Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 139-161

SILVIO CINQUINI (*)

Sopra la continuità di una classe di integrali del Calcolo delle variazioni. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

In una Memoria di alcuni anni fa (1), avente come obiettivo teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali dei primi n ordini con $n = 2$ e $n = 3$, abbiamo premesso qualche risultato relativo alla continuità e alla semicontinuità degli integrali stessi; i quali (2), scelto, per semplicità, come

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 27100 Pavia, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni. - Ricevuto: 17-XII-1973.

(1) S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo per una classe di integrali curvilinei in forma parametrica*, Ann. Mat. Pura Appl. **49** (1960) 25-72. Nel seguito tale lavoro verrà citato quale Memoria A.

Sembra superfluo ricordare che i problemi in questione sono stati impostati in modo da assicurare l'indipendenza dell'integrale dal parametro; successivamente per semplicità, viene assunto come parametro la lunghezza s dell'arco rettificato.

(2) Per ulteriori risultati vedi:

S. CINQUINI, *Un teorema di Calcolo delle variazioni*, Riv. Mat. Univ. Parma, **12** (1971), 1-19.

S. CINQUINI, *Sopra una estensione di alcuni risultati di Calcolo delle variazioni*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend., **107** (1973), 44-60.

M. BORGOGNO, *Sopra una condizione necessaria per la semicontinuità degli integrali nei problemi variazionali in forma parametrica di secondo ordine*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend., **107** (1973), 473-502.

M. BORGOGNO, *Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali nei problemi variazionali in forma parametrica di secondo ordine*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend., **108** (1974), 228-261.

parametro la lunghezza s dell'arco rettificato, sono i seguenti

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}} = \int_{\mathscr{C}^{(2)}} F\big(x(s), y(s), z(s);\, x'(s), y'(s), z'(s);\, u_2, v_2, w_2\big)\, \mathrm{d}s\,,$$

$$\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} = \int_{\mathscr{C}^{(3)}} F\big(x(s), y(s), z(s);\, x'(s), y'(s), z'(s);\, u_2, v_2, w_2;\, u_3, v_3, w_3\big)\, \mathrm{d}s\,,$$

ove, per brevità di scrittura, abbiamo posto

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} u_2 = \dfrac{\nu}{R} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)\,, \\[2ex] v_2 = \dfrac{\lambda}{R} = y'(s)z''(s) - y''(s)z'(s)\,, \\[2ex] w_2 = \dfrac{\mu}{R} = z'(s)x''(s) - z''(s)x'(s)\,, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} u_3 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{\nu}{R} = x'(s)y'''(s) - x'''(s)y'(s)\,, \\[2ex] v_3 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{\lambda}{R} = y'(s)z'''(s) - y'''(s)z'(s)\,, \\[2ex] w_3 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mu}{R} = z'(s)x'''(s) - z'''(s)x'(s)\,, \end{cases}$$

ed è sottinteso che R^{-1} è la flessione e λ, μ, ν sono i coseni direttori della binormale.

Recentemente gli integrali $\mathscr{I}^{(n)}_{\mathscr{C}^{(n)}}$ per $n > 3$ hanno formato oggetto di un gruppo di lavori di N. Berruti Onesti (3), e, per quanto si riferisce alla semicontinuità, nella propria profonda indagine l'A. ha rilevato anche un nuovo risultato valevole nel caso $n = 3$ (4): ogni integrale quasi regolare positivo seminormale è semicontinuo inferiormente sopra ogni curva avente lunghezza positiva.

(3) N. Berruti Onesti, *Sopra una classe di problemi variazionali di ordine n*, Ann. Mat. Pura Appl., **91** (1972), 129-161.

N. Berruti Onesti, *Sopra la semicontinuità di una classe di integrali curvilinei per problemi variazionali di ordine n*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend., **106** (1972), 365-396.

N. Berruti Onesti, *Sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per una classe di problemi variazionali di ordine n*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 24 (1975).

(4) Vedi N. Berruti Onesti, luogo cit. per secondo in (3), n. 4, Osservazione I, pag. 392.

D'altra parte sino a oggi non è stato ancora provato, se, per $n=2$, il teorema ora citato è valido in condizioni altrettanto generali.

Tale diversità (per quanto si riferisce alla semicontinuità) tra i casi $n=2$ e $n=3$ dipende, in un certo senso, dalle condizioni di validità dei teoremi di continuità rilevati nella Memoria A ([5]), dei quali è fatto uso per stabilire la semicontinuità.

Vale a dire, se P_i $(i=0,1,2,3)$ sono quattro costanti, nel caso $n=3$ abbiamo provato che l'integrale

$$\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} = \int_{\mathscr{C}^{(3)}} [P_0 + P_1 u_3 + P_2 v_3 + P_3 w_3]\, ds$$

è funzione continua.

D'altra parte per $n=2$ non soltanto la continuità dell'integrale

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}} = \int_{\mathscr{C}^{(2)}} [P_0 + P_1 u_2 + P_2 v_2 + P_3 w_2]\, ds$$

è assicurata soltanto in ogni classe di curve ordinarie $\mathscr{C}^{(2)}$, per la quale esiste una costante $\Lambda > 0$, tale che sia

$$\text{(III)} \qquad \int_{\mathscr{C}^{(2)}} \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}\, ds \leqslant \Lambda\,;$$

ma abbiamo costruito ([6]) una classe di curve ordinarie $\mathscr{C}^{(2)}$, nella quale l'integrale $\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}}$ non è continuo, perchè non è verificata la disuguaglianza (III).

Pertanto, come già era stato previsto ([7]), nelle presenti righe cominciamo ad approfondire il problema della continuità degli integrali $\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}}$ e $\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$, esaminando il loro comportamento quando P_0, P_1, P_2, P_3 non sono costanti.

Sotto la sola ipotesi della continuità delle funzioni $P_i(x, y, z; x', y', z')$, $(i=0,1,2,3)$ si prova rapidamente (n. **3**) la continuità dell'integrale

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}} = \int_{\mathscr{C}^{(2)}} [P_0(x, y, z; x', y', z') + P_1(\ldots) u_2 + P_2(\ldots) v_2 + P_3(\ldots) w_2]\, ds$$

in ogni classe di curve ordinarie $\mathscr{C}^{(2)}$, per la quale è verificata la disuguaglianza (III); inoltre, riprendendo in forma opportuna (n. **4**) il già citato nostro esempio, si riconferma che tale disuguaglianza è essenziale per la continuità dell'integrale $\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}}$.

([5]) Cfr. Memoria A, n. 27, pag. 54 e n. 8, pag. 33.

([6]) Vedi Memoria A, n. 9, pag. 35.

([7]) Vedi Memoria A, pp. 26-27 e anche le Osservazioni dei nn. 8 e 27 (pp. 35 e 56).

