Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 189-200

GIANFRANCO PANELLA (*)

Le immagini epimorfe di un M-piano archimedeo. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Introduzione.

Un piano proiettivo ordinato π è un M-piano rispetto al suo punto u e alla sua retta U, con $u \notin U$, o, se si vuole, è (u, U)-M-piano (in breve: è M-piano), se, detti p un suo punto e P una sua retta, π risulta:

1) (p, P) transitivo, con $p \in P$, quando e solo quando $p \in U$ e $P = p \cup u$,
2) (p, P)-semitransitivo quando $p \notin P$, $p \in U$ e $u \in P$.

J. ANDRÉ ([1]; [2]) e J. C. D. S. YAQUB [9] hanno stabilito che se si fissa l'M-riferimento (o, u, v, e) dell'(u, U)-M-piano π (1), il sistema cartesiano ordinato $C(+, \circ; <)$ delle coordinate di π in quel riferimento si desume da un corpo ordinato $K = K(+, \cdot; <)$ e da un suo elemento positivo e diverso da uno, k, ponendo $K(+; <) = C(+; <)$ in quanto gruppi additivi ordinati, $x \circ y = xky$ se $x, y < 0$ e $x \circ y = xy$ altrimenti $(x, y \in C)$ (2). F. BARTOLOZZI ha, implicitamente, stabilito ([4]; dimostrazione del Teorema 2.1 e Lemma 2.2) che il corpo K è indipendente, in quanto corpo ordinato, dall'M-riferimento che si considera, precisando che ogni M-sistema che fornisce coordinate a π (in un suo M-riferimento) è ordinatamente isomorfo all'uno o all'altro degli M-sistemi che si desumono, secondo quanto già specificato, da un unico (3)

(*) Indirizzo: Via Battistello Caracciolo 57, 80136 Napoli, Italia.
(**) Ricevuto: 2-VII-1973.
(1) M-riferimento significa $o, v \in U$.
(2) Nel seguito, diremo un tale sistema cartesiano ordinato un M-sistema e, per ricordare la maniera in cui si ottiene, scriveremo $K_k = K_k(+, \circ; <)$ in luogo di $C(+, \circ; <)$.
(3) A meno di isomorfismi che conservano l'ordinamento.

corpo ordinato K e da un unico suo elemento positivo e diverso da uno, k, oppure dal suo elemento k^{-1}. Ne deriva che ad un M-piano è associato un unico corpo ordinato K e che ha senso definire M-piano archimedeo un M-piano per il quale il corpo ordinato K sia archimedeo.

J. ANDRÉ ([**3**]; Teorema 5.1) ha classificato i piani proiettivi che sono immagini epimorfe di un (u, U)-M-piano archimedeo π in un M-epimorfismo, ossia in un epimorfismo nel quale l'immagine del punto u non appartenga all'immagine della retta U; più precisamente, ha provato che tali piani sono (π e) tutti e soli i piani proiettivi ai quali forniscono coordinate i campi residui di posti (propri) $\varphi: K \to K' \cup \{\infty\}$ del campo ordinato archimedeo K definito da π, ove si pretenda che $\varphi(k) = 1$.

Nasce, così, il problema, posto implicitamente da J. ANDRÉ ([**3**]; inizio del § 5), di classificare le immagini epimorfe di un M-piano archimedeo in epimorfismi che non siano M-epimorfismi.

In questo lavoro risolviamo tale problema, dimostrando che ogni piano proiettivo che sia immagine di un M-piano archimedeo in un epimorfismo è anche immagine di quel piano in un M-epimorfismo; talchè, le immagini epimorfe di un M-piano archimedo π sono tutti e soli i piani proiettivi classificati da J. ANDRÉ in quanto immagini M-epimorfe di π. A conclusione del lavoro, per completezza, forniamo un esempio di epimorfismo di un M-piano archimedeo che non è un M-epimorfismo del piano.

2. - I posti di una classe di sistemi cartesiani.

Per evitare ripetizioni, conveniamo di adottare il linguaggio e il simbolismo precisati da F. BARTOLOZZI al n. 0 di [4], rinviando a G. PICKERT [**5**] per ulteriori informazioni. Iniziamo, quindi, ponendo la

Definizione 1. *Siano* $C(+, \circ)$, $C'(+, \circ)$ *sistemi cartesiani* (4). *Un posto (proprio) di* $C(+, \circ)$, *con sistema cartesiano residuo* $C'(+, \circ)$, *è un'applicazione suriettiva* $\varphi: C \to C' \cup \{\infty\}$ *che verifica le condizioni seguenti (nelle quali* $a, b, x, y \in C$):

(P₁) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$;

(P₂) se $\varphi(a), \varphi(b) \neq \infty$ è $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ e $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$;

---

(4) Nel seguito, avremo a che fare, contemporaneamente, con più sistemi cartesiani; indicheremo sempre con $x \circ y$ il prodotto dei loro elementi, tenuto conto che l'identità di scrittura non potrà provocare equivoci. Riserveremo la scrittura xy al caso in cui il sistema cartesiano che si considera è, per ipotesi, un corpo.

