Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 205-214

CRISTINA REGGIANI (*)

Omologia di un complesso in una categoria con prodotti finiti. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Introduzione.

Scopo del presente lavoro è di definire il gruppo di omologia di un gruppo differenziale in una categoria con prodotti finiti.

È noto che il funtore di omologia è permutabile col funtore « esponenziale » controvariante, nel senso che se A è un complesso ed X un insieme, $\mathscr{H}(A^X) \approx \mathscr{H}(A)^X$, dove A^X ed $\mathscr{H}(A)^X$ sono le potenze dirette. Partendo da questa considerazione, viene spontaneo definire il gruppo di omologia $K(A)$ di un complesso A in una categoria $\mathscr{K}$ con prodotti finiti, come quel gruppo in $\mathscr{K}$ (se esiste) tale che $[X, K(A)] \approx \mathscr{H}[X, A]$, per ogni $X \in |\mathscr{K}|$, dove ovviamente $[X, K(A)]$ e $[X, A]$ hanno le strutture indotte da $K(A)$ e da A rispettivamente. Per facilitare la trattazione, si sostituisce ad A il funtore $\mathscr{K}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Comp}$ che composto col dimenticante dà $[-, A]$ e anzi si generalizza (in modo inessenziale), chiamando « complesso in $\mathscr{K}$ » ogni funtore $\mathscr{F}: \mathscr{K}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Comp}$ che composto col dimenticante $\mathit{Comp} \to \mathscr{S}$ sia rappresentabile. Nel caso che esistano i sottogruppi dei cicli e dei bordi e il loro quoziente, è facile mostrare che questo è il gruppo di omologia. Infine, anche per i complessi in $\mathscr{K}$ si può definire un « omomorfismo di connessione » e mostrare che per esso vale il teorema della successione esatta.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (Ricercatore senza assegno), durante il periodo di godimento di una borsa di studio del C.N.R. afferente alle discipline algebriche e geometriche. - Ricevuto: 30-X-1974.

2. - Premesse e notazioni.

Sia $\mathscr{V}$ una varietà di algebre e $\mathscr{D}: \mathscr{V} \to \mathscr{S}$ il relativo funtore dimenticante. Sia $\mathscr{K}$ una categoria con prodotti finiti.

Definizione. Dicesi *algebra di* $\mathscr{V}$ *in* $\mathscr{K}$ ogni funtore controvariante $\mathscr{F}: \mathscr{K} \to \mathscr{V}$ tale che $\mathscr{D}\mathscr{F}$ sia rappresentabile (1). Indichiamo con $\mathscr{V}_{\mathscr{K}}$ la categoria delle $\mathscr{K}$-algebre di $\mathscr{V}$ (2).

Sia $\mathscr{A} \in |\mathscr{V}_{\mathscr{K}}|$, $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$; sia $\mathscr{R}_{\mathscr{A}}: \mathscr{K} \to \mathscr{V}$ il funtore controvariante definito implicitamente dalla relazione $\mathscr{D}\mathscr{R}_{\mathscr{A}} = h_A$. È noto che $\mathscr{R}_{\mathscr{A}}$ è un'algebra di $\mathscr{V}$ in $\mathscr{K}$. Siano $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in |\mathscr{V}_{\mathscr{K}}|$, $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$, $\mathscr{B} = \langle B, \Psi \rangle$, e sia $F: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un omomorfismo, $F = \langle f, \Phi, \Psi \rangle$. Allora $\mathscr{R}_F: \mathscr{R}_{\mathscr{A}} \to \mathscr{R}_{\mathscr{B}}$ definita dalla relazione $\mathscr{D}\mathscr{R}_F = h_f$ è una trasformazione naturale.

Definiamo ora $\mathscr{R}\_: \mathscr{V}_{\mathscr{K}} \to \mathscr{V}^{\mathscr{K}^{\mathrm{op}}}$ come segue:

$$\mathscr{R}\_(\mathscr{A}) = \mathscr{R}_{\mathscr{A}},$$

$$\mathscr{R}\_(F) = \mathscr{R}_F .$$

È facile allora provare che $\mathscr{R}\_$ è un funtore iniettivo.