Analogo risultato è valido (n. **5**) per gli integrali

$$\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} = \int_{\mathscr{C}^{(3)}} [P_0(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) + P_1(\ldots)u_3 + P_2(\ldots)v_3 + P_3(\ldots)w_2]\, ds\,,$$

nel senso che tale integrale è funzione continua in ogni classe di curve ordinarie $\mathscr{C}^{(3)}$, per la quale esiste una costante $\Lambda' > 0$, tale che sia

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^L \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\, ds \leq \Lambda'\,.$$

Inoltre per gli integrali $\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ viene stabilito un secondo teorema di continuità (n. **7**) valevole nel campo funzionale costituito da tutte le curve ordinarie $\mathscr{C}^{(3)}$, ma sotto opportune ipotesi di derivabilità per le funzioni $P_i(\ldots)$, $(i = 1, 2, 3)$, tra le quali sono le condizioni

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial P_1}{\partial v_2} = \frac{\partial P_2}{\partial u_2}\,, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial w_2} = \frac{\partial P_3}{\partial u_2}\,, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial w_2} = \frac{\partial P_3}{\partial v_2}\,.$$

Un esempio (n. **8**) pone in luce che, se non sono soddisfatte nè la disuguaglianza (II) nè le condizioni (V), può mancare la continuità dell'integrale $\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$. È da soggiungere che la dimostrazione del teorema del n. **7**, la quale raffina un procedimento già seguito in casi più semplici ([8]), è basata essenzialmente sulle (IV), vale a dire sulle relazioni $u_3 = du_2/ds$, $v_3 = dv_2/ds$, $w_3 = dw_2/ds$. D'altra parte, siccome (come è già stato fatto presente nella Memoria A) u_2, v_2, w_2 non sono derivate esatte, non deve sorprendere che (bene inteso per quanto si riferisce alla continuità e alla semicontinuità) l'indagine scientifica si presenti più ardua nel caso $n = 2$ in confronto a $n = 3$.

§ I

1. - Generalità: problema del secondo ordine.

Per tutte le generalità rinviamo alla Memoria A ([9]) limitandoci ad alcuni richiami:

([8]) Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, 2 volumi, N. Zanichelli, 1921-23, Bologna, vol. I, cap. VII, n. 100, pp. 276-278.

S. CINQUINI, *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1944) [1947], 19-33. In particolare n. 11, pag. 14.

L. GIULIANO, *Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle variazioni*, Nota I, Rend. Acc. Naz. Lincei, **4** (1947), 39-45; vedi n. 3.

([9]) Vedi Cap. I, § 1, pp. 28-33.

a) Sia

$$F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) \equiv$$
$$\equiv P_0(x, y, z; x', y', z') + P_1(\ldots) u_2 + P_2(\ldots) v_2 + P_3(\ldots) w_2 ,$$

con $P_i(x, y, z; x', y', z')$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ funzioni

1) definite e continue in ogni punto (x, y, z) di un campo A, e per ogni terna (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$;

2) positivamente omogenee di grado 1 rispetto alle variabili x', y', z';

3) tali che sia

$$P_i(x, y, z; 0, 0, 0) = 0 , \qquad (i = 0, 1, 2, 3) .$$

Ogni terna (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ viene chiamata terna normalizzata.

b) *Curva ordinaria* $\mathscr{C}^{(2)}$ è ogni curva

$$\mathscr{C}^{(2)}: \qquad x = x(s) , \quad y = y(s) , \quad z = z(s) , \qquad (0 \leqslant s \leqslant L) ,$$

(ove s è la lunghezza dell'arco rettificato), per la quale le funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ sono assolutamente continue assieme alle loro derivate del primo ordine, e ogni punto $\big(x(s), y(s), z(s)\big)$ appartiene al campo A.

È ovvio che esiste finito l'integrale (secondo LEBESGUE)

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}} = \int_{\mathscr{C}^{(2)}} [P_0(x, y, z; x', y', z') + P_1(\ldots) u_2 + P_2(\ldots) v_2 + P_3(\ldots) w_2] \, ds .$$

Inoltre ogni curva costituita da un solo punto è una curva ordinaria $\mathscr{C}^{(2)}$ con $\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}} = 0$.

c) Data una curva ordinaria $\mathscr{C}^{(2)}$

$$\mathscr{C}^{(2)}_0: \qquad x = x_0(s) , \quad y = y_0(s) , \quad z_0 = z_0(s) , \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0)$$

avente lunghezza $L_0 > 0$, e considerato un numero ϱ con $0 < \varrho < 1$, la curva ordinaria

$$\mathscr{C}^{(2)}: \qquad x = x(\sigma) , \quad y = y(\sigma) , \quad z = z(\sigma) , \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant L)$$

(ove si sono indicate con s e σ le rispettive lunghezze degli archi rettificati delle curve $\mathscr{C}_0^{(2)}$ e $\mathscr{C}^{(2)}$, contate a partire dai loro primi estremi se le curve sono aperte e da punti convenientemente scelti se le curve sono chiuse) appartiene all'intorno $(\varrho)^2$ di $\mathscr{C}_0^{(2)}$, se è possibile determinare almeno una funzione $\sigma(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L_0)$ con $\sigma(0) = 0$, $\sigma(L_0) = L$, la quale sia continua assieme alla propria derivata $\sigma'(s)$ e tale che valga la doppia disuguaglianza

$$(1) \qquad 1 - \varrho \leqslant \sigma'(s) \leqslant 1 + \varrho\,,$$

in modo che per qualunque s di $(0, L_0)$ risulti

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} |x_0(s) - x(\sigma(s))| \leqslant \varrho\,, \qquad |y_0(s) - y(\sigma(s))| \leqslant \varrho\,, \qquad |z_0(s) - z(\sigma(s))| \leqslant \varrho\,, \\[2mm] \left|\dfrac{\mathrm{d}x_0(s)}{\mathrm{d}s} - \left[\dfrac{\mathrm{d}x(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right| \leqslant \varrho\,, \qquad \left|\dfrac{\mathrm{d}y_0(s)}{\mathrm{d}s} - \left[\dfrac{\mathrm{d}y(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right| \leqslant \varrho\,, \\[2mm] \qquad\qquad \left|\dfrac{\mathrm{d}z_0(s)}{\mathrm{d}s} - \left[\dfrac{\mathrm{d}z(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right| \leqslant \varrho\,. \end{array}\right.$$

Nel caso, in cui la curva ordinaria $\mathscr{C}_0^{(2)}$ è costituita da un solo punto (x_0, y_0, z_0), la curva ordinaria $\mathscr{C}^{(2)}$ appartiene all'intorno $(\varrho)^2$ di $\mathscr{C}_0^{(2)}$, se per qualunque σ di $(0, L)$ è

$$|x_0 - x(\sigma)| \leqslant \varrho\,, \qquad |y_0 - y(\sigma)| \leqslant \varrho\,, \qquad |z_0 - z(\sigma)| \leqslant \varrho\,,$$

e se, per qualsiasi coppia di valori distinti σ_1, σ_2 di $(0, L)$, sono verificate le disuguaglianze

$$(3) \qquad |x'(\sigma_1) - x'(\sigma_2)| \leqslant \varrho\,, \qquad |y'(\sigma_1) - y'(\sigma_2)| \leqslant \varrho\,, \qquad |z'(\sigma_1) - z'(\sigma_2)| \leqslant \varrho\,.$$

Infine ogni curva $\mathscr{C}^{(2)}$ costituita da un solo punto (x, y, z) appartiene all'intorno $(\varrho)^2$ di $\mathscr{C}_0^{(2)}$, se è

$$|x_0 - x| \leqslant \varrho\,, \qquad |y_0 - y| \leqslant \varrho\,, \qquad |z_0 - z| \leqslant \varrho\,.$$

Ricordiamo ancora che la lunghezza L di ogni curva ordinaria $\mathscr{C}^{(2)}$, appartenente all'intorno $(\varrho)^2$ della curva ordinaria $\mathscr{C}_0^{(2)}$, soddisfa per $L_0 > 0$ alla doppia disuguaglianza

$$(4) \qquad (1 - \varrho) L_0 \leqslant L \leqslant (1 + \varrho) L_0\,,$$

e per $L_0 = 0$, supposto $\varrho \leqslant 1/(2\sqrt{3})$, alla disuguaglianza

$$(4') \qquad L \leqslant 4\sqrt{3}\,\varrho\,.$$

d) L'integrale $\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}}$ è funzione continua sulla curva ordinaria $\mathscr{C}^{(2)}_0$, se, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\varrho > 0$ in modo che la disuguaglianza

$$|\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}} - \mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}_0}| < \varepsilon$$

sia verificata per tutte le curve ordinarie $\mathscr{C}^{(2)}$ appartenenti all'intorno $(\varrho)^2$ della curva $\mathscr{C}^{(2)}_0$.