(P$_3$) se $\varphi(a) \neq \infty$, $\varphi(b) = \infty$ è $\varphi(a + b) = \varphi(b + a) = \infty$;

(P$_4$) se $\varphi(a) \neq 0$, $\varphi(b) = \infty$ è $\varphi(a \circ b) = \varphi(b \circ a) = \infty$;

(P$_5$) se $\varphi(x) = \infty$, $\varphi(-a \circ x + b \circ x) \neq \infty$ è $\varphi(a) = \varphi(b)$;

(P$_6$) se $\varphi(a) = \infty$, $\varphi(a \circ x - a \circ y) \neq \infty$ è $\varphi(x) = \varphi(y)$;

(P$_7$) se $b \circ x + a \circ y = a \circ x$, $\varphi(a) = \varphi(x) = \varphi(b \circ x) = \varphi(a \circ y) = \infty$ deve risultare $\varphi(b) = \infty$ oppure $\varphi(y) = \infty$.

La definizione precedente deriva dalla teoria dei posti degli anelli ternari fondata da L. A. SKORNJAKOV [8] e rielaborata da J. ANDRÉ [3]; anche un isomorfismo $\varphi \colon C \to C'$ si può considerare come posto (banale).

Da notare che se C è un corpo, un suo posto (proprio) è caratterizzato dalle condizioni (P$_1$), ..., (P$_4$); inoltre, nell'ipotesi precisata, il sistema cartesiano C', residuo di C rispetto al posto (proprio), risulta un corpo (cfr. J. ANDRÉ [3]).

Premesso ciò, siano $K = K(+, \cdot\,; <)$ un corpo ordinato, $-P$ l'insieme dei suoi elementi negativi, $d \in -P$, $k \in K$ con $0 < k$ e $k \neq 1$. Con tali dati, è individuato, intanto, l'M-sistema $K_k = K_k(+, \circ\,; <)$ desunto dal corpo ordinato K e dal suo elemento k, secondo quanto precisato nell'introduzione. In più, con i medesimi dati, si consideri la funzione $f \colon -P \to -P$ definita ponendo $f(x) = x$ se $x \in -P$ e $d \leqslant x$, $f(x) = (x - d)k + d = xk + d(1 - k)$ se $x \in -P$ e $x < d$. Sia, inoltre, $K_{k,d} = K_{k,d}(+, \circ\,; <)$ la struttura algebrica il cui gruppo additivo sostegno coincide con il gruppo additivo sostegno $K(+\,; <)$ del corpo ordinato K (in quanto gruppo ordinato) e la cui moltiplicazione è così definita (se $x, y \in K_{k,d}$):

$$x \circ y = f(x) y \text{ se } x, y < 0\,,$$

$$x \circ y = xy \text{ negli altri casi}\,.$$

Per precisare la natura di tale struttura algebrica, stabiliamo il seguente

Lemma 1. *La struttura algebrica $K_{k,d} = K_{k,d}(+, \circ\,; <)$ è un sistema cartesiano ordinato.*

Dimostrazione. È sufficiente controllare che la funzione f è *funzione di rifrazione* del corpo ordinato K (nel senso di L. PROFERA [6], Definizione 3) e applicare il Teorema 2 di [6].

Lemma 2. *Siano $\varphi \colon K_{k,d} \to C' \cup \{\infty\}$ un posto (proprio) del sistema cartesiano ordinato $K_{k,d} = K_{k,d}(+, \circ\,; <)$ e $x' \in C'$. Se il corpo K è archimedeo, esiste $x \in K_{k,d}$ tale che $x < d$ e $\varphi(x) = x'$.*

Dimostrazione. Si consideri un elemento y di $K_{k,d}$, non nullo, per il quale risulti $\varphi(y) = 0 = \varphi(-y)$ (5). Sia, inoltre, $z \in K_{k,d}$ per cui $\varphi(z) = x'$. Il gruppo additivo ordinato sostegno del corpo ordinato K è archimedeo, quindi esiste un intero n tale che $x = z + ny < d$ (6) e risulta $\varphi(x) = \varphi(z) = x'$.

Lemma 3. *Sia $\varphi: K_{k,d} \to C' \cup \{\infty\}$ un posto (proprio) del sistema cartesiano ordinato $K_{k,d} = K_{k,d}(+, \circ; <)$ per il quale si abbia $\varphi(d) = \infty$. Se il corpo K è archimedeo, risulta $\varphi[d(1-k)] = 0$ e $\varphi(k) = 1$.*

Dimostrazione. Proviamo, anzitutto, che $\varphi(k) \neq \infty$. Supposto $\varphi(k) = \infty$, $k \circ k^{-1} = 1$ (7) comporta $0 = \varphi(k^{-1}) = \varphi(-k^{-1})$; sia $x \in K_{k,d}$ tale che $x < d$ e $\varphi(x) \in C'$ (un tale x esiste in virtù del Lemma 2). Risulta

$$0 = \varphi[x \circ (-k^{-1})] = \varphi[-x + d(1-k^{-1})]\,,$$

quindi $\infty \neq \varphi[d(1-k^{-1})] = \varphi[(-d) \circ (k^{-1}-1)]$ che ha come conseguenza, poichè $\varphi(d) = \infty$, $\varphi(k^{-1}-1) = 0$ che contraddice $\varphi(k^{-1}) = 0$; in conclusione, è $\varphi(k) \neq \infty$. Se si considera $x \in K_{k,d}$ con $x < d$ e $\varphi(x) = 0$ (x esiste, al solito, per il Lemma 2) si ha

$$0 = \varphi[x \circ (-1)] = \varphi[-xk + d(k-1)]\,.$$

Da qui, essendo $\varphi(-xk) = -\varphi(x \circ k) = -[\varphi(x) \circ \varphi(k)] = 0$ si deduce, intanto, $\varphi[d(1-k)] = 0$. Inoltre, $0 = \varphi[d(1-k)] = \varphi[(-d) \circ (k-1)]$ comporta, poichè $\varphi(d) = \infty$, $\varphi(k-1) = 0$, ossia $\varphi(k) = 1$.