Definizione. Sia $\mathscr{V}'_{\mathscr{K}}$ l'immagine di $\mathscr{R}\_$. Gli oggetti di $\mathscr{V}'_{\mathscr{K}}$ si dicono algebre *standard* di $\mathscr{V}$ in $\mathscr{K}$ e i morfismi si dicono *omomorfismi*.

Osservazione. La categoria $\mathscr{V}'_{\mathscr{K}}$ delle algebre standard di $\mathscr{V}$ in $\mathscr{K}$ è una sottocategoria piena di $\mathscr{V}^{\mathscr{K}^{\mathrm{op}}}$, ovviamente isomorfa alla categoria $\mathscr{V}_{\mathscr{K}}$ delle $\mathscr{K}$-algebre di $\mathscr{V}$.

Ora potrebbe apparire più naturale chiamare algebre di $\mathscr{V}$ in $\mathscr{K}$ gli oggetti di $\mathscr{V}'_{\mathscr{K}}$. Si è scelta la definizione più generale perchè semplifica alcune delle considerazioni che seguono.

---

(1) Sia $A \in |\mathscr{K}|$. Si dice funtore standard controvariante (determinato da A) il funtore $h_A = [-, A]: \mathscr{K}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{S}$. Analogamente, se $f: A \to B$, si indicherà con h_f la trasformazione naturale $[-, f]$. Un funtore $\mathscr{F}: \mathscr{K}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{S}$ si dice *rappresentabile* se è isomorfo ad un funtore standard controvariante.

(2) Per il concetto di $\mathscr{K}$-algebra si rimanda a [3], dove però le $\mathscr{K}$-algebre sono chiamate « algebre (in $\mathscr{K}$) ».

D'altra parte se si indica con $\mathscr{V}''_{\mathscr{K}}$ la sottocategoria piena di $\mathscr{V}^{\mathscr{K}^{op}}$ delle algebre di $\mathscr{V}$ in $\mathscr{K}$, appare chiaro che la generalizzazione non è essenziale in virtù del seguente teorema, del quale omettiamo l'ovvia dimostrazione.

Teorema 1. *$\mathscr{V}'_{\mathscr{K}}$ è una sottocategoria rappresentativa di $\mathscr{V}''_{\mathscr{K}}$, ossia per ogni $\mathscr{F} \in |\mathscr{V}''_{\mathscr{K}}|$, esiste un $\mathscr{G} \in |\mathscr{V}'_{\mathscr{K}}|$ tale che $\mathscr{F} \simeq \mathscr{G}$.*

Siano $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$, $\mathscr{B} = \langle B, \Psi \rangle$ oggetti di $\mathscr{V}_{\mathscr{K}}$ ed $F = \langle f, \Phi, \Psi \rangle$ un omomorfismo fra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Si osserva che F è un omomorfismo iniettivo (cfr. [**3**]) se e solo se h_f è monopuntuale ([3]) e che F è un omomorfismo suriettivo (cfr. [**3**]) se e solo se h_f è invertibile a destra. Si giustifica così la seguente:

Definizione. Un omomorfismo fra due algebre di $\mathscr{V}$ in $\mathscr{K}$, $\varphi: \mathscr{F}' \to \mathscr{F}''$, si dice *iniettivo* [*suriettivo*] quando è monopuntuale [invertibile a destra].

3. - Il gruppo di omologia di un complesso.

Siano Ab la varietà dei gruppi abeliani e $Comp$ quella dei complessi, $\mathscr{D}: Ab \to \mathscr{S}$ e $\overline{\mathscr{D}}: Comp \to \mathscr{S}$ i relativi funtori dimenticanti.

Coerentemente con le definizioni e le notazioni appena introdotte, diremo *gruppo abeliano* [*standard*] in $\mathscr{K}$ ogni algebra [standard] di Ab in $\mathscr{K}$, e *complesso* [*standard*] in $\mathscr{K}$ ogni algebra [standard] di $Comp$ in $\mathscr{K}$. Le rispettive categorie si indicheranno con $Ab''_{\mathscr{K}}$, $Ab'_{\mathscr{K}}$, $Comp''_{\mathscr{K}}$, $Comp'_{\mathscr{K}}$. Il funtore $\mathscr{R}_{-}$ relativo alla varietà Ab verrà indicato con $\mathscr{G}_{-}$, mentre quello relativo alla varietà $Comp$ sarà indicato con $\mathscr{F}_{-}$. Così, se $\mathscr{A} \in |Ab_{\mathscr{K}}|$, $\mathscr{G}_{\mathscr{A}}$ è un gruppo abeliano standard (in $\mathscr{K}$) e, se $\mathscr{A} \in |Comp_{\mathscr{K}}|$, $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}$ è un complesso standard (in $\mathscr{K}$).