L'integrale $\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}}$ è funzione continua in una classe di curve ordinarie $\mathscr{C}^{(2)}$, se gode della continuità su ogni curva della classe.

e) Ricordiamo l'identità

$$u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = \frac{1}{R^2} = x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)\ . \tag{5}$$

2. - Generalità: problemi del terzo ordine.

Rinviamo alla Memoria A ([10]), limitandoci a qualche complemento a quanto abbiamo ricordato al n. **1**.

a) Sia

$$F(x, y, z;\, x', y', z';\, u_2, v_2, w_2;\, u_3, v_3, w_3) \equiv$$
$$\equiv P_0(x, y, z;\, x', y', z';\, u_2, v_2, w_2) + P_1(\ldots)u_3 + P_2(\ldots)v_3 + P_3(\ldots)w_3\ ,$$

ove va inteso che le funzioni $P_i(x, y, z;\, x', y', z';\, u_2, v_2, w_2)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ sono definite e continue anche per ogni terna di numeri reali (u_2, v_2, w_2), ferme restando le ipotesi 2) e 3) del n. **1**, *a*).

b) Nella definizione di *curva ordinaria* $\mathscr{C}^{(3)}$ si suppone che le funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ siano assolutamente continue assieme alle loro derivate dei primi due ordini.

c) Data una curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}_0$ avente lunghezza $L_0 > 0$, nella definizione di curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$ appartenente all'intorno $(\varrho)^3$ di $\mathscr{C}^{(3)}_0$ alle condizioni del n. **1**, *c*) vanno aggiunte le disuguaglianze

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{d^2x_0(s)}{ds^2} - \left[\frac{d^2x(\sigma)}{d\sigma^2}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right| \leqslant \varrho\ , \qquad \left|\frac{d^2y_0(s)}{ds^2} - \left[\frac{d^2y(\sigma)}{d\sigma^2}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right| \leqslant \varrho\ , \\ &\left|\frac{d^2z_0(s)}{ds^2} - \left[\frac{d^2z(\sigma)}{d\sigma^2}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right| \leqslant \varrho\ . \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

([10]) Vedi Cap. II, § 1, pp. 52-54.

Analogamente, se $\mathscr{C}_0^{(3)}$ ha lunghezza nulla, alle (3) vanno aggiunte le disuguaglianze

$$(3') \qquad |x''(\sigma_1)-x''(\sigma_2)|\leq\varrho\,, \qquad |y''(\sigma_1)-y''(\sigma_2)|\leq\varrho\,, \qquad |z''(\sigma_1)-z''(\sigma_2)|\leq\varrho\,.$$

d) Nella definizione di continuità dell'integrale $\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ (cfr. n. **1**, *d*)) vanno considerate tutte le curve ordinarie $\mathscr{C}^{(3)}$, che appartengono all'intorno $(\varrho)^3$ della curva ordinaria $\mathscr{C}_0^{(3)}$.

e) Assieme alla (5), teniamo presente l'identità

$$(6) \qquad u_3^2+v_3^2+w_3^2=\frac{1}{R^2}\frac{1}{T^2}+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R}\right]^2=x'''^2(s)+y'''^2(s)+z'''^2(s)-$$

$$-[x''^2(s)+y''^2(s)+z''^2(s)]^2\,,$$

ove $1/T$ è la torsione.

§ 2

3. - Teorema I.

Supposto che le funzioni $P_i(x,y,z;x',y',z')$, $(i=0,1,2,3)$ *soddisfino alle ipotesi del n.* **1**, *a*) *l'integrale*

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}}=\int\limits_{\mathscr{C}^{(2)}}[P_0(x,y,z;x',y',z')+P_1(\ldots)u_2+P_2(\ldots)v_2+P_3(\ldots)w_2]\,\mathrm{d}s$$

è funzione continua in ogni classe K_0 *di curve ordinarie* $\mathscr{C}^{(2)}$, *per la quale esiste un numero* $\Lambda>0$ *in modo che (per qualunque curva di* K_0) *sia*

$$(\mathrm{III}) \qquad \int\limits_0^L\sqrt{x''^2(s)+y''^2(s)+z''^2(s)}\,\mathrm{d}s\leq\Lambda\,.$$

a) Per provare l'asserto, ricordiamo che, in modo ben noto, possiamo completare la definizione di ciascuna delle funzioni $P_j(\ldots)$, $(j=1,2,3)$ in tutto lo spazio (x,y,z), in modo che risulti continua nel complesso delle variabili $(x,y,z;x',y',z')$.

Ciò premesso, considerata una qualsiasi curva di K_0

$$\mathscr{C}_0^{(2)}: \qquad x=x_0(s)\,,\quad y=y_0(s)\,,\quad z=z_0(s)\,, \qquad (0\leq s\leq L_0)\,,$$

sia

$$\mathscr{C}^{(2)}: \qquad x=x(\sigma)\,,\quad y=y(\sigma)\,,\quad z=z(\sigma)\,, \qquad (0\leq\sigma\leq L)\,,$$

(ove anche σ rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato) un'altra curva qualunque di K_0 appartenente all'intorno $(\varrho)^2$ di $\mathscr{C}_0^{(2)}$.

b) Supponiamo $L_0 > 0$. In virtù del teorema di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}} - \mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}_0^{(2)}} =$$

$$= \int_0^{L_0} [P_0(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s))) + P_1(\ldots)u_2(\sigma(s)) +$$

$$+ P_2(\ldots)v_2(\sigma(s)) + P_3(\ldots)w_2(\sigma(s))]\sigma'(s)\, ds -$$

$$- \int_0^{L_0} [P_0(x_0(s), \ldots, z_0'(s)) + P_1(\ldots)u_{20}(s) + P_2(\ldots)v_{20}(s) + P_3(\ldots)w_{20}(s)]\, ds\,,$$

avendo indicato con $u_{20}(s)$, $v_{20}(s)$, $w_{20}(s)$ le funzioni u_2, v_2, w_2 relative alla curva $\mathscr{C}_0^{(2)}$.

Posto

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}} - \mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}_0^{(2)}} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \tag{7}$$

con

$$\Delta_0 = \int_0^{L_0} [P_0(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s)))\sigma'(s) - P_0(x_0(s), \ldots, z_0'(s))]\, ds\,,$$

$$\Delta_1 = \int_0^{L_0} [P_1(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s)))u_2(\sigma(s))\sigma'(s) - P_1(x_0(s), \ldots, z_0'(s))u_{20}(s)]\, ds\,,$$

$$\Delta_2 = \int_0^{L_0} [P_2(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s)))v_2(\sigma(s))\sigma'(s) - P_2(x_0(s), \ldots, z_0'(s))v_{20}(s)]\, ds\,,$$

$$\Delta_3 = \int_0^{L_0} [P_3(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s)))w_2(\sigma(s))\sigma'(s) - P_3(x_0(s), \ldots, z_0'(s))w_{20}(s)]\, ds\,,$$

per fissare le idee, consideriamo Δ_1. Abbiamo

$$\Delta_1 = \Delta_{11} - \Delta_{12}\,, \tag{8}$$

con

$$\Delta_{11} = \int_0^{L_0} [P_1(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s)))x'(\sigma(s))y''(\sigma(s))\sigma'(s) - P_1(x_0(s), \ldots, z_0'(s))x_0'(s)y_0''(s)]ds,$$

$$\Delta_{12} = \int_0^{L_0} [P_1(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s)))y'(\sigma(s))x''(\sigma(s))\sigma'(s) - P_1(x_0(s), \ldots, z_0'(s))y_0'(s)x_0''(s)]ds.$$

Fissato un numero $M_1 > 0$ in modo che valga la disuguaglianza

$$|P_1(x_0(s), y_0(s), z_0(s); x_0'(s), y_0'(s), z_0'(s))| < M_1, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0),$$

è ben noto che possiamo approssimare ciascuno dei prodotti

$$P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))\, x_0'(s), \qquad P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))\, y_0'(s)$$

mediante due successioni di polinomi $\psi_{1n}(s)$, $\varphi_{1n}(s)$, $(n = 1, 2, \dots)$ con

$$|\varphi_{1n}(s)| \leqslant M_1, \qquad |\psi_{1n}(s)| \leqslant M_1, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0),\ n = 1, 2, \dots,$$

in modo che sia

$$(9) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_{1n}(s) = P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))x_0'(s), \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \psi_{1n}(s) = P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))y_0'(s), \end{cases}$$

uniformemente in $(0, L_0)$.