Teorema 1. *Siano $K = K(+, \cdot; <)$ un corpo ordinato archimedeo, $k, d \in K$ con $d < 0$, $k \neq 1$ e positivo. Si considerino il sistema cartesiano ordinato $K_{k,d} = K_{k,d}(+, \circ; <)$ e l'M-sistema $K_k = K_k(+, \circ; <)$ desunto dal corpo K e dal suo elemento k. Con tali dati, le seguenti affermazioni*

(a) *$\varphi: K_{k,d} \to C' \cup \{\infty\}$ è posto (proprio) del sistema cartesiano $K_{k,d}$ e risulta $\varphi(d) = \infty$,*

(b) *$\varphi: K \to C' \cup \{\infty\}$ è posto (proprio) del corpo K e risulta $\varphi(d) = \infty$ e $\varphi[d(1-k)] = 0$,*

---

(5) Un tale y esiste: infatti, se $x \in K_{k,d}$ per cui $\varphi(x) = \infty$, sia y l'elemento di $K_{k,d}$ definito dall'uguaglianza $x \circ y = 1$. È $y \neq 0$ e $\varphi(x \circ y) = 1$ comporta, per (P_4), $\varphi(y) = 0$.

(6) n non è necessariamente positivo; ny ha il consueto significato in $K(+)$.

(7) Ora e nel seguito, se x è elemento di un sistema cartesiano sul cui insieme sostegno sia definita anche una struttura di corpo, indicheremo con x^{-1} l'inverso di x nel corpo.

(c) $\varphi: K_k \to C' \cup \{\infty\}$ *è posto (proprio) dell'M-sistema* K_k *e risulta* $\varphi(d) = \infty$ *e* $\varphi[(-d)\circ(k-1)] = 0$,

sono equivalenti.

Dimostrazione. Stabiliremo l'equivalenza di (a) con (b) e di (b) con (c).

(a) *implica* (b). Per il Lemma 3, $\varphi(k) = 1$ e $\varphi[d(1-k)] = 0$. Dobbiamo, ancora, provare che l'applicazione $\varphi: K \to C' \cup \{\infty\}$ è un posto del corpo K, ossia che verifica le condizioni $(P_1), \dots, (P_4)$ della Definizione 1. Poichè

$$K_{k,d}(+\,;<) = K(+\,;<)$$

in quanto gruppi additivi ordinati e si ha $a\circ b = ab$ se $a, b \in K = K_{k,d}$ e se non risulta contemporaneamente $a < d$ e $b < 0$, per ottenere quanto dovuto sono sufficienti le verifiche che seguono.

Siano $a, b \in K$ con $a < d$ e $b < 0$: è $\varphi(ab) = \varphi(a)\circ\varphi(b)$ se $\varphi(a)$, $\varphi(b) \neq \infty$. Infatti,

$$\varphi(ab) = \varphi[a\circ(k^{-1}b) + (d - dk)\circ(-k^{-1}b)]\,,$$

$$\varphi(-k^{-1}b) = \varphi[k^{-1}\circ(-b)] = \varphi(k^{-1})\circ\varphi(-b) = \varphi(-b) = -\varphi(b) \neq \infty$$

e, in conseguenza,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\circ\varphi(k^{-1}b) + \varphi[d(1-k)]\circ\varphi(-k^{-1}b) = \varphi(a)\circ\varphi(b)\,.$$

Siano $a, b \in K$ con $a < d$ e $b < 0$: è $\varphi(ab) = \infty$ se $\varphi(a) \neq 0$ e $\varphi(b) = \infty$. Infatti, se fosse $\varphi(ab) \neq \infty$ si avrebbe

$$\varphi(ab) = -\varphi(-ab) = -\varphi[a(-b)] = -\varphi[a\circ(-b)] \neq \infty\,,$$

quindi $\varphi[a\circ(-b)] \neq \infty$ con $\varphi(a) \neq 0$ e $\varphi(-b) = \infty$ poichè $\varphi(b) = \infty$. Analogamente, si prova che se $a, b \in K$ con $a < 0$ e $b < d$ risulta $\varphi(ba) = \infty$ se $\varphi(a) \neq 0$ e $\varphi(b) = \infty$ (8).

---

(8) Il corpo K, ordinato e archimedeo, è commutativo; pertanto, questa ultima verifica è inessenziale. Ma qui e nel seguito eviteremo, quando sarà possibile, di sfruttare la commutatività di K, poichè il problema che risolviamo in questo lavoro si pone, più in generale, per gli M-piani non archimedei. Le immagini epimorfe, in un M-epimorfismo, di un qualunque M-piano sono state classificate da F. Bartolozzi [4].

