Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 169-174

T. MANACORDA (*)

Una osservazione al riguardo dei vincoli interni in un solido. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. – Lo studio dei vincoli interni in un continuo non ha certo origini recenti; posso citare, per i solidi, le ricerche di POINCARÉ [6] e l'esposizione di HELLINGER [5]. SIGNORINI, poi, introduce [7] sistematicamente un tipo di vincolo interno termodinamico, anche se riserva la maggior parte della trattazione susseguente al caso isotermo.

L'argomento, tuttavia, è stato ripreso di recente in relazione al grande sviluppo che la teoria matematica dei continui ha conosciuto negli ultimi trenta anni [9]. Posso citare la limpida trattazione di W. NOLL e C. TRUESDELL [8], una memoria, dedicata a vincoli termodinamici, di A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, J. A. TRAPP [3] e due lavori, in corso di pubblicazione, di F. ANDREUSSI e P. PODIO GUIDUGLI [1]. Devo alla cortesia di quest'ultimo l'aver potuto leggere, quando la presente Nota era già sostanzialmente completa, il manoscritto di una memoria da lui scritta in collaborazione con M. GURTIN [4], nella quale si esamina, in ipotesi assai generali, il caso di un vincolo che si traduca in una relazione funzionale per la storia della deformazione.

Anche la presente Nota è dedicata a questo argomento. Mi è parso tuttavia che non fosse inutile la sua pubblicazione, non ostante la ricerca di GURTIN e PODIO GUIDUGLI (che si basa tuttavia su ipotesi diverse) perchè la trattazione del problema è del tutto elementare. Anche qui si giunge alla conclusione che (almeno nelle ipotesi ammesse) non è accettabile un vincolo interno

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini», Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi, 56100 Pisa, Italia.
(**) Ricevuto: 11-X-1973.

che resti espresso da una dipendenza funzionale dall'intera storia di deformazione: se vincolo c'è, deve riguardare soltanto la determinazione istantanea del gradiente della deformazione.

2. – Indico con K_R una configurazione di riferimento del corpo e con $\boldsymbol{X}$ la posizione in essa della particella X di $\mathscr{B}$, mentre riservo la notazione K_t per indicare la configurazione di $\mathscr{B}$ nell'istante t, ed $\boldsymbol{x}$ a contrassegnare la posizione di X in K_t. La notazione $\chi(X, t)$ indica il moto di X, di modo che è

$$\boldsymbol{x}(t) = \chi(X, t) \tag{2.1}$$

per ogni X di $\mathscr{B}$ ed in ogni istante t dell'intervallo in cui avviene il moto; χ è funzione di t derivabile almeno due volte con derivata seconda continua nell'intervallo di regolarità del moto.

Il gradiente di deformazione $\boldsymbol{F}$ è definito da

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{Grad}_X\, \boldsymbol{x} \tag{2.2}$$

o, in componenti,

$$\boldsymbol{F} = \|x^h_{,H}\| , \qquad x^h_{,H} = \partial x^h / \partial X^H . \tag{2.2'}$$

Si tratta di un vettore doppio, a determinante sempre positivo. L'ordinario tensore di deformazione $\boldsymbol{E}$ è legato ad $\boldsymbol{F}$ da

$$\boldsymbol{C} = \mathbf{1} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} . \tag{2.3}$$

Allo spazio dei gradienti di deformazione si può dare in modo semplice struttura di spazio vettoriale V con norma naturale data da

$$\|\boldsymbol{F}\| = \sqrt{\mathrm{tr}\, \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T} . \tag{2.4}$$

Stante la condizione $\det \boldsymbol{F} > 0$, i vettori $\boldsymbol{F}$ appartengono ad un cono $\mathscr{C}$ di V.

