le $(5)_1$; ciò prova l'asserto.

12. - Casi particolari.

Conviene terminare considerando alcune algebre particolari e dando in queste la formulazione esplicita del teorema del n. **10**.

b – *Algebre di dimensione due, con unità.*

Con la notazione del n. **6**, si riconosce subito che, per le funzioni para-olomorfe $y = y(x)$ in un aperto U di A_8, il *teorema integrale* $\boldsymbol{T}_1$ diviene

$$\int_{V_1} y^1\,\mathrm{d}x^2 - y^2\,\mathrm{d}x^1 = 0\,, \tag{21}$$

dove V_1 è un qualunque ciclo unidimensionale soddisfacente alle ipotesi indicate al n. **10** [20].

Si noti che un analogo teorema sussiste anche per la funzione yu_2, anche essa para-olomorfa in base alla proprietà $\boldsymbol{P}_5$ del n. **7**.

Utilizzando la (21) e la relazione analoga, corrispondente al caso ora accennato, si perviene subito al *teorema integrale*

$$\int_{V_1} y\,\overline{\mathrm{d}x} = 0\,, \tag{22}$$

del tutto simile a quello classico per le funzioni monogene [21].

Il risultato non sorprende, tenendo presenti le osservazioni del n. **6**. In luogo di $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x^1 u_1 + \mathrm{d}x^2 u_2$ interviene qui il coniugato $\overline{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}x^1 u_1 - \mathrm{d}x^2 u_2$, nozione questa che nelle algebre A_8 può introdursi intrinsecamente [22].

c – *Algebra dei quaternioni.*

Con riferimento alla classica base dell'algebra $\boldsymbol{\Gamma}$ dei quaternioni (n. **6**), è facile riconoscere che il *teorema integrale* $\boldsymbol{T}_1$ diviene

$$\begin{aligned}
&\int_{V_3} (y^1z^1 - y^2z^2 - y^3z^3 - y^4z^4)\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^4 + \\
&-\int_{V_3} (y^1z^2 + y^2z^1 + y^3z^4 - y^4z^3)\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^4 + \\
&+\int_{V_3} (y^1z^3 - y^2z^4 + y^3z^1 + y^4z^2)\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^4 + \\
&-\int_{V_3} (y^1z^4 + y^2z^3 - y^3z^2 + y^4z^1)\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3 = 0\,,
\end{aligned} \tag{23}$$

---

[20] Basta assumere $z = u_1 = u$ (unità di A_8) e tener presente la (18) con $n = 2$.

[21] Ved. p. es. G. B. Rizza **[11]**, p. 184.

[22] Ved. L. Bassotti e G. B. Rizza **[3]**, n. 3.

essendo $y = y(x)$, $z = z(x)$ funzioni para-olomorfe a sinistra e a destra rispettivamente, in un aperto U e V_3 un ciclo 3-dimensionale omologo a zero in U.

Analoghe relazioni si ottengono considerando in luogo di $y = yu_1$ le funzioni yu_2, yu_3, yu_4, anch'esse para-olomorfe a sinistra in virtù della proprietà $\boldsymbol{P}_5$ (n. **7**).

Dalle quattro uguaglianze così ottenute discende senza difficoltà un *teorema integrale* più compatto. Precisamente

$\tilde{\boldsymbol{T}}_1$ – *Se $y = y(x)$, $z = z(x)$ sono funzioni para-olomorfe, rispettivamente a sinistra e a destra, in un aperto U di $\boldsymbol{\Gamma}$, risulta*

$$\int_{V_3} z\,\overline{\mathrm{d}X}\,y = 0\,, \tag{24}$$

dove

$$\mathrm{d}X = u_1\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^4 - u_2\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^4 +$$

$$+ u_3\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^4 - u_4\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\,,$$

e V_3 è un qualunque ciclo di dimensione tre, omologo a zero in U nell'omologia di classe C^1 a supporto compatto.

Il teorema ora ottenuto è del tutto simile a quello ben noto per le funzioni regolari nel senso di MOISIL-FUETER [23].

Questo fatto appare naturale alla luce delle osservazioni del n. **6**. In luogo di $\mathrm{d}X$ interviene qui il coniugato $\overline{\mathrm{d}X}$ [24].

Bibliografia.

[1] A. A. ALBERT, *Modern Higher Algebra*, University Press, Chicago, 1958.

[2] A. A. ALBERT, *Structure of Algebras*, Colloquium American Math. Soc., New York, 1939.

[3] L. BASSOTTI – G. B. RIZZA, *Funzioni monogene nelle algebre reali di dimensione due e applicazioni conformi*, Rend. Mat. e Appl., Roma, (6), **6**, (1973), 381-397.

---

(23) Ved. p. es. R. FUETER **[8]**, p. 312; in relazione ad un'algebra generale, ved. G. B. RIZZA **[11]**, p. 175-176.

(24) Anche nell'algebra dei quaternioni la nozione di coniugio può introdursi indipendentemente dalla scelta di una base. Ved. p. es. P. DENTONI e G. B. RIZZA **[7]**, nota (23), p. 7.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre*, II, Hermann, Paris, 1955.

[5] H. Cartan, *Formes différentielles*, Hermann, Paris, 1967.

[6] P. Dentoni, *Funzioni regolari in un'algebra e cambiamenti di base*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **51**, (1971), 274-281.

[7] P. Dentoni - G. B. Rizza, *Una nuova classe di funzioni in un'algebra reale*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **2**, (1972), 171-181.

[8] R. Fueter, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$, $\Delta\Delta u = 0$ mit reellen Variablen*, Comment. Math. Helv., **7**, (1934-35), 307-330.

[9] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Fundations of differential geometry*, I, Interscience Publ., New York, 1963.

[10] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma, 1955.

[11] G. B. Rizza, *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*, Comm. Pontificia Acad. Sci., **14**, (1950), 169-194.

[12] G. B. Rizza, *Sulle condizioni di regolarità delle funzioni in un'algebra*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **20**, (1956), 38-43.

[13] G. B. Rizza, *Contributi recenti alla teoria delle funzioni nelle algebre*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **43**, (1973), 45-54.

[14] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*, Springer, Berlin, 1958.

[15] G. Scorza, *Corpi numerici e algebre*, Principato, Messina, 1921.

[16] J. H. M. Wedderburn, *Lectures on Matrices*, Colloquium American Math. Soc., New York, 1934.

[17] J. K. Yano, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

* * *