(b) *implica* (a). Essendo $\varphi(d)=\infty$ e $\varphi[d(1-k)]=0$ risulta $\varphi(k)=1$. Dobbiamo stabilire che l'applicazione $\varphi\colon K_{k,d}\to C'\cup\{\infty\}$ è un posto del sistema cartesiano $K_{k,d}=K_{k,d}(+,\circ;<)$, ossia che verifica le condizioni $(\mathrm{P}_1),\ldots,(\mathrm{P}_7)$ della Definizione 1. Per quanto già osservato nel corso della presente dimostrazione, possiamo limitarci a effettuare la verifica dovuta solamente per quelle tra le $(\mathrm{P}_1),\ldots,(\mathrm{P}_7)$ che si riferiscono a prodotti $x\circ y$ di elementi di $K_{k,d}$ con $x<d$ e $y<0$.

Se $a,b\in K_{k,d}$ con $a<d$ e $b<0$ risulta

$$\varphi(a\circ b)=\varphi\big[\big(ak+d(1-k)\big)b\big]=\varphi(a)\circ\varphi(b)$$

se $\varphi(a),\varphi(b)\neq\infty$ poichè, in tal caso, $\varphi[ak+d(1-k)]=\varphi(a)$ ove si tenga conto che $\varphi(k)=1$ e $\varphi[d(1-k)]=0$; inoltre, $\varphi(a\circ b)=\varphi\big[\big(ak+d(1-k)\big)b\big]\neq\infty$ è affermazione falsa se $\varphi(a)\neq 0$ e $\varphi(b)=\infty$: infatti, da quella affermazione e da $\varphi(b)=\infty$ deve seguire $0=\varphi[ak+d(1-k)]=\varphi(a)$. Analogamente, si prova che, se $\varphi(a)=\infty$ e $\varphi(b)\neq 0$, deve essere $\varphi(a\circ b)=\infty$. Pertanto, sono valide le condizioni $(\mathrm{P}_1),\ldots,(\mathrm{P}_4)$.

Verifichiamo (P_5) (9): se $a,b,x\in K_{k,d}$ risulta $\varphi(a)=\varphi(b)$ nelle ipotesi $\varphi(-a\circ x+b\circ x)\neq\infty$ e $\varphi(x)=\infty$. Dobbiamo discutere i casi in cui $x<0$ e non si abbia $0\leqslant a,b$. Supposto $a<d$, $x<0$, $d\leqslant b$ (le altre possibilità si discutono analogamente) si trova

$$\infty\neq\varphi(-a\circ x+b\circ x)=\varphi\big[\big(-ak-d(1-k)+b\big)x\big]\qquad\text{e}\qquad\varphi(x)=\infty\,;$$

ne deriva $\varphi[(b-ak)-d(1-k)]=0$ che, poichè $\varphi[d(1-k)]=0$, permette di asserire $\varphi(b-ak)=0$. Se $\varphi(b)=\infty$ deve essere $\varphi(-ak)=\infty$, ossia $\varphi(a)=\infty$ poichè $\varphi(k)=1$, e, allora, risulta $\varphi(a)=\varphi(b)$. Se, invece, $\varphi(b)\neq\infty$ deve essere $\infty\neq\varphi(b)=\varphi(ak)=\varphi(a)$, sempre perchè $\varphi(k)=1$.

Concludiamo, verificando (P_7): se $a,b,x,y\in K_{k,d}$ per i quali risulta $b\circ x+{}$ $+a\circ y=a\circ x$ con $\varphi(b)\neq\infty$ e $\varphi(a)=\varphi(x)=\varphi(b\circ x)=\varphi(a\circ y)=\infty$, deve essere $\varphi(y)=\infty$. Essendo $\varphi(a)=\varphi(x)=\infty$ è $a,x\neq 0$ e $\varphi(a^{-1})=\varphi(x^{-1})=0$. L'uguaglianza $b\circ x+a\circ y=a\circ x$, scritta usufruendo della moltiplicazione del corpo K, moltiplicata a sinistra per a^{-1} e a destra per x^{-1}, fornisce

$$\text{(I)}\qquad a^{-1}bk_1+a^{-1}d(1-k_1)+k_2yx^{-1}+a^{-1}d(1-k_2)yx^{-1}=k_3+a^{-1}d(1-k_3)$$

ove k_i $(i=1,2,3)$ è uguale ad 1 oppure a k, in dipendenza degli elementi a,b,x,y di $K_{k,d}$. Ne deriva, $\varphi(k_i)=1$ e $\varphi[d(1-k_i)]=0$ $(i=1,2,3)$; se fosse $\varphi(b),\varphi(y)\neq\infty$ i sei addendi della (I) avrebbero, nella φ, immagine in C', anzi

(9) La condizione (P_6) si verifica analogamente.

ciascuno di essi, ad eccezione di k_3, avrebbe come immagine nella φ lo zero di C' mentre risulterebbe $\varphi(k_3) = 1 : \varphi(b), \varphi(y) \neq \infty$ avrebbe come conseguenza, pertanto, la coincidenza dello zero e dell'identità del sistema cartesiano C'.

(b) *è equivalente a* (c). In riferimento al corpo $K(+, \cdot ; <)$ e all'M-sistema $K_k(+, \circ ; <)$ si osservi, anzitutto, che nell'ipotesi (b) risulta $\varphi(k) = 1$ poichè $\varphi(d) = \infty$ e $\varphi[d(1-k)] = 0$; inoltre, si ha $\varphi[(-d)\circ(k-1)] = \varphi[d(1-k)] = 0$. Viceversa, supposta valida la (c), si trova $\varphi[d(1-k)] = \varphi[(-d)\circ(k-1)] = 0$. Con tali premesse, l'equivalenza di (b) con (c) deriva dai risultati di J. ANDRÉ ([**3**]; Teorema 5.1).