Indichiamo con $\mathscr{U}: Comp \to Ab$ e $\mathscr{U}_{\mathscr{K}}: Comp_{\mathscr{K}} \to Ab_{\mathscr{K}}$ i funtori dimenticanti.

Chiaramente, se $\mathscr{F}$ è un complesso in $\mathscr{K}$, il funtore $\mathscr{U}\mathscr{F}$ è un gruppo abeliano in $\mathscr{K}$. Inoltre, dato un complesso standard in $\mathscr{K}$, $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}$, si ha $\mathscr{U} \cdot \mathscr{F}_{\mathscr{A}} = \mathscr{G}_{\mathscr{U}_{\mathscr{K}}(\mathscr{A})}$.

In tutto il lavoro indicheremo con $\mathscr{H}: Comp \to Ab$ il funtore di omologia concreto. Ovviamente se $\mathscr{F}$ è un complesso in $\mathscr{K}$, $\mathscr{H}\mathscr{F}: \mathscr{K}^{op} \to Comp$.

---

(3) Siano $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ funtori tra le categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$. Una trasformazione naturale $\varphi: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ si dice monopuntuale quando per ogni $X \in |\mathscr{C}|$, $\varphi_X: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$ è monomorfismo.

Definizione. Sia $\mathscr{F}$ un complesso in $\mathscr{K}$. Se $\mathscr{H}\ \mathscr{F}$ è un gruppo abeliano in $\mathscr{K}$ lo si dirà *gruppo* (*in* $\mathscr{K}$) *di omologia del complesso* $\mathscr{F}$ e si scriverà

$$H(\mathscr{F}) = \mathscr{H}\mathscr{F}\,. \tag{1}$$

Siano $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ complessi in $\mathscr{K}$ che ammettono gruppo di omologia e sia $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ un omomorfismo. Allora si definisce

$$H(\varphi) = \mathscr{H}\varphi\,. \tag{2}$$

Teorema 2. *Supponiamo che tutti i complessi* (*in* $\mathscr{K}$) *ammettano gruppo di omologia. Allora* H *definito da* (1) *e* (2) *è un funtore da* $Comp''_{\mathscr{K}}$ *in* $Ab''_{\mathscr{K}}$.

Dimostrazione. Tutto si riduce ad osservare che, nelle ipotesi del teorema, H è la restrizione alla categoria $Comp''_{\mathscr{K}}$ del funtore $\mathscr{H}\cdot - \colon Comp^{\mathscr{K}^{op}} \to Ab^{\mathscr{K}^{op}}$, dato dalla composizione a sinistra con $\mathscr{H}$.

4. - Il teorema della successione esatta.

Sia $0 = \langle 1, \Phi\rangle$ ([4]) lo zero-oggetto di $Ab_{\mathscr{K}}$ [$Comp_{\mathscr{K}}$]. Ovviamente $\mathscr{G}_0$ [$\mathscr{F}_0$] sarà zero-oggetto nella categoria $Ab'_{\mathscr{K}}$ [$Comp'_{\mathscr{K}}$]; anzi, in virtù del fatto che $Ab'_{\mathscr{K}}$ [$Comp'_{\mathscr{K}}$] è sottocategoria rappresentativa di $Ab''_{\mathscr{K}}$ [$Comp''_{\mathscr{K}}$], $\mathscr{G}_0$ [$\mathscr{F}_0$] è zero-oggetto anche in $Ab''_{\mathscr{K}}$ [$Comp''_{\mathscr{K}}$]. Si osserva inoltre che un morfismo φ di $Ab''_{\mathscr{K}}$ [$Comp''_{\mathscr{K}}$] è zero-morfismo se e solo se per ogni $X \in |\mathscr{K}|$, φ_X è zero-morfismo di Ab [$Comp$].

D'ora in poi indicheremo con 0 anche i funtori $\mathscr{G}_0$, $\mathscr{F}_0$ e gli zero-morfismi delle categorie $Comp''_{\mathscr{K}}$ e $Ab''_{\mathscr{K}}$.