Abbiamo in modo ovvio

$$(10) \quad \Delta_{11} = \int_0^{L_0} [P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)))x'(\sigma(s)) - \\ - P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))x_0'(s)]y''(\sigma(s))\sigma'(s)\, ds + \\ + \int_0^{L_0} [P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))x_0'(s) - \varphi_{1n}(s)]\, [y''(\sigma(s))\sigma'(s) - y_0''(s)]\, ds + \\ + \int_0^{L_0} [y''(\sigma(s))\sigma'(s) - y_0''(s)]\varphi_{1n}(s)\, ds,$$

e teniamo presente che, mediante un'integrazione per parti, si ottiene

$$\int_0^{L_0} [y''(\sigma(s))\sigma(s) - y_0''(s)]\varphi_{1n}(s)\, ds = [(y'(\sigma(s)) - y_0'(s))\varphi_{1n}(s)]_0^{L_0} - \\ - \int_0^{L_0} [y'(\sigma(s)) - y_0'(s)]\varphi_{1n}'(s)\, ds.$$

Preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, tenute presenti la continuità della funzione $P_1(\dots)$, le (2) e le (9), determiniamo un intero positivo n_0 e un numero $\varrho_1 > 0$ con $\varrho_1 < \varrho$, in modo che, per ogni curva di K_0 appartenente all'intorno $(\varrho_1)^2$ di $\mathscr{C}_0^{(2)}$, sia in tutto $(0, L_0)$

$$|P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)))\, x'(\sigma(s)) - P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))\, x_0'(s)| < \varepsilon,$$

$$|P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)))\, y'(\sigma(s)) - P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))\, y_0'(s)| < \varepsilon,$$

$$|P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))\, x_0'(s) - \varphi_{1n_0}(s)| < \varepsilon,$$

$$|P_1(x_0(s), \dots, z_0'(s))\, y_0'(s) - \psi_{1n_0}(s)| < \varepsilon.$$

Dalla (10) segue immediatamente

$$|\Delta_{11}| < \varepsilon \int_0^{L_0} |y''(\sigma(s))|\,|\sigma'(s)|\,\mathrm{d}s + \varepsilon \int_0^{L_0} [\,|y''(\sigma(s))|\,|\sigma'(s)| + |y''_0(s)|\,]\,\mathrm{d}s + 2M_1\varrho_1 + L_0\varrho_1 N_{n_0},$$

ove abbiamo indicato con N_{n_0} il maggiore dei massimi valori assoluti delle funzioni $\varphi'_{1n_0}(s)$, $\psi'_{1n_0}(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L_0)$, e anche, per $\varrho_1 < \varepsilon$, in virtù della condizione (III)

$$|\Delta_{11}| < [2\int_0^{L} |y''(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^{L_0} |y''_0(s)|\,\mathrm{d}s + 2M_1 + L_0 N_{n_0}]\,\varepsilon < [3\Lambda + 2M_1 + L_0 N_{n_0}]\,\varepsilon;$$

e in modo analogo risulta

$$|\Delta_{12}| < [\,2\int_0^{L} |x''(\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^{L_0} |x''_0(s)|\,\mathrm{d}s + 2M_1 + L_0 N_{n_0}]\,\varepsilon < [3\Lambda + 2M_1 + L_0 N_{n_0}]\,\varepsilon\,.$$

Siccome si procede in modo del tutto analogo per Δ_2 e Δ_3 e anche più semplicemente per Δ_0, in virtù delle (7) e (8) l'asserto è evidente.

c) Rimane da considerare il caso $L_0 = 0$, nel quale è $\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}_0} = 0$.

Basta tener presente che, procedendo in modo analogo e considerando (in luogo di Δ_{11}) l'integrale

$$\Delta_{11}^{(0)} = \int_0^{L} P_1(x(\sigma), \ldots, z'(\sigma))\,x'(\sigma)\,y''(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

risulta ovviamente

$$\Delta_{11}^{(0)} = \int_0^{L} [P_1(x(\sigma), \ldots, z'(\sigma))\,x'(\sigma) - P_1(x(0), \ldots, z'(0))\,x'(0)]\,y''(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma +$$
$$+ P_1(x(0), \ldots, z'(0))\,x'(0)[y'(L) - y'(0)]\,,$$

e in modo evidente si perviene all'asserto.

4. - Esempio.

Se si considera una classe di curve, per la quale non è verificata l'ipotesi (III), il teorema del n. 3 può non essere valido, come è posto in luce dal seguente esempio.

Sia

$$A \equiv [-2 \leqslant x \leqslant 2, \quad -2 \leqslant y \leqslant 2, \quad -4\pi \leqslant z \leqslant 4\pi],$$

$$F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,[u_2 + xv_2 + yw_2],$$

e riprendiamo la successione di eliche circolari [11]

$$\mathscr{C}_n^{(2)}: \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{n^3} \operatorname{sen}(n^3 a_n s), \\[2ex] y = \dfrac{1}{n^3} \cos(n^3 a_n s), \\[2ex] z = b_n s, \qquad\qquad (0 \leqslant s \leqslant 2\pi), \quad n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

con

$$a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}, \qquad b_n = \cos\frac{1}{n},$$

per le quali è

$$u_2 = -n^3 a_n^3, \qquad v_2 = n^3 a_n^2 b_n \cos(n^3 a_n s), \qquad w_2 = -n^3 a_n^2 b_n \operatorname{sen}(n^3 a_n s).$$

Per n sufficientemente grande le curve ordinarie $\mathscr{C}_0^{(2)}$ appartengono all'intorno $(\varrho)^2$ della curva

$$\mathscr{C}_0^{(2)}: \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = s, \qquad (0 \leqslant s \leqslant 2\pi),$$

per la quale è

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}_0^{(2)}} = 0.$$

D'altra parte risulta

$$\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}_n^{(2)}} = -2\pi n^3 \operatorname{sen}^3 1/n,$$

vale a dire l'integrale $\mathscr{I}^{(2)}_{\mathscr{C}^{(2)}}$ non è continuo sulla curva $\mathscr{C}_0^{(2)}$. Ciò dipende dal fatto che la condizione (III) non è soddisfatta, essendo

$$\int_{\mathscr{C}_n^{(2)}} \sqrt{x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)}\; ds = 2\pi\, n^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n}.$$

---

[11] Vedi Memoria A, n. 9, *a*), pp. 35-36.

§ 3

5. - Teorema II.

Supposto che le funzioni $P_i(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ *soddisfino alle ipotesi del n.* **2**, *a*) *l'integrale*

$$\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} = \int_{\mathscr{C}^{(3)}} [P_0(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) + P_1(\ldots)u_3 + P_2(\ldots)v_3 + P_3(\ldots)w_3]\, ds$$

è funzione continua sopra ciascuna curva avente lunghezza positiva in ogni classe K_0 *di curve ordinarie* $\mathscr{C}^{(3)}$, *per le quali esiste un numero* $\Lambda' > 0$, *in modo che sia*

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^L \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\, ds \leqslant \Lambda' .$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del n. **3**.