3. - Gli epimorfismi di un M-piano archimedeo.

Conservando, in relazione al linguaggio e al simbolismo che adotteremo, la convenzione assunta all'inizio del n. **2**, ci limitiamo a ricordare quanto segue (rinviando a J. ANDRÉ [**3**], per le dimostrazioni):

(a) Se π è un piano proiettivo, un epimorfismo $f : \pi \to \pi'$ da π al piano proiettivo π' è definito da applicazioni suriettive f_1 (f_2) dai punti (dalle rette) di π ai punti (alle rette) di π' tali che: se p è un punto di π, P una sua retta e se risulta $p \in P$ deve essere $f_1(p) \in f_2(P)$. Per non appesantire il simbolismo, scriveremo f in luogo di f_1 e di f_2, senza timore di ambiguità. I riferimenti (o, u, v, e), risp. (o', u', v', e'), di π, risp. π', sono associati nello epimorfismo $f : \pi \to \pi'$ se $f(o) = o'$, $f(u) = u'$, $f(v) = v'$, $f(e) = e'$.

(b) Siano $f : \pi \to \pi'$ un epimorfismo di piani proiettivi, (o, u, v, e) un riferimento di π, e si supponga che $(o' = f(o),\ u' = f(u),\ v' = f(v),\ e' = f(e))$ risulti riferimento di π'. In tali condizioni, se π è piano $(v, u \cup v)$-transitivo, π' deve essere, intanto, $(v', u' \cup v')$-transitivo. Inoltre, l'epimorfismo f, per restrizione, definisce un'applicazione

$$\varphi : \{o \cup v\} - \{v\} \to \{o' \cup v'\}.$$

Tenuto conto che $\{o \cup v\} - \{v\}$, risp. $\{o' \cup v'\} - \{v'\}$, risultano sostegno dei sistemi cartesiani $C(+, \circ)$, risp. $C'(+, \circ)$, che forniscono coordinate a π, risp. π', nei riferimenti (o, u, v, e), risp. (o', u', v', e'), s'individua l'applicazione $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ che è posto (proprio) di $C(+, \circ)$ quando f non è un isomorfismo. Per il seguito, interessa ricordare che, se $t \in u \cup v$, se $f(t) = v'$, se $t \neq v$ e se $t = (d)$ ($d \in C$; ossia, d è la coordinata di t nel riferimento (o, u, v, e)) risulta $\varphi(d) = \infty$.

(c) Viceversa, se $C(+, \circ)$ e $C'(+, \circ)$ sono sistemi cartesiani, ogni posto (proprio) $\varphi\colon C \to C' \cup \{\infty\}$ definisce un epimorfismo (non isomorfismo) $f\colon \pi(C) \to \pi(C')$ dal piano proiettivo $\pi(C)$ costruito su C al piamo proiettivo $\pi(C')$ costruito su C' e, in f, i riferimenti $\big((o, o), (o), (\infty), (1, 1)\big)$ di $\pi(C)$ e $\big((o, o), (o), (\infty), (1, 1)\big)$ di $\pi(C')$ risultano associati. In più, se p è un punto di $\pi(C)$ non appartenente alla sua retta $(o) \cup (\infty)$, se $p = (x, y)$ con $x, y \in C$, se $\varphi(x), \varphi(y) \neq \infty$ risulta $f(p) = \big(\varphi(x), \varphi(y)\big)$; mentre se p appartiene alla retta $(o) \cup (\infty)$, se risulta $p = (d)$ con $d \in C$ e se $\varphi(d) = \infty$, si ha $f(p) = (\infty)$.

Per risolvere il problema della classificazione delle immagini epimorfe di un M-piano archimedeo, stabiliamo, innanzitutto, i seguenti Lemmi 4 e 5.

Lemma 4. *Siano π un M-piano ,(o, u, v, e) un suo M-riferimento, $C = C(+, \circ; <)$ l'M-sistema che fornisce coordinate a π in quel riferimento, $p \in u \cup v$ con $p = (m)$ e $0 < m < 1$ $(m \in C)$. In tali ipotesi, esistono un corpo ordinato $K = K(+, \cdot; <)$ e due suoi elementi k, d con $k \neq 1$, $o < k$, $d < o$, tali che:*

(I) *Il sistema cartesiano ordinato $F = F(+, \circ; <)$ che fornisce coordinate a π nel riferimento (o, p, v, e) è il sistema cartesiano ordinato $K_{k,d} = K_{k,d}(+, \circ; <)$ e in tali coordinate risulta $u = (d)$,*

(II) *l'M-sistema $C(+, \circ; <)$ è isomorfo all'M-sistema $K_k = K_k(+, \circ; <)$.*