Si osserva che ad ogni complesso (in $\mathscr{K}$), $\mathscr{F}$, può essere associato un endomorfismo di quadrato nullo $\partial\colon \mathscr{U}\mathscr{F} \to \mathscr{U}\mathscr{F}$ nel modo seguente: sia $X \in |\mathscr{K}|$ e sia $\partial_X\colon \mathscr{U}\mathscr{F}(X) \to \mathscr{U}\mathscr{F}(X)$ l'omomorfismo di passaggio al contorno del complesso $\mathscr{F}(X)$; è facile verificare che ∂_X è naturale in X; basterà allora porre $\partial = (\partial_X)_{X \in |\mathscr{K}|}$.

In particolare, se $\mathscr{A} = \langle A, \Phi, d_A\rangle$ è un oggetto di $Comp_{\mathscr{K}}$ ed $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\mathscr{A}}$, allora $\partial = \mathscr{F}_{d_A}$.

Definizione. Siano $\mathscr{F}'$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}''$ gruppi abeliani in $\mathscr{K}$, $\varphi\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$, $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ omomorfismi. Si dice che la *successione* $\mathscr{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}''$ è *esatta*

([4]) Con 1 si indica l'oggetto finale della categoria $\mathscr{K}$.

quando

(i) $\psi\varphi = 0$,

(ii) per ogni $X \in |\mathscr{K}|$, per ogni trasformazione naturale $\alpha\colon h_X \to \mathscr{D}\mathscr{F}$ tale che $(\mathscr{D}\psi)\alpha = 0$, esiste una trasformazione naturale $\beta\colon h_X \to \mathscr{D}\mathscr{F}'$ tale che $(\mathscr{D}\varphi)\beta = \alpha$. Analoga definizione nel caso dei complessi con $\overline{\mathscr{D}}$ in luogo di $\mathscr{D}$.

Lemma 1. *Siano $\mathscr{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}''$, $\mathscr{G}' \xrightarrow{\eta} \mathscr{G} \xrightarrow{\vartheta} \mathscr{G}''$ successioni di gruppi abeliani [complessi] (in $\mathscr{K}$) isomorfe. La prima è esatta se e solo se la seconda è esatta. Inoltre per ogni $X \in |\mathscr{K}|$ la successione $\mathscr{F}'(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathscr{F}(X) \xrightarrow{\psi_X} \mathscr{F}''(X)$ è esatta se e solo se la successione $\mathscr{G}'(X) \xrightarrow{\eta_X} \mathscr{G}(X) \xrightarrow{\vartheta_X} \mathscr{G}''(X)$ è esatta.*

Dimostrazione. Ovvia.

Lemma 2. *La successione di gruppi abeliani [complessi] standard*

$$\mathscr{F}_{\mathscr{A}} \xrightarrow{\mathscr{F}_F} \mathscr{F}_{\mathscr{B}} \xrightarrow{\mathscr{F}_G} \mathscr{F}_{\mathscr{C}} \tag{3}$$

è esatta se e solo se per ogni $X \in |\mathscr{K}|$ la successione

$$\mathscr{F}_{\mathscr{A}}(X) \xrightarrow{\mathscr{F}_F(X)} \mathscr{F}_{\mathscr{B}}(X) \xrightarrow{\mathscr{F}_G(X)} \mathscr{F}_{\mathscr{C}}(X) \tag{4}$$

è esatta.

Dimostrazione. Dimostriamo il lemma per i complessi; la dimostrazione per i gruppi abeliani è del tutto analoga. Supponiamo che la (3) sia esatta. Ne segue immediatamente che per ogni oggetto X di $\mathscr{K}$ l'immagine di $\mathscr{F}_F(X)$ è contenuta nel nucleo di $\mathscr{F}_G(X)$. D'altra parte, se $b \in \mathscr{F}_{\mathscr{B}}(X)$ è tale che $\mathscr{F}_G(X)(b) = 0$, accade che $(\mathscr{D}\mathscr{F}_G)h_b = 0$. Quindi dall'esattezza di (3) deriva che esiste $a \in \mathscr{F}_{\mathscr{A}}(X)$ tale che $(\mathscr{D}\mathscr{F}_F)h_b = h_a$. Questo implica che $\mathscr{F}_F(X)(a) = b$, ossia che b appartiene all'immagine di $\mathscr{F}_F(X)$. Dunque per ogni $X \in |\mathscr{K}|$ la (4) è esatta.