6. - Corollario.

Il teorema del n. **5** *è ancora valido, se si considera una classe* K_0 *di curve ordinarie* $\mathscr{C}^{(3)}$, *soddisfacenti* (*anzichè alla* (IV)) *alle seguenti condizioni:*

Esiste un numero $\Lambda^* > 0$ *tale che per qualsiasi curva di* K_0 *sia*

$$\text{(IV*)} \qquad \int_0^L \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}\, ds \leqslant \Lambda^* .$$

(γ) ([12]). *Esistono due numeri* λ, Γ *con* $0 < \lambda < 1$, $\Gamma \geqslant 0$ *in modo che per qualunque curva di* K_0 *la disuguaglianza*

$$\text{(11)} \qquad [x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)]^2 \leqslant \lambda [x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)]$$

è verificata per quasi tutti gli s *del rispettivo intervallo di definizione, per i quali è*

$$\text{(12)} \qquad \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} \geqslant \Gamma .$$

([12]) Vedi Memoria A, n. 36, pp. 63-64, ove è rilevato il significato geometrico della disuguaglianza (11).

Infatti, per ogni curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$ di K_0

$$\mathscr{C}^{(3)}: \qquad x = x(s)\,, \quad y = y(s)\,, \quad z = z(s)\,, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L)\,,$$

sia E' l'insieme dei punti di $(0, L)$, nei quali è verificata la disuguaglianza (12) ed E'' il suo complementare rispetto all'intervallo $(0, L)$.

Tenuta presente la (6), in virtù della (11) in quasi tutti i punti di E' risulta

$$u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 \geqslant (1-\lambda)[x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)]\,,$$

mentre, sempre per la (6), in quasi tutti i punti di E'' è

$$x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s) \leqslant u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 + \Gamma^4\,.$$

Pertanto si ottiene in modo ovvio

$$\int_0^L \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\,ds \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \int_{E'} \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}\,ds + \\ + \int_{E''} \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}\,ds + \Gamma^2 m(E'')\,.$$

Ciò premesso, considerata una qualsiasi curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$ di K_0

$$\mathscr{C}_0^{(3)}: \qquad x = x_0(s)\,, \quad y = y_0(s)\,, \qquad z = z_0(s)\,, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0)\,,$$

per provare la continuità dell'integrale $\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ su $\mathscr{C}_0^{(3)}$ rileviamo che, per ogni curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$ di K_0 appartenente all'intorno $(\varrho)^3$ di $\mathscr{C}_0^{(3)}$, in virtù della (4) risulta per $\varrho \leqslant 1$

$$\int_0^L \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\,ds \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \int_0^L \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}\,ds + 2\Gamma^2 L_0\,,$$

e pertanto dalla (IV*) segue la disuguaglianza (IV) per

$$\Lambda' = \frac{\Lambda^*}{\sqrt{1-\lambda}} + 2\Gamma^2 L_0\,,$$

vale a dire è provata la continuità dell'integrale $\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ sulla curva $\mathscr{C}_0^{(3)}$.

7. - Teorema III.

Supponiamo che le funzioni $P_i(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ *soddisfino alle ipotesi del n.* **2**, *a) e che esistano finite e continue le derivate parziali del primo ordine delle funzioni* $P_j(...)$, $(j = 1, 2, 3)$ *rispetto a ciascuna delle variabili* $x, y, z, x', y', z', u_2, v_2, w_2$ *con*

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial P_1}{\partial v_2} = \frac{\partial P_2}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial w_2} = \frac{\partial P_3}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial w_2} = \frac{\partial P_3}{\partial v_2}.$$

Allora l'integrale $\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ *(n.* **5**) *è funzione continua sopra ogni curva ordinaria* $\mathscr{C}^{(3)}$, *avente lunghezza positiva e tale che tutti i suoi punti siano interni al campo A.*

a) Per provare l'asserto, considerata una qualsiasi curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$

$$\mathscr{C}^{(3)}_0: \qquad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0),$$

con $L_0 > 0$, completamente interna al campo A, sia ϱ_0 con $0 < \varrho_0 < 1$ un numero tale che tutti i punti (x, y, z), che distano di non più di ϱ_0 da almeno un punto di $\mathscr{C}^{(3)}_0$, siano interni ad A, e indichiamo con A_0 il campo (limitato) costituito da tali punti.

Sia

$$\mathscr{C}^{(3)}: \qquad x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = z(\sigma), \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant L),$$

(ove anche σ rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato) una qualunque curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$ appartenente all'intorno $(\varrho)^3$ di $\mathscr{C}^{(3)}_0$ con $\varrho < \varrho_0$.

Indicato con H il massimo della somma

$$|x_0''(s)| + |y_0''(s)| + |z_0''(s)|, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0),$$

sia M il massimo dei valori assoluti delle funzioni $P_i(...)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ in ogni punto (x, y, z) di A_0, per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per ogni terna (u_2, v_2, w_2) tale che sia

$$\text{(13)} \qquad |u_2| \leqslant H + 1, \qquad |v_2| \leqslant H + 1, \qquad |w_2| \leqslant H + 1,$$

e sia M' il massimo dei valori assoluti delle derivate parziali prime delle funzioni $P_j(...)$, $(j = 1, 2, 3)$ per ogni $(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$ ora indicato.

In virtù del teorema di integrazione per sostituzione abbiamo in modo ovvio

$$\text{(14)} \qquad \mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} - \mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}_0} = I_1 + I_2 + I_3,$$

avendo posto

$$I_1=\int_0^{L_0}\left[P_0(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_2(\sigma(s)),\,v_2(\sigma(s)),\,w_2(\sigma(s)))\,\sigma'(s)-\right.$$
$$\left.-P_0(x_0(s),\ldots,z_0'(s);\,u_{20}(s),\,v_{20}(s),\,w_{20}(s))\right]\mathrm{d}s\,,$$
$$I_2=\int_0^{L_0}\{[P_1(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_2(\sigma(s)),\,v_2(\sigma(s)),\,w_2(\sigma(s)))\,u_3(\sigma(s))+$$
$$+P_2(\ldots..)\,v_3(\sigma(s))+P_3(\ldots..)\,w_3(\sigma(s))]\,\sigma'(s)-$$
$$-[P_1(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_{20}(s),\,v_{20}(s),\,w_{20}(s))\,u_{30}(s)+$$
$$+P_2(\ldots..)\,v_{30}(s)+P_3(\ldots..)\,w_{30}(s)]\}\,\mathrm{d}s\,,$$
$$I_3=\int_0^{L_0}\{P_1(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_{20}(s),\,v_{20}(s),\,w_{20}(s))\,u_{30}(s)+$$
$$+P_2(\ldots..)\,v_{30}(s)+P_3(\ldots..)\,w_{30}(s)-$$
$$-[P_1(x_0(s),\ldots,z_0'(s);\,u_{20}(s)\,v_{20}(s),\,w_{20}(s))\,u_{30}(s)+$$
$$+P_2(\ldots..)\,v_{30}(s)+P_3(\ldots..)\,w_{30}(s)]\}\,\mathrm{d}s\,,$$

ove si sono indicate con $u_{20}(s),\ldots,w_{30}(s)$ le funzioni $u_2,\ldots,w_3$ relative alla curva $\mathscr{C}_0^{(3)}$.