Dimostrazione. Iniziamo provando l'affermazione (I). Se $w = (o \cup e) \cap (u \cup v)$, le coppie di punti v, w e p, u della retta $u \cup v$ non si separano nell'ordinamento del piano π, poichè $0 < m < 1$; ne deriva, per quanto stabilito da L. Profera [7] che $\pi_{u \cup v}$, piano affine ordinato desunto da π assumendo $u \cup v$ come retta impropria, è un M_1-piano rispetto alla terna (o, p, v) ([10]). Pertanto, $F(+, \circ; <)$ è M_1-sistema e, in conseguenza, si desume da un corpo ordinato $K = K(+, \cdot; <)$ e da una sua funzione di rifrazione f, ponendo $F(+; <) = K(+; <)$ come gruppi additivi ordinati, $x \circ y = f(x) y$ se $x, y < o$ e $x \circ y = xy$ altrimenti, quando $x, y \in K$ (cfr. [**6**]; Teoremi 1 e 3). L'ipotesi che π è M-piano rispetto alla sua terna di punti (o, u, v) comporta, (cfr. [**7**]), che $f(x) = x$ se $x \in K$ e $d \leqslant x < 0$, $f(x) = (x - d)k + d$ se $x \in K$ e $x < d$, con d, k opportuni elementi di K, $0 < k$, $k \neq 1$, $d < 0$; in più, si ha $u = (d)$ nel riferimento (o, p, v, e). Si sono, così, individuati il corpo $K(+, \cdot; <)$ e i suoi elementi k e d, provando l'affermazione (I).

Per provare la (II), siano (o, a) un punto di $o \cup v$ (con $a \in C$), scritto nelle coordinate che gli competono in relazione al riferimento (o, u, v, e), e $h(a)$ l'elemento di $K_{k,d}$ (che, in quanto insieme, è K) definito pretendendo

---

([10]) E all'insieme ϱ delle sue rette che hanno direzione appartenente al segmento della retta $u \cup v$ di π che contiene w e ha come estremi i punti v e p.

che $(o, h(a))$ rappresenti il medesimo punto nelle coordinate desunte dal riferimento (o, p, v, e): in tal modo è definita un'applicazione bigettiva $h: C \to K$. Tenuto conto che, per quanto già stabilito, risulta $u = (d)$ nel riferimento (o, p, v, e) e usufruendo delle operazioni grafiche che definiscono l'addizione e la moltiplicazione di $C(+, \circ; <)$ si prova che risulta, se $a, b \in C$,

$$h(a + b) = h(a) + h(b)\,,$$

$$h(a \circ b) = h(a)\,k(1 - d)^{-1}\,h(b) \qquad \text{se } h(a), h(b) < 0,$$

$h(a \circ b) = h(a)(1 - d)^{-1} h(b)$ altrimenti [11]. Se identifichiamo C con K, come insiemi, mediante la h, $C(+; <)$ si identifica, quindi, con $K(+; <)$ come gruppo ordinato [12] mentre risulta, se $a, b \in K = C$, $a \circ b = ak(1 - d)^{-1} b$ quando $a, b < o$, $a \circ b = a(1 - d)^{-1} b$ altrimenti. Sia $K' = K'(+, *; <)$ il corpo ordinato desunto dal corpo K pretendendo che $K'(+; <) = K(+; <)$ come gruppi ordinati e che risulti, se $a, b \in K' = K$, $a * b = a(1 - d)^{-1} b$, talchè $1 - d$ è l'identità del corpo K'. La trasformazione identica dell'insieme sostegno di K fa coincidere C con K' (come insiemi), fa coincidere $C(+; <)$ con $K'(+; <)$ come gruppi additivi ordinati, e risulta, se $a, b \in K' = C$ e se $k' = (1 - d) k \in K'$, $a \circ b = a * k' * b$ se $a, b < 0$, $a \circ b = a * b$ altrimenti: ossia, l'M-sistema $C(+, \circ; <)$ è isomorfo all'M-sistema che si desume dal corpo ordinato $K'(+, *; <)$ e dal suo elemento positivo k' (poichè $k' = (1 - d) k$ è $k' \neq 1 - d$). Dobbiamo provare, per stabilire (II), che gli M-sistemi $K_k(+, \circ; <)$ e $K'_{k'}(+, \circ; <)$ sono isomorfi; ma ciò accade, per quanto stabilito da F. BARTOLOZZI ([4]; Lemma 2.2) se e solo se esiste un isomorfismo $s: K \to K'$ dal corpo ordinato K al corpo ordinato K' che conserva l'ordinamento e trasforma l'elemento k nell'elemento k'. Un tale isomorfismo, tenuto conto che K e K' coincidono come gruppi additivi ordinati e che risulta $d < o$, si definisce ponendo $s(x) = (1 - d) x$ se $x \in K$.

---

[11] Si tenga presente che se $C(+, \circ; <)$ è l'M-sistema delle coordinate di π nel riferimento (o, u, v, e) e se $a, b \in o \cup v$ con $a, b \neq v$, i punti c, d di $o \cup v$ che, in quel riferimento, hanno come ordinata rispettivamente la somma e il prodotto delle ordinate del punto a e del punto b si ottengono con le seguenti costruzioni grafiche (ove si ponga $w = (o \cup e) \cap (u \cup v)$): se $t = (o \cup w) \cap (a \cup u)$, $s = (t \cup v) \cap (b \cup w)$ risulta $c = (s \cup u) \cap (o \cup v)$; se $m = (a \cup u) \cap (e \cup v)$, $q = (b \cup u) \cap (o \cup e)$, $r = (o \cup m) \cap (q \cup v)$ risulta $d = (r \cup u) \cap (o \cup v)$.