Con considerazioni simili si può dimostrare facilmente l'implicazione opposta.

Corollario. *La successione di gruppi abeliani [complessi] (in $\mathscr{K}$) $\mathscr{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}''$ è esatta se e solo se per ogni $X \in |\mathscr{K}|$ la successione $\mathscr{F}'(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathscr{F}(X) \xrightarrow{\psi_X} \mathscr{F}''(X)$ è esatta.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dai lemmi precedenti perchè per ogni successione di gruppi abeliani [complessi] ne esiste una standard ad essa isomorfa.

Teorema 3 della successione esatta. *Sia*

$$\mathscr{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}'' \tag{5}$$

una successione esatta di complessi (in $\mathscr{K}$) con φ omomorfismo iniettivo e ψ omomorfismo suriettivo. Esistano i gruppi di omologia $H(\mathscr{F}')$, $H(\mathscr{F})$, $H(\mathscr{F}'')$. Allora esiste un omomorfismo $\delta: H(\mathscr{F}'') \to H(\mathscr{F}')$ tale che la successione di gruppi abeliani (in $\mathscr{K}$)

$$H(\mathscr{F}') \xrightarrow{H(\varphi)} H(\mathscr{F}) \xrightarrow{H(\psi)} H(\mathscr{F}'') \xrightarrow{\delta} H(\mathscr{F}') \xrightarrow{H(\varphi)} H(\mathscr{F}) \tag{6}$$

è esatta.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, dall'esattezza della (5) segue che per ogni $X \in |\mathscr{K}|$ la successione di complessi concreti $\mathscr{F}'(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathscr{F}(X) \xrightarrow{\psi_X} \mathscr{F}''(X)$ è esatta.

Allora, per un ben noto teorema sulle successioni esatte di complessi concreti, esisterà un omomorfismo δ_X: $\mathscr{H}\mathscr{F}''(X) \to \mathscr{H}\mathscr{F}'(X)$ tale che la successione $\mathscr{H}\mathscr{F}'(X) \xrightarrow{\mathscr{H}\varphi_X} \mathscr{H}\mathscr{F}(X) \xrightarrow{\mathscr{H}\psi_X} \mathscr{H}\mathscr{F}''(X) \xrightarrow{\delta_X} \mathscr{H}\mathscr{F}'(X) \xrightarrow{\mathscr{H}\varphi_X} \mathscr{H}\mathscr{F}(X)$ sia esatta.

Tenuto conto del corollario precedente, ora sarà sufficiente provare che δ_X è naturale in X, la qual cosa risulterà molto semplice anche se un poco laboriosa.

5. - Cicli e bordi.

Nel presente paragrafo si definiscono i cicli e i bordi. Sotto l'ipotesi che esistano i gruppi dei cicli e dei bordi, si troverà una « costruzione » di H e di δ, facendo riferimento alle categorie $Ab_{\mathscr{K}}$ e $Comp_{\mathscr{K}}$.

Definizione. Siano $\mathscr{A}' = \langle A', \Phi \rangle$, $\mathscr{A} = \langle A, \Psi \rangle$, $\mathscr{A}'' = \langle A'', \chi \rangle$ $\mathscr{K}$-complessi [$\mathscr{K}$-gruppi abeliani], $F = \langle f, \Phi, \Psi \rangle$, $G = \langle g, \Psi, \chi \rangle$ omomorfismi. Si dice che la *successione* $\mathscr{A}' \xrightarrow{F} \mathscr{A} \xrightarrow{G} \mathscr{A}''$ *è esatta* quando

(i) $gf = 0$ (5),

(ii) per ogni $X \in |\mathscr{K}|$, per ogni $r: X \to A$, se $gr = 0$ esiste un morfismo $t: X \to A'$ tale che $ft = r$.

(5) Se $\mathscr{A} = \langle A, \Phi \rangle$ è un gruppo abeliano [complesso], $1 \to A$ indicherà sistematicamente l'operazione zero-aria di $\mathscr{A}$ (cfr. [3]). Indicheremo con 0 ogni morfismo che si scompone attraverso $1 \to A$.