b) Per la continuità delle funzioni $P_i(\ldots)$, $(i=0,1,2,3)$ e tenute presenti le (1), (2), (2'), preso $\varepsilon>0$ ad arbitrio, possiamo determinare un numero positivo $\varrho_1\leqslant\varrho$ in modo che, per ogni curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$ appartenente all'intorno $(\varrho_1)^3$ di $\mathscr{C}_0^{(3)}$, sia [13]

$$|I_1|\leqslant ML_0\varrho_1+L_0\varepsilon\,, \tag{15}$$

$$|I_3|\leqslant\varepsilon\int_0^{L_0}[\,|u_{30}(s)|+|v_{30}(s)|+|w_{30}(s)|\,]\,\mathrm{d}s\,. \tag{16}$$

c) Per maggiorare I_2 consideriamo, per ogni s di $(0, L_0)$ e per ogni terna (u_2, v_2, w_2) soddisfacente alle (13), la funzione

$$G(s;\,u_2,\,v_2,\,w_2)=\int_{u_{20}(s)}^{u_2}P_1(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_2,\,v_2,\,w_2)\,\mathrm{d}u_2+ \tag{17}$$
$$+\int_{v_{20}(s)}^{v_2}P_2(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_{20}(s),\,v_2,\,w_2)\,\mathrm{d}v_2+$$
$$+\int_{w_{20}(s)}^{w_2}P_3(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_{20}(s),\,v_{20}(s),\,w_2)\,\mathrm{d}w_2\,,$$

---

[13] Dalle (2) e (2') seguono, con elementare artificio, la disuguaglianza

$$|u_2(\sigma(s))-u_{20}(s)|\leqslant(2+H)\,\varrho_1\,,\qquad(0\leqslant s\leqslant L_0)\,,$$

e le due analoghe.

la quale, in corrispondenza a ogni terna (u_2, v_2, w_2), è funzione assolutamente continua della sola s [14], e pertanto per quasi tutti gli s di $(0, L_0)$ esiste finita la derivata parziale [15]

([14]) L'affermazione fatta nel testo è ovvia. Siano (a_k, b_k) $(k = 1, \ldots, m)$ un numero finito qualunque di intervalli, che appartengono a $(0, L_0)$ e che non si sovrappongono; e per fissare le idee consideriamo l'ultimo termine, che figura al secondo membro della (17), perchè per i primi due l'asserto segue in modo anche più rapido. Essendo

$$\sum = \sum_{k=1}^{m} \Big[\int_{w_{20}(b_k)}^{w_2} P_3(x(\sigma(b_k)), \ldots, z'(\sigma(b_k)); u_{20}(b_k), v_{20}(b_k), w_2)\, dw_2 -$$
$$- \int_{w_{20}(a_k)}^{w_2} P_3(x(\sigma(a_k)), \ldots, z'(\sigma(a_k)); \; u_{20}(a_k), v_{20}(a_k), w_2)\, dw_2 \Big] =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{w_{20}(b_k)}^{w_{20}(a_k)} P_3(x(\sigma(b_k)), \ldots, z'(\sigma(b_k)); u_{20}(b_k), v_{20}(b_k), w_2)\, dw_2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{w_{20}(a_k)}^{w_2} \{P_3(x(\sigma(b_k)), \ldots, z'(\sigma(b_k)); u_{20}(b_k), v_{20}(b_k), w_2) -$$
$$- P\,(x(\sigma(a_k)), \ldots, z'(\sigma(a_k)); u_{20}(a_k), v_{20}(a_k), w_2)\}\, dw_2 ,$$

risulta

$$|\sum| \leq M \sum_{k=1}^{m} |w_{20}(b_k) - w_{20}(a_k)| +$$
$$+ 2(H+1) M' \sum_{k=1}^{m} \big[|x(\sigma(b_k)) - x(\sigma(a_k))| + \ldots + |z'(\sigma(b_k)) - z'(\sigma(a_k))| +$$
$$+ |u_{20}(b_k) - u_{20}(a_k)| + |v_{20}(b_k) - v_{20}(a_k)| \big] ,$$

e, in virtù dell'assoluta continuità delle funzioni $x(\sigma)$, $y(\sigma)$, $z(\sigma)$, $x'(\sigma)$, $y'(\sigma)$, $z'(\sigma)$, $u_{20}(s)$, $v_{20}(s)$, $w_{20}(s)$ e della (1), l'asserto è evidente.

([15]) Quanto abbiamo asserito nel testo è immediato. Per fissare le idee facciamo ancora riferimento all'ultimo termine, che figura al secondo membro della (17), tenendo presente che, analogamente a quanto è stato visto in ([14]), per ogni w_2 fissato $P_3(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_2)$ è funzione assolutamente continua di s. Quindi per α, β, γ costanti abbiamo

$$\int_\alpha^\beta P_3(\ldots..)\, dw_2 = \int_\alpha^\beta \Big[P_3(x(\sigma(\gamma)), \ldots, z'(\sigma(\gamma)); u_{20}(\gamma), v_{20}(\gamma), w_2) +$$
$$+ \int_\gamma^s \frac{dP_3(x(\sigma(t)), \ldots, z'(\sigma(t)); u_{20}(t), v_{20}(t), w_2)}{dt}\, dt \Big] dw_2,$$

ed essendo per quasi tutti i t (in virtù dell'esistenza e continuità delle derivate parziali del primo ordine di $P_3(\ldots..)$)

$$\frac{dP_3(\ldots..)}{dt} = \left[\frac{\partial P_3}{\partial x} x'(\sigma(t)) + \ldots + \frac{\partial P_3}{\partial z'} z''(\sigma(t)) \right] \sigma'(t) + \frac{\partial P_3}{\partial u_2} u_{30}(t) + \frac{\partial P_3}{\partial v_2} v_{30}(t) ,$$

$$\frac{\partial G(s;u_2,v_2,w_2)}{\partial s}=\int\limits_{u_{20}(s)}^{u_2}\left[\frac{\partial P_1}{\partial x}x'(\sigma(s))+\ldots+\frac{\partial P_1}{\partial z'}z''(\sigma(s))\right]\sigma'(s)\,\mathrm{d}u_2+$$
$$+\int\limits_{v_{20}(s)}^{v_2}\left\{\left[\frac{\partial P_2}{\partial x}x'(\sigma(s))+\ldots+\frac{\partial P_2}{\partial z'}z''(\sigma(s))\right]\sigma'(s)+\frac{\partial P_2}{\partial u_2}u_{30}(s)\right\}\mathrm{d}v_2+$$
$$+\int\limits_{w_{20}(s)}^{w_2}\left\{\left[\frac{\partial P_3}{\partial x}x'(\sigma(s))+\ldots+\frac{\partial P_3}{\partial z'}z''(\sigma(s))\right]\sigma'(s)+\frac{\partial P_3}{\partial u_2}u_{30}(s)+\frac{\partial P_3}{\partial v_2}v_{30}(s)\right\}\mathrm{d}w_2-$$
$$-P_1(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_{20}(s),v_2,w_2)\,u_{30}(s)-$$
$$-P_2(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_{20}(s),v_{20}(s),w_2)\,v_{30}(s)-$$
$$-P_3(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_{20}(s),v_{20}(s),w_{20}(s))\,w_{30}(s)\,.$$

è evidente che esiste finito anche l'integrale

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}w_2\int\limits_{\gamma}^{s}\left|\frac{\mathrm{d}P_3(\ldots..)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t\,.$$