[12] Infatti, $(u \cup e) \cap (o \cup v)$, identità di $C(+, \circ; <)$, ha coordinate $(o, 1 - d)$ nel riferimento (o, p, v, e) e $d < 0$ in $K(+; <) = K_{k,d}(+; <)$; ne deriva, $o < a$ in $C(+; <)$ se e solo se $o < h(a)$ in $K(+; <)$.

Lemma 5. *Siano π un (u, U)-M-piano, $f: \pi \to \pi'$ un epimorfismo e risulti $f(u) \in f(U)$. Esistono due punti distinti, p e q, del piano π tali che:*

1) $u \in p \cup q$,
2) *se* $v = (p \cup q) \cap U$, *risulta* $f(v) \neq f(p) \neq f(q) \neq f(v)$,
3) *le coppie di punti di π u, v e p, q non si separano nell'ordinamento che compete al piano.*

Dimostrazione. Sia X una retta di π contenente u per la quale si abbia $f(X) = X' \neq f(U) = U'$ e siano p', q' punti di X' distinti tra loro e disinti da $u' = f(u) \in U'$. Per quanto provato da J. André ([**3**]; Teorema 3.2) esistono due punti p, q della retta X tali che $f(p) = p'$, $f(q) = q'$. Ne deriva che è $u \in p \cup q$ e che risulta, se $v = (p \cup q) \cap U$, $f(v) = u' \neq f(p) \neq f(q) \neq u'$. Se o', e' sono punti di π' con $o' \in U'$, $o' \neq u'$, ed $e' \in o' \cup p'$, $e' \neq o'$, p' siano o, e punti di π, con $o \in U$ ed $e \in o \cup p$, per i quali si abbia $f(o) = o'$, $f(e) = e'$. In tali condizioni è individuato un posto (proprio, poichè $f(u) \in f(U)$) $\varphi: C \to C' \cup \{\infty\}$, da $C(+, \circ; <)$, sistema cartesiano ordinato che fornisce le coordinate a π nel riferimento (o, q, v, e), a $C'(+, \circ)$, sistema cartesiano che fornisce le coordinate a π' nel riferimento (o', q', v', e') e il dato epimorfismo $f: \pi \to \pi'$ si descrive mediante il posto φ. Nelle coordinate desunte da $C(+, \circ; <)$ si ha $v = (\infty)$, $p = (1)$, $q = (0)$, $u = (m)$, con $m \in C(+, \circ; <)$ e $m \neq 0, 1$. Se $m < o$, i punti p, q verificano le condizioni 1), 2) e 3). Se, invece, $o < m$ si consideri $p_1 = (-1) \in p \cup q$; poichè $\varphi(-1) = -1$, risulta $f(v) \neq f(q) \neq f(p_1) \neq f(v)$ (quindi, $p_1 \neq u$), è $u \in p_1 \cup q$ e le coppie di punti u, v e p_1, q non si separano nell'ordinamento di π: pertanto, in tal caso, i punti p_1, q verificano la tesi del lemma.

Usufruendo dei precedenti lemmi, stabiliti per un qualunque M-piano (non necessariamente archimedeo), possiamo ottenere il seguente

Teorema 2. *Siano π un (u, U)-M-piano archimedeo, $f: \pi \to \pi'$ un epimorfismo dal piano proiettivo π al piano proiettivo π' e risulti $f(u) \in f(U)$. Esiste un epimorfismo $g: \pi \to \pi'$ per il quale si ha $g(u) \notin g(U)$.*

Dimostrazione. Si considerino due punti (distinti) di π, p e q, che, in relazione al dato epimorfismo f, verificano le condizioni 1), 2) e 3) del Lemma 5 e si ponga $f(p) = p'$, $f(q) = q'$, $f(v) = f(u) = u' = v'$ (avendo v il significato ad esso attribuito nel Lemma 5). Se $o' \in U' = f(U)$ ed $o' \neq v'$, sia $o \in U$ tale che $f(o) = o'$. Supposto che le coppie di punti v, p e q, u non si separano nell'ordinamento di π ([13]), sia e' un punto di π' tale che $e' \in o' \cup p'$, $e' \neq o'$, p';

([13]) Tale ipotesi non è restrittiva, a meno di uno scambio tra p e q. Infatti, se $|$ è la relazione di separazione tra coppie di punti della retta $u \cup v$ definita dall'ordinamento di π, la (3) del Lemma 5 assicura che la relazione $uv|pq$ è falsa; pertanto, deve essere falsa (esattamente) una delle relazioni $up|qv$, $uq|pv$.