Osservazione. Se F è un omomorfismo iniettivo, la successione $\mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{A}''$ è esatta se e solo se è un pullback in $\mathcal{K}$ il seguente diagramma

(7)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "g"'] & A'' \end{tikzcd}$$

Teorema 4. *La successione di $\mathcal{K}$-complessi [$\mathcal{K}$-gruppi abeliani] $\mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{A}''$ è esatta se e solo se la successione di complessi in $\mathcal{K}$ $\mathcal{F}_{\mathcal{A}'} \xrightarrow{\mathcal{F}_F} \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathcal{F}_G} \mathcal{F}_{\mathcal{A}''}$ [gruppi abeliani in $\mathcal{K}$ $\mathcal{G}_{\mathcal{A}'} \xrightarrow{\mathcal{G}_F} \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathcal{G}_G} \mathcal{G}_{\mathcal{A}''}$] è esatta.*

Dimostrazione. Ovvia.

Dato un $\mathcal{K}$-complesso $\mathcal{A} = \langle A, \Phi, d_A \rangle$, indicheremo con $b_A \colon B(A) \to A$ la immagine forte [6] di d_A. Sarà commutativo il diagramma

(8)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d_A"] \arrow[dr, "\varphi_A"'] & & A \\ & B(A) \arrow[ur, "b_A"'] & \end{tikzcd}$$

Indicheremo con $z_A \colon Z(A) \to A$ il nucleo [7] di d_A. Sarà un pullback il diagramma

[6] Dato un morfismo $f \colon A \to B$, si dice che esso ammette immagine forte se esistono un oggetto C, un monomorfismo $w \colon C \to B$ e una ritrazione $\varphi \colon A \to C$ tali che $f = w\varphi$. Due tali scomposizioni danno luogo allo stesso sottoggetto di B; esso verrà detto l'immagine forte di f.

[7] Dato un morfismo $f \colon A \to B$, si dice che esso ammette nucleo se esistono un oggetto C e un morfismo $g \colon C \to A$ tale che sia un pullback il diagramma

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 1 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Ne segue immediatamente che un tale g è un monomorfismo; il sottoggetto di A individuato in modo unico da g verrà detto il nucleo di f.

(9)
$$\begin{tikzcd} Z(A) \arrow[r] \arrow[d, "z_A"'] & 1 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "d_A"'] & A \end{tikzcd}$$

È noto che (cfr. [**3**]) a $B(A)$ e $Z(A)$ si può dare in modo naturale una struttura di $\mathscr{K}$-gruppo abeliano; poniamo dunque $B(\mathscr{A}) = \langle B(A), B(\Phi)\rangle$ e $Z(\mathscr{A}) = \langle Z(A), Z(\Phi)\rangle$; li chiameremo rispettivamente il *gruppo dei bordi* e il *gruppo dei cicli* di $\mathscr{A}$. Si può inoltre dimostrare che tra $B(\mathscr{A})$ e $Z(\mathscr{A})$ esiste un omomorfismo iniettivo $I_A = \langle i_A, B(\Phi), Z(\Phi)\rangle$ tale che sia commutativo il diagramma

(10)
$$\begin{tikzcd} B(A) \arrow[rr, "i_A"] \arrow[dr, "b_A"'] & & Z(A) \arrow[dl, "z_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

giacchè (9) è pullback e $d_A b_A = 0$.

Teorema 5. *Sia $\mathscr{A} = \langle A, \Phi, d_A\rangle$ un $\mathscr{K}$-complesso. Esistano il gruppo dei bordi e il gruppo dei cicli di $\mathscr{A}$. Supponiamo che esista il «quoziente» di $Z(\mathscr{A})$ rispetto a $B(\mathscr{A})$, cioè esistano un $\mathscr{K}$-gruppo abeliano $K(\mathscr{A}) = \langle K(A), \Psi\rangle$ e un omomorfismo suriettivo $K_A = \langle k_A, Z(\Phi), \Psi\rangle$ tra $Z(\mathscr{A})$ e $K(\mathscr{A})$ tale che la successione $B(\mathscr{A}) \overset{I_A}{\rightarrowtail} Z(\mathscr{A}) \overset{K_A}{\twoheadrightarrow} K(\mathscr{A})$ sia esatta; allora esiste un isomorfismo naturale $\theta^{\mathscr{A}}\colon \mathscr{G}_{K(\mathscr{A})} \to H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}})$.*

