Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 133-137

MARCELLO CICCHESE (*)

Distanze generalizzate uniformemente continue. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

Introduzione.

Negli ordinari spazi metrici la distanza risulta essere una funzione uniformemente continua. In questo lavoro prendiamo in considerazione una classe molto ampia di spazi metrici generalizzati e tra questi caratterizziamo quelli che sono a distanza uniformemente continua. È interessante osservare che la condizione esprimente tale caratterizzazione «rassomiglia» in un certo senso all'assioma triangolare, pur non coincidendo con esso.

1. – Sia E un insieme. Chiameremo *distanza* su E un'applicazione $d: E\times E \to \mathbb{R}_+$ tale che

(d_1) $\quad \forall x \in E, \quad d(x,x) = 0,$

(d_2) $\quad \forall x\in E, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall y \in \sigma(x,\eta), \ \exists \xi > 0: \ \sigma(y,\xi) \subset \sigma(x,\varepsilon),$

dove $\sigma(x,\varepsilon) = \{y \in E \mid d(x,y) < \varepsilon\}$.

Chiameremo *spazio H* un insieme E con una distanza d.

La distanza d induce in E una topologia in cui i dischi $\sigma(x,\varepsilon)$ costituiscono, per ogni x, un sistema fondamentale di intorni. Si dimostra anzi (cfr. [4], pp. 98-100) che gli assiomi (d_1), (d_2) rappresentano le condizioni minime cui deve soddisfare una funzione $d: E\times E \to \mathbb{R}_+$ per definire una topologia che sia compatibile con la distanza d, cioè tale che la chiusura di un qualsiasi sotto-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università 43100 Parma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. . — Ricevuto il 19-IX-1975.

insieme di E sia costituita dai punti che hanno distanza nulla dal detto sottoinsieme.

Denoteremo con H_σ uno spazio H che abbia distanza simmetrica, soddisfacente cioè alla condizione

$$(\sigma) \qquad d(x, y) = d(y, x)$$

per ogni $x, y \in E$.

Contrariamente a quanto accade negli ordinari spazi metrici, in cui la distanza è una funzione uniformemente continua, in uno spazio H la distanza è una funzione che in generale non è neppure continua. Ci proponiamo di dare una condizione necessaria e sufficiente affinchè la distanza d di uno spazio H_σ sia *uniformemente continua*, cioè tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un $\delta > 0$ per cui si abbia

$$d(x, x') < \delta\,, \quad d(y, y') < \delta \;\Rightarrow\; |d(x', y') - d(x, y)| < \varepsilon\,,$$

per ogni $x, x', y, y' \in E$.

2. – Teorema. *La distanza d di uno spazio H_σ è uniformemente continua se e solo se esiste un sottoinsieme A di $\mathbb{R}_+$ contenente un intervallo $[0, a[$ $(a > 0)$ e una funzione $\varphi\colon A \to \mathbb{R}_+$ infinitesima nello zero, tale che per ogni x, y, z di E si abbia*

$$(1) \qquad d(x, z) \leqslant \varphi[d(x, y)] + d(y, z)$$

ogni volta che $d(x, y) \in A$.

Dimostrazione. Non è difficile verificare, sfruttando anche la simmetria di d, che la condizione per d di essere uniformemente continua può essere espressa nel seguente modo: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$(2) \qquad d(x, y) < \delta \Rightarrow d(x, z) - d(y, z) < \varepsilon\,,$$

per ogni $x, y, z \in E$.

Supponiamo dunque che esista una funzione φ soddisfacente a tutte le ipotesi del teorema. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste allora un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \varphi[d(x, y)] < \varepsilon\,.$$

Dalla (1) segue:

$$d(x, z) - d(y, z) \leqslant \varphi[d(x, y)] < \varepsilon .$$

Vale quindi la (2) e pertanto la d è uniformemente continua.