si consideri un punto e della retta $o \cup p$ di π per cui si abbia $f(e) = e'$. Se $C(+, \circ; <)$ è l'M-sistema delle coordinate di π nel suo riferimento (o, u, v, e) risulta, in quel riferimento, $q = (m)$ con $m \in C(+, \circ; <)$ e $o < m < 1$. Per il Lemma 4, esistono un corpo ordinato $K = K(+, \cdot; <)$ e due suoi elementi k, d (con $o < k$, $k \neq 1$, $d < o$) tali che il sistema cartesiano ordinato delle coordinate di π nel riferimento (o, q, v, e) è $K_{k,d} = K_{k,d}(+, \circ; <)$, mentre lo M-sistema $C(+, \circ; <)$ è isomorfo all'M-sistema $K_k = K_k(+, \circ; <)$ desunto dal corpo ordinato K e dal suo elemento k. L'isomorfismo di C con K_k implica l'esistenza di un isomorfismo ordinato (cfr. F. Bartolozzi [4]; Lemma 2.2) da $C(+; <)$ a $K(+; <)$; pertanto, l'ipotesi che π è archimedeo comporta che il corpo ordinato K è archimedeo. In più, sempre per il Lemma 4, nel riferimento (o, q, v, e) risulta $u = (d)$. Se $C'(+, \circ)$ è il sistema cartesiano delle coordinate di π' nel riferimento (o', q', v', e'), l'epimorfismo $f: \pi \to \pi'$ si descrive mediante un posto (proprio) $\varphi: K_{k,d} \to C' \cup \{\infty\}$ e risulta $\varphi(d) = \infty$, poichè $f(u) = v'$. Essendo K corpo ordinato archimedeo, il Teorema 1 assicura che l'applicazione $\varphi: K_k \to C' \cup \{\infty\}$ è posto (proprio) dell'M-sistema K_k e, pertanto, definisce un epimorfismo $h: \pi'' \to \pi'$, se π'' è l'(u'', U'')-M-piano costruito sull'M-sistema K_k; in tale epimorfismo si ha $h(u'') \notin h(U'')$. Tenuto conto che gli M-sistemi C e K_k risultano isomorfi, è definita una collineazione dal piano π al piano π'' nella quale u ha immagine u'' mentre le immagini dei punti della retta U riempiono la retta U''. Tale collineazione, composta con l'epimorfismo h, definisce un epimorfismo $g: \pi \to \pi'$ nel quale risulta $g(u) \notin g(U)$.

Osservazione 1. Con il Teorema 2 si risolve, nel senso precisato nella introduzione, il problema affrontato in questo lavoro. Infatti, in virtù di tale teorema, possiamo affermare che ogni immagine epimorfa di un M-piano archimedeo π è anche immagine M-epimorfa di π; pertanto, tutti e soli i piani proiettivi che risultano immagini epimorfe di π sono quelli classificati da J. André ([3]; Teorema 5.1) in quanto immagini M-epimorfe di π. Si tenga conto che, per quanto provato da F. Bartolozzi ([4]; Lemma 2.3), le immagini M-epimorfe di un M-piano π si ottengono tutte (a meno di isomorfismi) come piani sui sistemi cartesiani residui di posti $\varphi: K_k \to C' \cup \{\infty\}$, essendo K_k l'M-sistema delle coordinate di π in un suo M-riferimento *fissato*.

Osservazione 2. Il seguente esempio garantisce l'esistenza di epimorfismi di un M-piano archimedeo π che non sono M-epimorfismi. Siano Q il campo razionale, s un numero reale positivo e trascendente (sopra Q), $K = Q(s)$ il campo estensione di Q mediante s, ordinato dall'ordinamento dei reali. Sia $\varphi: K \to Q \cup \{\infty\}$ il posto (proprio) di K definito pretendendo che φ risulti banale sul campo razionale e che si abbia $\varphi(s) = 0$. Risulta, quindi, $\varphi(s + 1) = 1$ e l'applicazione $\varphi: K_k \to Q \cup \{\infty\}$, dall'$M$-sistema desunto dal campo ordinato archimedeo K e dal suo elemento positivo $s+1=k\neq 1$, è, per quanto stabilito da J. ANDRÉ ([3]; Teorema 5.1), un posto (proprio) di K_k che, avendo il campo Q come sistema cartesiano residuo, individua un M-epimorfismo $f:\pi\to\pi(Q)$ dall'M-piano π definito da K_k al piano proiettivo $\pi(Q)$ lineare sul campo razionale; il piano π è M-piano rispetto a un suo punto u e a una sua retta U: risulta $f(u)\notin f(U)$. Sia $h:\pi(Q)\to\pi'$ un epimorfismo dal piano $\pi(Q)$ ad un opportuno piano finito π', nel quale si abbia $hf(u)\in hf(U)$; componendo f ed h si ottiene un epimorfismo $g:\pi\to\pi'$ che non è un M-epimorfismo, avendosi $g(u)\in g(U)$.

Bibliografia.

[1] J. ANDRÉ, *Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen*, Arch. Math. (Basel), **13** (1962), 290-301.

[2] J. ANDRÉ, *Bemerkung zu meiner Arbeit « Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen »*, Arch. Math. (Basel), **14** (1963), 359-360.

[3] J. ANDRÉ, *Über Homomorphismen projektiver Ebenen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **34** (1969), 98-114.

[4] F. BARTOLOZZI, *Le immagini M-epimorfe di un M-piano*, Ann. Mat. Pura Appl. (in corso di stampa).

[5] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, (1955).

[6] L. PROFERA, *I piani di rifrazione generalizzati*, Ricerche Mat. (in corso di stampa).

[7] L. PROFERA, *Sulle collineazioni dei piani di rifrazione generalizzati*, (in corso di redazione).

[8] L. A. SKORNJAKOV, *Omomorfismi di piani proiettivi e T-omomorfismi di corpi ternari*, Mat. Sbornik, **43** (1957), 285-294.

[9] J. C. D. S. YAQUB, *On projective planes of class III*, Arch. Math. (Basel), **12** (1961), 146-150.

* * *