Dimostrazione. Sia X un oggetto di $\mathscr{K}$. Sia $f \in \mathscr{G}_{K(\mathscr{A})}(X)$ scelto arbitrariamente, $f\colon X \to K(A)$. Detto $\bar{k}_A$ un inverso destro di k_A, $z_A \bar{k}_A f$ è un ciclo del complesso concreto $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}(X)$. Si definisce allora $\theta^{\mathscr{A}}_X\colon [X, K(A)] \to \mathscr{D}\mathscr{H}([X, A])$ come segue:

(11)
$$\theta^{\mathscr{A}}_X(f) = [z_A \bar{k}_A f].$$

È immediato verificare che $\theta^{\mathscr{A}}_X$ è un omomorfismo naturale in X. Inoltre il nucleo di $\theta^{\mathscr{A}}_X$ è costituito dal solo zero di $\mathscr{G}_{K(\mathscr{A})}(X)$. Infatti, se g è un elemento di $\mathscr{G}_{K(\mathscr{A})}(X)$ tale che $0 = \theta_X^{\mathscr{A}}(g) = [z_A \bar{k}_A g]$, allora $z_A \bar{k}_A g$ è un bordo del complesso concreto $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}(X)$. Esisterà dunque un elemento v di $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}(X)$ tale che $z_A \bar{k}_A g = \mathscr{F}_{d_A}(X)(v)$. Da (8) e (10) segue che $z_A \bar{k}_A g = d_A v = b_A \varphi_A v = z_A i_A \varphi_A v$. Quindi $\bar{k}_A g = i_A \varphi_A v$. E da ciò si deduce che $g = k_A i_A \varphi_A v = 0$. Dunque $\theta_X^{\mathscr{A}}$ è iniettiva.

Sia $s \in H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}})(X)$ scelto arbitrariamente. Sarà $\mathscr{F}_{d_A}(X)(s) = 0$ e quindi da (9) segue che esiste uno ed un solo morfismo $t\colon X \to Z(A)$ tale che $z_A t = s$. Posto $f = k_A t$, con semplici calcoli si prova che $\theta_X^{\mathscr{A}}(f) = [s]$. Dunque $\theta_X^{\mathscr{A}}$ è suriettiva ([8]).

Il Teorema 5 mostra che si può costruire $H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}})$ lavorando in $Ab_{\mathscr{K}}$ e $Comp_{\mathscr{K}}$, qualora esistano i gruppi dei cicli e dei bordi di $\mathscr{A}$ e il quoziente. Analogamente il teorema che segue mostrerà come l'omomorfismo di connessione δ del teorema della successione esatta si può costruire operando in $Ab_{\mathscr{K}}$.

Premettiamo alcune costruzioni. Siano $\mathscr{A}' = \langle A', \Phi, d_{A'} \rangle$, $\mathscr{A} = \langle A, \Psi, d_A \rangle$ e $\mathscr{A}'' = \langle A'', \chi, d_{A''} \rangle$ $\mathscr{K}$-complessi; $F = \langle f, \Phi, \Psi \rangle$ omomorfismo iniettivo e $G = \langle g, \Psi, \chi \rangle$ omomorfismo suriettivo.

Supponiamo che la successione $\mathscr{A}' \xrightarrow{F} \mathscr{A} \xrightarrow{G} \mathscr{A}''$ sia esatta e che esistano i $\mathscr{K}$-gruppi abeliani $K(\mathscr{A}')$, $K(\mathscr{A})$, $K(\mathscr{A}'')$.

Detto $\bar{g}$ un inverso destro di g, si consideri il morfismo $d_A \bar{g} z_{A''}\colon Z(A'') \to A$. Si osserva che $g d_A \bar{g} z_{A''} = 0$. Quindi, poichè (7) è un pullback, esisterà uno ed un solo morfismo $x\colon Z(A'') \to A'$ tale che

$$fx = d_A \bar{g} z_{A''} \,. \tag{12}$$

Ricordando che $Z(A')$ è il nucleo di $d_{A'}$, si dimostra che x si scompone in modo unico attraverso $z_{A'}$, ossia che esiste uno ed un solo morfismo $y\colon Z(A'') \to Z(A')$ tale che

$$z_{A'} y = x \,. \tag{13}$$

Si ponga

$$\delta_0 = k_{A'} y \bar{k}_{A''} \tag{14}$$

dove $k_{A'}\colon Z(A') \to K(A')$ e $k_{A''}\colon Z(A'') \to K(A'')$ sono i morfismi canonici e $\bar{k}_{A''}$ è un inverso destro di $k_{A''}$. Con semplici calcoli si prova che $\delta_0\colon K(\mathscr{A}'') \to K(\mathscr{A}')$ è un omomorfismo di $\mathscr{K}$-complessi.