Pertanto per il teorema di FUBINI-TONELLI risulta

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}P_3(\ldots..)\,\mathrm{d}w_2=\int\limits_{\alpha}^{\beta}P_3(x(\sigma(\gamma)),\ldots,z'(\sigma(\gamma));\,u_{20}(\gamma),v_{20}(\gamma),w_2)\,\mathrm{d}w_2+$$
$$+\int\limits_{\gamma}^{s}\mathrm{d}t\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}P_3(x(\sigma(t)),\ldots,z'(\sigma(t));\,u_{20}(t),v_{20}(t),w_2)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}w_2\,,$$

e per quasi tutti gli s esiste finita la

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int\limits_{\alpha}^{\beta}P_3(\ldots..)\,\mathrm{d}w_2=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}P_3(\ldots..)}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}w_2\,.$$

Ciò premesso, posto $\omega=w_{20}(s)$, e considerata la funzione

$$\Phi(s,\omega,w_2)=\int\limits_{\omega}^{w_2}P_3(\ldots..)\,\mathrm{d}w_2\,,$$

siccome la derivata parziale

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}=-P_3(\ldots..)$$

esiste finita e continua per tutti gli ω, per quasi tutti gli s $\Phi(s,\omega,w_2)$, considerata come funzione di (s,ω), è differenziabile e risulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int\limits_{w_{20}(s)}^{w_2}P_3(\ldots..)\,\mathrm{d}w_2=$$
$$=\int\limits_{w_{20}(s)}^{w_2}\left[\left\{\frac{\partial P_3}{\partial x}x'(\sigma(s))+\ldots+\frac{\partial P_3}{\partial z'}z''(\sigma(s))\right\}\sigma'(s)+\frac{\partial P_3}{\partial u_2}u_{30}(s)+\frac{\partial P_3}{\partial v_2}v_{30}(s)\right]\mathrm{d}w_2-$$
$$-P_3(x(\sigma(s)),\ldots,z'(\sigma(s));\,u_{20}(s),v_{20}(s),w_{20}(s))\,w_{30}(s)\,.$$

Tenuto presente che, usufruendo delle (V) e procedendo in modo del tutto elementare, abbiamo

$$\int_{v_{20}(s)}^{v_2} \frac{\partial P_2(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_2, w_2)}{\partial u_2} \mathrm{d}v_2 =$$
$$= P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_2, w_2) -$$
$$- P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_2) ;$$

$$\int_{w_{20}(s)}^{w_2} \frac{\partial P_3(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_2)}{\partial u_2} \mathrm{d}w_2 =$$
$$= P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_2) -$$
$$- P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_{20}(s)) ,$$

$$\int_{w_{20}(s)}^{w_2} \frac{\partial P_3(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_2)}{\partial v_2} \mathrm{d}w_2 =$$
$$= P_2(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_2) -$$
$$- P_2(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_{20}(s)) ,$$

a riduzioni fatte risulta per quasi tutti gli s di $(0, L_0)$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial G(s; u_2, v_2, w_2)}{\partial s} = & \int_{u_{20}(s)}^{u_2} \left[\frac{\partial P_1}{\partial x} x'(\sigma(s)) + \dots + \frac{\partial P_1}{\partial z'} z''(\sigma(s))\right] \sigma'(s)\, \mathrm{d}u_2 + \\ & + \int_{v_{20}(s)}^{v_2} \left[\frac{\partial P_2}{\partial x} x'(\sigma(s)) + \dots + \frac{\partial P_2}{\partial z'} z''(\sigma(s))\right] \sigma'(s)\, \mathrm{d}v_2 + \\ & + \int_{w_{20}(s)}^{w_2} \left[\frac{\partial P_3}{\partial x} x'(\sigma(s)) + \dots + \frac{\partial P_3}{\partial z'} z''(\sigma(s))\right] \sigma'(s)\, \mathrm{d}w_2 - \\ & - [P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_{20}(s))\, u_{30}(s) + \\ & + P_2(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_{20}(s))\, v_{30}(s) + \\ & + P_3(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s)); u_{20}(s), v_{20}(s), w_{20}(s))\, w_{30}(s)] . \end{aligned} \right.$$

d) In virtù della continuità delle derivate parziali prime delle funzioni $P_j(...)$, $(j=1,2,3)$ esistono finite e continue le derivate parziali $\partial G/\partial u_2$, $\partial G/\partial v_2$, $\partial G/\partial w_2$, e quindi per quasi tutti gli s di $(0, L_0)$ $G(s;\, u_2, v_2, w_2)$ è funzione differenziabile, e risulta

$$\mathrm{d}G(s;\, u_2, v_2, w_2) = \frac{\partial G(s;\, u_2, v_2, w_2)}{\partial s}\,\mathrm{d}s + P_1\big(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_2, v_2, w_2\big)\,\mathrm{d}u_2 +$$

$$+ \Bigg[\int_{u_{20}(s)}^{u_2} \frac{\partial P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_2, v_2, w_2)}{\partial v_2}\,\mathrm{d}u_2 + P_2\big(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_{20}(s), v_2, w_2\big)\Bigg]\,\mathrm{d}v_2 +$$

$$+ \Bigg[\int_{u_{20}(s)}^{u_2} \frac{\partial P_1(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_2, v_2, w_2)}{\partial w_2}\,\mathrm{d}u_2 + \int_{v_{20}(s)}^{v_2} \frac{\partial P_2(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_{20}(s), v_2, w_2)}{\partial w_2}\,\mathrm{d}v_2 + P_3\big(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_{20}(s), v_{20}(s), w_2\big)\Bigg]\,\mathrm{d}w_2\,.$$

Usufruendo ancora delle (V) e procedendo in modo analogo a *c*), a riduzioni fatte, si ottiene

$$\text{(19)}\qquad \mathrm{d}G(s;\, u_2, v_2, w_2) = \frac{\partial G(s;\, u_2, v_2, w_2)}{\partial s}\,\mathrm{d}s + P_1\big(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_2, v_2, w_2\big)\,\mathrm{d}u_2 + P_2\big(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_2, v_2, w_2\big)\,\mathrm{d}v_2 + P_3\big(x(\sigma(s)), \dots, z'(\sigma(s));\, u_2, v_2, w_2\big)\,\mathrm{d}w_2\,.$$

e) Riprendiamo l'espressione di I_2, considerando nello spazio (s, u_2, v_2, w_2) le curve

$$\chi_0\colon\qquad u_2 = u_{20}(s)\qquad v_2 = v_{20}(s)\,,\qquad w_2 = w_{20}(s)\,,\qquad (0 \leq s \leq L_0)\,,$$

$$\chi\colon\qquad u_2 = u_2(\sigma(s))\,,\quad v_2 = v_2(\sigma(s))\,,\quad w_2 = w_2(\sigma(s))\,,\qquad (0 \leq s \leq L_0)\,,$$

corrispondenti a $\mathscr{C}_0^{(2)}$ e a $\mathscr{C}^{(2)}$, e usufruendo della (19); abbiamo

$$I_2 = \int_\chi \mathrm{d}G(s;\, u_2, v_2, w_2) - \int_{\chi_0} \mathrm{d}G(s;\, u_2, v_2, w_2) - \int_\chi \frac{\partial G(s;\, u_2, v_2, w_2)}{\partial s}\,\mathrm{d}s + \int_{\chi_0} \frac{\partial G(s;\, u_2, v_2, w_2)}{\partial s}\,\mathrm{d}s\,.$$