Supponiamo ora che la distanza d di E sia uniformemente continua. In corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo l'insieme

$$B_\varepsilon = \{\delta > 0 \,|\, \text{vale la (2)}\} .$$

L'ipotesi di uniforme continuità della d può allora essere espressa nel seguente modo:

(3) $$\forall \varepsilon > 0 , \qquad B\varepsilon \neq \emptyset .$$

È chiaro che

(4) $$\delta \in B_\varepsilon \Rightarrow]0, \delta[\subset B_\varepsilon .$$

Sia C il sottoinsieme di $\mathbb{R}_+$ così definito:

$$C = \{\delta \in \mathbb{R}_+ \,|\, \delta = 0 \text{ vel } \delta \in B_\varepsilon \text{ per qualche } \varepsilon > 0\} .$$

Dalle (3), (4) si deduce che C possiede qualche elemento non nullo ed inoltre che

$$\delta \in C \Rightarrow [0, \delta] \subset C .$$

C è dunque un intervallo. Sia A l'insieme ottenuto da C privandolo del suo eventuale massimo. Per quanto detto sopra A è un intervallo del tipo $[0, a[$ (potendo anche essere $a = +\infty$) e soddisfa pertanto alle condizioni richieste dal teorema.

Per ogni $d \in A$ consideriamo l'insieme

(5) $$F(d) = \{\varepsilon > 0 \,|\, \exists \delta > d \text{ tale che } \delta \in B\varepsilon\} .$$

Sia inoltre $\varphi : A \to \mathbb{R}_+$ la funzione così definita: per ogni $d \in A$

(6) $$\varphi(d) = \inf F(d) .$$

Si verifica subito che $F(d) \neq \emptyset$ per ogni $d \in A$, e ciò garantisce che la funzione φ è ben definita. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo un $\delta \in B_\varepsilon$, certamente esistente in virtù della (3). Dalle definizioni (5), (6) segue

$$d < \delta \Rightarrow \varepsilon \in F(d) \Rightarrow \varphi(d) \leqslant \varepsilon .$$

Ciò dimostra che la φ è infinitesima nello zero.

Siano ora x, y, z punti qualsiasi di E tali che $d(x, y) = d \in A$; e sia ε un qualsiasi elemento di $F(d)$. Dalla (5) discende che esiste un $\delta > d(x, y)$ tale che $\delta \in B_\varepsilon$. Ma se $\delta \in B_\varepsilon$ vale la (2), e quindi:

$$d(x, z) - d(y, z) < \varepsilon . \tag{7}$$

Poichè la (7) vale per ogni $\varepsilon \in F(d)$, si ha che

$$d(x, z) - d(y, z) \leqslant \inf F(d) = \varphi[d(x, y)] ,$$

come dovevasi dimostrare.

Osservazione. La nozione di uniforme continuità usata in questo lavoro coincide con quella che vale negli ordinari spazi metrici. In questi ultimi però la metrica individua anche una struttura uniforme, ed è rispetto a questa che la distanza risulta essere uniformemente continua. Diversa è la situazione negli spazi H_σ che in generale non sono uniformizzabili. Da precedenti risultati ([4], nn. 7, 8) si ricava che se la distanza d di uno spazio H_σ è uniformemente continua nel senso elementare sopra indicato, la topologia di H_σ è uniformizzabile e la distanza d risulta essere uniformemente continua anche rispetto alla struttura uniforme individuata. La proprietà non si inverte, nel senso che uno spazio H_σ può essere uniformizzabile senza che la sua distanza sia uniformemente continua.

Bibliografia.

[1] A. Appert et Ky-Fan, *Espaces Topologiques Intermédiaires*, Hermann, Paris 1951.

[2] V. Checcucci, A. Tognoli e E. Vesentini, *Lezioni di Topologia Generale*, Feltrinelli, Milano 1968.

[3] S. Ciampa, *Distanze non necessariamente triangolari*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **2** (1963), 125-137.

[4] M. Cicchese e R. Valentini, *Su vari tipi di distanze generalizzate,* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 97-117.

[5] J. L. Kelley, *General Topology,* Van Nostrand, Princeton 1955.

[6] W. J. Pervin, *Foundations of General Topology,* Academic Press, New York 1964.

Summary

Necessary and sufficient conditions for the uniform continuity of the distance in a generalized metric space are established.

* * *