Nel seguito interverrà sistematicamente la nozione di storia della deformazione. Con ciò si intende semplicemente il vettore doppio

$$\boldsymbol{F}^t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t - s) , \qquad 0 \leqslant s < +\infty . \tag{2.5}$$

Indico poi con B lo spazio di BANACH delle storie di deformazione. Conviene distinguere, in B, lo spazio delle storie passate $B_\mathscr{P}$, cioè lo spazio delle restrizioni di $\boldsymbol{F}^t$ alle applicazioni di $(0, +\infty)$ in V. Detta $\|\boldsymbol{F}_r^t\|$ la norma di $\boldsymbol{F}_r^t$ in B_r, come norma di $\boldsymbol{F}^t$ si assume

$$\|\boldsymbol{F}^t\| = |\boldsymbol{F}^t(0)| + \|\boldsymbol{F}_r^t\| = |\boldsymbol{F}(t)| + \|\boldsymbol{F}_r^t\| \,. \tag{2.6}$$

Il tensore degli sforzi di CAUCHY, $\boldsymbol{T}$, soddisfa in ogni istante ed in ogni punto del corpo all'equazione indefinita

$$\varrho \boldsymbol{b} + \operatorname{div} \boldsymbol{T} = \varrho \boldsymbol{a} \,, \tag{2.7}$$

con ϱ densità materiale in K_t, $\boldsymbol{b}$ densità delle forze di massa, ed $\boldsymbol{a} = \ddot{\chi}_x$ accelerazione della particella X nell'istante t, la divergenza essendo calcolata mediante le coordinate attuali $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}$ deve inoltre soddisfare alle condizioni al contorno

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f} \tag{2.8}$$

ove $\boldsymbol{n}$ è la normale esterna al contorno di $\mathscr{B}$ nella configurazione K_t, ed $\boldsymbol{f}$ è la densità delle forze superficiali esterne. Le (2.6) e (2.7) vanno completate da una opportuna equazione costitutiva. Quando essa sia del tipo

$$\boldsymbol{T} = \overset{+\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}^t) \tag{2.9}$$

ove $\mathscr{F}$ è un funzionale di $\boldsymbol{F}^t$, il materiale si dice semplice.

Conviene anche introdurre il tensore degli sforzi di PIOLA-KIRCHHOFF, definito, in funzione di $\boldsymbol{T}$, da

$$\boldsymbol{T}_R = \frac{1}{\varrho}\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^T)^{-1} = \frac{J}{\varrho_0}\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^T)^{-1} \tag{2.10}$$

ove $J = \det \boldsymbol{F}$ e ϱ_0 è la densità nello stato di riferimento.

$\boldsymbol{T}_R$ soddisfa all'equazione

$$\varrho_0 \boldsymbol{b} + \operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R = \varrho_0 \boldsymbol{a} \tag{2.7.1}$$

nella quale la divergenza è calcolata mediante le coordinate di riferimento $\boldsymbol{X}$, ed alla condizione al contorno

$$\boldsymbol{T}_R \boldsymbol{N} = \boldsymbol{f}_R \tag{2.8.1}$$

in cui $\boldsymbol{N}$ è la normale esterna alla frontiera di $\mathscr{B}$ nella configurazione di riferimento.

3. – Penso ormai il solido soggetto ad un vincolo interno della forma

$$\Gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}^t) = 0 \tag{3.1}$$

ove Γ indica un funzionale, a valori in $\mathbb{R}$, della storia della deformazione. Ci si limita a storie a norma limitata. Il dominio di Γ è il prodotto di $\mathbb{R}^3$ per un cono di B. Anche qui conviene, stante la (2.6), pensare Γ dipendente separatamente da $\boldsymbol{F}(t)$ e da $\boldsymbol{F}^t_r$.

Nella meccanica elementare, si chiama spostamento virtuale ogni spostamento infinitesimo compatibile con la configurazione istantanea del vincolo. Devo estendere tale definizione in modo opportuno al caso attuale.

Sia ora $\hat{K}_t$ la configurazione assunta da $\mathscr{B}$ compatibilmente con (3.1) nell'istante t, sotto l'azione di assegnate forze di massa e in superficie, e in relazione ad assegnate condizioni iniziali, e sia $\hat{\boldsymbol{F}}^t$ la o una delle storie inerenti a $\hat{K}_t$ e compatibili con (3.1). Converrà chiamare spostamento virtuale di $\mathscr{B}$ inerente a $\hat{K}_t$ lo spostamento $\hat{K}_t \to K_t$ relativo ad ogni storia la quale, a partire da K_R conduca $\mathscr{B}$ in una configurazione K_t diversa da $\hat{K}_t$ (¹).