([8]) Si verifica facilmente che, in presenza dei cicli e dei bordi, quello indicato nel Teorema 5 è l'unico modo di costruire $H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}})$. Più precisamente, se esistono $Z(\mathscr{A})$, $B(\mathscr{A})$ e $H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}})$, allora esiste il quoziente $K(\mathscr{A})$.

Teorema 6. *Siano* $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}''$ $\mathscr{K}$*-complessi*; $F\colon \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ *omomorfismo iniettivo e* $G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}''$ *omomorfismo suriettivo. Supponiamo che la successione* $\mathscr{A}' \xrightarrow{F} \mathscr{A} \xrightarrow{G} \mathscr{A}''$ *sia esatta e che esistano i* $\mathscr{K}$*-gruppi abeliani* $K(\mathscr{A}')$, $K(\mathscr{A})$, $K(\mathscr{A}'')$. *Sia infine* δ_0 *definito dalla* (14). *Allora l'omomorfismo di connessione* $\delta\colon H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}''}) \to H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}'})$ *è isomorfo a* $\mathscr{G}_{\delta_0}$, *ossia è commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}_{K(\mathscr{A}'')} \arrow[r, "\mathscr{G}_{\delta_0}"] \arrow[d, "\theta^{\mathscr{A}''}"'] & \mathscr{G}_{K(\mathscr{A}')} \arrow[d, "\theta^{\mathscr{A}'}"] \\
H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}''}) \arrow[r, "\delta"'] & H(\mathscr{F}_{\mathscr{A}'})
\end{tikzcd}$$

dove $\theta^{\mathscr{A}''}$ *e* $\theta^{\mathscr{A}'}$ *sono le trasformazioni naturali definite da* (11).

Dimostrazione. Sarà sufficiente provare che per ogni X

$$\theta_X^{\mathscr{A}'} \cdot [X, \delta_0] = \delta_X \cdot \theta_X^{\mathscr{A}''} .$$

Sia $a \in [X, K(A'')]$ scelto arbitrariamente. Dalla (12) e dalla (13) si ha allora

$$\begin{aligned}
\theta_X^{\mathscr{A}'} \cdot [X, \delta_0](a) &= [z_{A'} \bar{k}_{A'} \delta_0 a] = [z_{A'} \bar{k}_{A'} k_{A'} y \bar{k}_{A''} a] , \\
\delta_X \cdot \theta_X^{\mathscr{A}''}(a) &= \delta_X([z_{A''} \bar{k}_{A''} a]) = [x \bar{k}_{A''} a] = [z_{A'} y \bar{k}_{A''} a] .
\end{aligned}$$

Si osserva che i rappresentanti delle due classi di $\mathscr{H}([X, A'])$ ottenute differiscono per un bordo di $[X, A']$. Infatti, posto $r = \bar{k}_{A'} k_{A'} y \bar{k}_{A''} a - y \bar{k}_{A''} a$, ovviamente è $k_{A'} r = 0$; esiste perciò un morfismo $s\colon X \to B(A')$ tale che $i_{A'} s = r$. Ne segue che $z_{A'} r = d_{A'} \bar{\varphi}_{A'} s$, quindi $z_{A'} \bar{k}_{A'} k_{A'} y \bar{k}_{A''} a - z_{A'} y \bar{k}_{A''} a$ è un bordo di $[X, A']$, da cui l'asserto.

Bibliografia.

[1] B. Pareigis, *Categories and functors*, Academic Press, New York 1970.

[2] M. Servi, *Questioni di Algebra Universale in una categoria astratta - I.*, Ann. Univ. Ferrara, **13**, 9 (1969), 93-116.

[3] M. Servi, *Questioni di Algebra Universale in una categoria astratta - II.*, Ann. Univ. Ferrara, **15**, 4 (1970), 57-92.

* * *