Tenuta presente la (17), si ottiene in modo elementare

$$\int_{\chi_0} \mathrm{d}G(s;\, u_2,\, v_2,\, w_2) = 0\,,$$

$$\int_{\chi} \mathrm{d}G(s;\, u_2,\, v_2,\, w_2) = \int_{u_{20}(L_0)}^{u_2(\sigma(L_0))} P_1\big(x(\sigma(L_0)),\, \dots,\, z'(\sigma(L_0));\, u_2,\, v_2(\sigma(L_0)),\, w_2(\sigma(L_0))\big)\, \mathrm{d}u_2 +$$

$$+ \int_{v_{20}(L_0)}^{v_2(\sigma(L_0))} P_2\big(x(\sigma(L_0)),\, \dots,\, z'(\sigma(L_0));\, u_{20}(L_0),\, v_2,\, w_2(\sigma(L_0))\big)\, \mathrm{d}v_2 +$$

$$+ \int_{w_{20}(L_0)}^{w_2(\sigma(L_0))} P_3\big(x(\sigma(L_0)),\, \dots,\, z'(\sigma(L_0));\, u_{20}(L_0),\, v_{20}(L_0),\, w_2\big)\, \mathrm{d}w_2 -$$

$$- \int_{u_{20}(0)}^{u_2(\sigma(0))} P_1\big(x(\sigma(0)),\, \dots,\, z'(\sigma(0));\, u_2,\, v_2(\sigma(0)),\, w_2(\sigma(0))\big)\, \mathrm{d}u_2 -$$

$$- \int_{v_{20}(0)}^{v_2(\sigma(0))} P_2\big(x(\sigma(0)),\, \dots,\, z'(\sigma(0));\, u_{20}(0),\, v_2,\, w_2(\sigma(0))\big)\, \mathrm{d}v_2 -$$

$$- \int_{w_{20}(0)}^{w_2(\sigma(0))} P_3\big(x(\sigma(0)),\, \dots,\, z'(\sigma(0));\, u_{20}(0),\, v_{20}(0),\, w_2\big)\, \mathrm{d}w_2\,.$$

D'altra parte posto

$$T_0 = -\int_0^{L_0} \big[P_1\big(x(\sigma(s)),\, \dots,\, z'(\sigma(s));\, u_{20}(s),\, v_{20}(s),\, w_{20}(s)\big)\, u_{30}(s) +$$
$$+ P_2(\dots\dots)\, v_{30}(s) + P_3(\dots\dots)\, w_{30}(s)\big]\, \mathrm{d}s\,,$$

dalla (18) si deduce

$$\int_{\chi_0} \frac{\partial G(s;\, u_2,\, v_2,\, w_2)}{\partial s}\, \mathrm{d}s = T_0\,,$$

$$\int_{\chi} \frac{\partial G(s;\, u_2,\, v_2,\, w_2)}{\partial s}\, \mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{L_0} \mathrm{d}s \int_{u_{20}(s)}^{u_2(\sigma(s))} \Big[\frac{\partial P_1\big(x(\sigma(s)),\, \dots,\, z'(\sigma(s));\, u_2,\, v_2(\sigma(s)),\, w_2(\sigma(s))\big)}{\partial x}\, x'\big(\sigma(s)\big) + \dots\dots +$$
$$+ \frac{\partial P_1(\dots\dots)}{\partial z'}\, z''\big(\sigma(s)\big)\Big]\, \sigma'(s)\, \mathrm{d}u_2 +$$

$$+ \int_0^{L_0} \mathrm{d}s \int_{v_{20}(s)}^{v_2(\sigma(s))} \Big[\frac{\partial P_2\big(x(\sigma(s)),\, \dots,\, z'(\sigma(s));\, u_{20}(s),\, v_{20},\, w_2(\sigma(s))\big)}{\partial x}\, x'\big(\sigma(s)\big) + \dots\dots +$$
$$+ \frac{\partial P_2(\dots\dots)}{\partial z'}\, z''\big(\sigma(s)\big)\Big]\, \sigma'(s)\, \mathrm{d}v_2 +$$

$$+\int_0^{L_0} \mathrm{d}s \int_{w_{20}(s)}^{w_2(\sigma(s))} \left[\frac{\partial P_3(x(\sigma(s)), \ldots, z'(\sigma(s));\ u_{20}(s), v_{20}(s), w_2)}{\partial x} x'(\sigma(s)) + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial P_3(\ldots\ldots)}{\partial z'} z''(\sigma(s))\right] \sigma'(s)\, \mathrm{d}w_2 + T_0\,.$$

Pertanto, in virtù delle (1), (2), (2′) [16], a riduzioni fatte, risulta

$$(20) \qquad |I_2| < 6(2+H)\,[M + (6+H)L_0 M']_{\varrho_1}\,,$$

e dalla (14), tenute presenti le (15), (16), (20), l'asserto segue in modo ovvio.

8. - Esempio.

Sia

$$A \equiv [-2 \leqslant x \leqslant 2, \qquad -2 \leqslant y \leqslant 2, \qquad -4\pi \leqslant z \leqslant 4\pi]$$

e consideriamo la successione di eliche circolari

$$\mathscr{C}_n^{(3)}: \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{n^{5/3}} \operatorname{sen}(n^{5/3} a_n s)\,, \\[2mm] y = \dfrac{1}{n^{5/3}} \cos(n^{5/3} a_n s)\,, \\[2mm] z = b_n s\,, \qquad\qquad (0 \leqslant s \leqslant 2\pi)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,, \end{cases}$$

ove

$$a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}\,, \qquad b_n = \cos\frac{1}{n}\,,$$

e la funzione

$$F(x, y, z;\ x', y', z';\ u_2, v_2, w_2;\ u_3, v_3, w_3) \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,(-w_2 v_3 + v_2 w_3)\,.$$

Risulta

$$\begin{cases} x' = a_n \cos(n^{5/3} a_n s) \\ y' = -a_n \operatorname{sen}(n^{5/3} a_n s) \\ z' = b_n\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x''' = -n^{10/3} a_n^3 \cos(n^{5/3} a_n s) \\ y''' = n^{10/3} a_n^3 \operatorname{sen}(n^{5/3} a_n s) \\ z''' = 0\,, \end{cases}$$

---

(16) Cfr. (13).

$$\begin{cases} u_2 = -n^{5/3} a_n^3 \\ v_2 = n^{5/3} a_n^2 b_n \cos (n^{5/3} a_n s) \\ w_2 = -n^{5/3} a_n^2 b_n \operatorname{sen} (n^{5/3} a_n s), \end{cases} \qquad \begin{cases} u_3 = 0\,, \\ v_3 = -n^{10/3} a_n^3 b_n \operatorname{sen} (n^{5/3} a_n s) \\ w_3 = -n^{10/3} a_n^3 b_n \cos (n^{5/3} a_n s)\,. \end{cases}$$

È evidente che ogni curva $\mathscr{C}_n^{(3)}$ è una curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$, e che, per n sufficientemente grande, le curve $\mathscr{C}_n^{(3)}$ appartengono all'intorno $(\varrho)^3$ della curva

$$\mathscr{C}_0^{(3)}: \qquad x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = s\,, \qquad (0 \leqslant s \leqslant 2\pi)\,,$$

per la quale è

$$\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}_0^{(3)}} = 0\,.$$

D'altra parte abbiamo

$$\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}_n^{(3)}} = -\int_0^{2\pi} n^5 a_n^5 b_n^2 \, ds = -2\pi n^5 \operatorname{sen}^5 \frac{1}{n} \cos^2 \frac{1}{n}\,,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}_n^{(3)}} = -2\pi\,,$$

e quindi l'integrale $\mathscr{I}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ non è continuo sulla curva ordinaria $\mathscr{C}_0^{(3)}$. Ciò dipende dal fatto che non sono verificate nè le condizioni (V) del teorema del n. **7** nè la disuguaglianza (IV) del teorema del n. **5** essendo

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s)} \, ds = 2\pi \, n^{10/3} \operatorname{sen}^3 \frac{1}{n}\,.$$

Résumé

Il est question des intégrales du Calcul des variations déjà étudiés par l'A., portant sur des courbes de l'espace données en forme paramétrique, et qui dépendent des dérivées des deux ou des trois premiers ordres. L'A. établit des théorèmes de continuité; et leurs conditions de validité sont éclairées par quelques exemples.

* * *