A causa della presenza del vincolo (3.1), lo stress di CAUCHY non è più completamente determinato da un'equazione costitutiva del tipo (2.9). Conviene distinguere, in $\boldsymbol{T}$, la parte, $\hat{\boldsymbol{T}}$, determinata in funzione di $\boldsymbol{F}^t$ da una conveniente relazione costitutiva da quella, $\boldsymbol{N}$, che rappresenta le reazioni vincolari interne dovute al vincolo,

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{N}, \qquad \hat{\boldsymbol{T}} = \underset{s=0}{\overset{+\infty}{\mathscr{F}}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}^t) . \tag{3.2}$$

Un vincolo si dirà ideale quando $\boldsymbol{N}$ sia a potenza nulla in corrispondenza ad ogni spostamento virtuale del corpo.

Conviene, ancora una volta, introdurre il tensore di PIOLA-KIRCHHOFF $\boldsymbol{T}_R$, la sua parte determinata $\hat{\boldsymbol{T}}_R$, e quella dovuta ai vincoli, $\boldsymbol{N}_R$. La condizione di idealità dei vincoli si scrive allora

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{N}_R^T \Delta \boldsymbol{F}(t)) = 0 \tag{3.3}$$

ove $\Delta \boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}(t) - \hat{\boldsymbol{F}}(t)$ è inerente allo spostamento virtuale relativo alla configurazione $\hat{K}_t$.

(¹) La storia $\boldsymbol{F}^t$ che conduce $\mathscr{B}$ da K_R a K_t potrebbe, naturalmente, non essere compatibile con le equazioni di CAUCHY relative a $\boldsymbol{b}$ ed $\boldsymbol{f}$ e coi dati iniziali che determinano $\hat{\boldsymbol{F}}^t$.

4. – Tornando alla (3.1), faccio ora l'ipotesi che Γ sia differenziabile secondo FRÉCHET. Anzi, più in particolare, pensando Γ funzione di $\boldsymbol{F}(t)$ e di $\boldsymbol{F}_r^t$ ammetto che sussista una regola di differenziazione del tipo

$$\Gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}^t + \boldsymbol{h}^t) - \Gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}^t) = D_{\boldsymbol{F}}\Gamma\cdot\boldsymbol{h}(t) + \delta_h\Gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}_r^t/\boldsymbol{h}_r^t) + o(1) \tag{4.1}$$

ove $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{h}$ è un elemento di $\mathscr{C}$, $\boldsymbol{h}_r^t$ la restrizione di $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h}_r^t = \boldsymbol{h}(t-s)$, $0 < s < +\infty$ e $o(1)$ una quantità che tende a zero al tendere a zero di $\|\boldsymbol{h}\|$ di ordine superiore ad uno, $\delta_h\Gamma$ rappresenta un funzionale lineare in $\boldsymbol{h}_r^t$, e, infine, $D_{\boldsymbol{F}}\Gamma$ indica la «derivata» secondo COLEMAN di Γ rispetto alla determinazione istantanea $\boldsymbol{F}(t)$ del suo argomento

$$D_{\boldsymbol{F}}\Gamma\cdot\boldsymbol{h}(t) = \operatorname{tr}\big((D_{\boldsymbol{F}}\Gamma)^T\boldsymbol{h}\big) \tag{4.2}$$

definita da

$$\Gamma\big(\boldsymbol{F}_r^t, \boldsymbol{F}(t)+\boldsymbol{h}\big) = \Gamma\big(\boldsymbol{F}_r^t, \boldsymbol{F}(t)\big) + D_{\boldsymbol{F}}\Gamma\big(\boldsymbol{F}_r^t, \boldsymbol{F}(t)\big)\cdot\boldsymbol{h} + o(1)\ (^1)\,.$$

Sia ora $\hat{\boldsymbol{F}}^t$ una storia prefissata compatibile con (3.1), e $\boldsymbol{F}^t$ un'altra qualunque storia, sempre compatibile con il vincolo. Posto $\boldsymbol{h}^t = \boldsymbol{F}^t - \hat{\boldsymbol{F}}^t = \Delta\boldsymbol{F}^t$, in base alla (4.1), mentre si ha

$$\Gamma(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{F}}^t) = 0\,, \qquad \Gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}^t) = 0\,, \tag{4.3}$$

si ha anche

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}^t) - \Gamma(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{F}}^t) &= \Gamma(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{F}}^t + \Delta\boldsymbol{F}^t) - \Gamma(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{F}}^t) = \\ &= D_{\hat{\boldsymbol{F}}}\,\Gamma\cdot\Delta\boldsymbol{F}(t) + \underset{\Delta\boldsymbol{F}}{\delta}\Gamma(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{F}}_r^t\,|\Delta\boldsymbol{F}_r^t) + o(1)\end{aligned} \tag{4.4}$$

e perciò (cfr. (4.2))

$$\operatorname{tr}\big((D_{\hat{\boldsymbol{F}}}\,\Gamma)^T\Delta\boldsymbol{F}\big) + \underset{\Delta\boldsymbol{F}}{\delta}\Gamma(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{F}}_r^t\,|\Delta\boldsymbol{F}_r^t) = 0\,. \tag{4.5}$$

D'altro canto, per essere il vincolo ideale, si deve avere, per ogni $\Delta\boldsymbol{F}$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{N}_R^T\Delta\boldsymbol{F}) = 0\,. \tag{4.6}$$

---

(1) Tale regola di differenziazione può essere dimostrata quale conseguenza di opportune ipotesi, cfr. [2]. Qui, per brevità, ho preferito postulare direttamente la validità di (4.1).

Introducendo un moltiplicatore lagrangiano, si ottiene perciò

$$\operatorname{tr}\{[N_R^T - \lambda(D_F\Gamma)^T]\Delta F\} + \lambda\underset{\Delta F}{\delta}\Gamma(X, \hat{F}_r^t|\Delta F_r^t) = 0 \tag{4.7}$$

identicamente rispetto a ΔF^t. Se si considerano in particolare le storie per le quali $F(t) = \hat{F}(t)$, per esse deve aversi identicamente

$$\delta_{\Delta F}\Gamma(X, \hat{F}_r^t|\Delta F_r^t) = 0$$

la quale importa che Γ non possa dipendere da F_r^t e debba quindi ridursi ad una funzione ordinaria di $F(t)$.

Bibliografia.

[1] F. Andreussi and P. Podio Guidugli, *Thermomechanical constraints in simple materials*, Bull. Acad. Polon. Sci. **21** (1973) 199-205.

F. Andreussi and P. Podio Guidugli, *An axiomatic approach to the theory of thermomechanically constrained materials*, Atti del Symposium on Foundations of Plasticity, Varsaw 1972 vol. II Noordhoff Int. Publ. Leyden.

[2] B. D. Coleman and V. J. Mizel, *General theory of dissipation in materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal., **27** (1968), 255-274.

[3] A. E. Green, P. M. Naghdi and J. A. Trapp, *Thermodynamics of a continuum with internal constraints*, Internat. J. Engrg. Sci., **8** (1970), 891-908.

[4] M. Gurtin and P. Podio Guidugli, *The thermodynamics of constrained materials*, Arch. Rational Mech. Anal. **51** (1973), 192-208.

[5] E. Hellinger, *Die allgemeine Ansätze der Mechanik der Kontinua*, Enz. Math. Wiss., **4**^{2} (1904-1935), 602-694.

[6] H. Poincaré, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lumière*, Paris, 1889.

H. Poincaré, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, Paris, 1891.

[7] A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. III, Ann. Mat. Pura e Appl. (4) **39** (1955), 147-201.

[8] C. Truesdell and W. Noll, *The non-linear fields of mechanics*, Hdb. d. Phy. III/3 (1965) 1-602 (69-75).

[9] C. Truesdell and R. Toupin, *The classical field theories*, Hdb. d. Phy. III/1 (1960).

Summary.

A simple material, subject to the usual assumptions regarding its possible deformations, cannot be subjected to any constraint expressed by a functional restriction on the gradient of the deformation history.

* * *