Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974) 13-20

ALDO ASCARI (*)

Risoluzione di un problema al contorno per una classe di equazioni alle differenze finite in due variabili. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno.

1. – Alcuni problemi di teoria della probabilità possono notoriamente essere risolti come problemi al contorno, in genere abbastanza semplici, per equazioni alle differenze finite in due variabili indipendenti intere. Classici esempi, ed eleganti metodi di risoluzione, sono ascritti a LAPLACE e a LAGRANGE (cfr. per esempio [1]): in tali esempi, la particolare semplicità delle condizioni al contorno sembra essere la condizione principale per il conseguimento di una soluzione esatta e compatta, che infatti vien meno non appena per i dati sul contorno si ammetta una qualche maggiore generalità. Ci si trova allora di fronte a problemi del tipo di quelli ottenuti come approssimazioni discrete di problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali, e la sola risoluzione che praticamente ci si può proporre è quella numerica. A tale riguardo, è noto che in generale si verifica l'una o l'altra di due circostanze: se l'operatore alle differenze finite dà luogo (in relazione alle condizioni al contorno assegnate) ad uno schema del tipo detto esplicito, la soluzione può essere semplicemente tabulata in modo ricorrente, a partire dai valori al contorno; altrimenti (schema implicito) si ha un sistema di equazioni algebriche lineari, da risolvere con idoneo algoritmo.

Questa Nota si propone di indicare (principalmente mediante la trattazione di un esempio semplice ma significativo) la possibilità di un approccio differente ai problemi menzionati. Riprendendo un metodo usato da LAGRANGE per i problemi di probabilità, e successivamente semplificato da BOOLE [2], si

(*) Indirizzo: Via dei Martinitt, 7, 20146 Milano, Italia.
(**) Ricevuto: 7-VI-1973.

perviene ad una soluzione espressa come combinazione lineare di funzioni appartenenti ad un certo sistema fondamentale, legato all'equazione proposta. La dipendenza della soluzione dalle condizioni al contorno è confinata nei coefficienti della combinazione lineare, per determinare i quali bisogna egualmente risolvere un sistema algebrico lineare, ma di ordine assai minore di quello che si presenta nel trattamento tradizionale di uno schema implicito. D'altra parte l'espressione analitica delle funzioni fondamentali può fornire informazioni su proprietà della soluzione (per esempio asintotiche) valide per condizioni al contorno comunque assegnate, almeno entro certi limiti. La difficoltà maggiore sembra proprio quella di costruire esplicitamente, per una data equazione, un idoneo sistema fondamentale di funzioni, malgrado la notevole arbitrarietà di cui si dispone.

2. – Lo studio sarà sviluppato prevalentemente, come si è detto, su un semplice esempio: quello dell'equazione lineare ed omogenea del primo ordine

$$u(j,k) = au(j-1,k) + bu(j,k-1)\,, \tag{1}$$

dove j, k sono variabili intere non negative, ed a, b sono costanti reali non nulle. La soluzione $u(j,k)$ della (1) sia da determinare in ogni punto (nodo) del rettangolo reticolare

$$1 \leqslant j \leqslant J\,, \qquad 1 \leqslant k \leqslant K \tag{2}$$

mediante le condizioni al contorno

$$u(j,0) = l_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant J)\,, \tag{3}$$

$$u(0,k) = m_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant K)\,, \tag{4}$$

dove le successioni finite $\{l_j\}$, $\{m_k\}$ ad elementi reali sono assegnate ad arbitrio (escludiamo solo il caso banale in cui siano entrambe ad elementi tutti nulli). L'assegnazione del valore di $u(0,0)$ è, in questo caso, irrilevante.

Con le condizioni (3) e (4), la (1) costituisce evidentemente uno schema esplicito, che permette di costruire $u(j,k)$ per ricorrenza in tutto il dominio discreto (2), ed è quindi altrettanto evidente che il problema al contorno proposto ha una e una sola soluzione.

Seguendo BOOLE [2], cerchiamo per la (1) una soluzione generale della forma

$$u(j,k) = \int_{-\infty}^{+\infty} [v_1(x)]^j\,[v_2(x)]^k\,w(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{5}$$

con v_1, v_2, w funzioni da precisare della variabile reale x. Sostituendo la (5) nella (1) si ha, formalmente, la relazione

$$1 = \frac{a}{v_1(x)} + \frac{b}{v_2(x)} \tag{6}$$

che è verificata prendendo, ad esempio,

$$v_1(x) = ax\,, \qquad v_2(x) = b\,\frac{x}{x-1}\,; \tag{7}$$

in tal modo la (5) diviene

$$u(j, k) = a^j b^k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{j+k}}{(x-1)^k}\, w(x)\, \mathrm{d}x\,, \tag{8}$$

e rimane da precisare la funzione-nucleo $w(x)$. Questa deve essere tale che l'integrale improprio (8) esista per tutti i valori interessati di j e k (ciò ne vincola, in particolare, il comportamento per $x = 1$ e per $x \to \pm\infty$); per il resto è arbitraria.

Posto

$$\frac{l_j}{a^j} = \lambda_j\,, \quad \frac{m_k}{b^k} = \mu_k\,, \tag{9}$$

imponendo alla (8) le condizioni (3) e (4) si ottiene

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^j w(x)\, \mathrm{d}x = \lambda_j\,, \tag{10}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^k w(x)\, \mathrm{d}x = \mu_k\,. \tag{11}$$

La seconda di queste relazioni assume forma analoga alla prima con il cambiamento di variabili

$$y = \frac{x}{x-1}\,, \qquad z(y) = \frac{1}{(y-1)^2}\, w\left(\frac{y}{y-1}\right)\;; \tag{12}$$

essa diviene infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^k z(y)\,\mathrm{d}y = \mu_k \tag{13}$$

ed è facile verificare che, nelle ipotesi in cui si può correttamente definire l'integrale improprio (8) come limite, è lecito applicare le (12) alla (11) ed ha quindi senso anche la (13).

Il tentativo di esprimere nella forma (8) la soluzione del problema al contorno (1), (3), (4) conduce pertanto a cercare due funzioni $w(x)$, $z(y)$ legate dalla trasformazione (12) e obbedienti rispettivamente alle successioni (10) e (13) di equazioni: ossia due funzioni di cui sono assegnati ad arbitrio i momenti su $(-\infty, +\infty)$, fino agli ordini rispettivi J e K inclusi. La (10) costituisce il cosiddetto « problema dei momenti di HAMBURGER » per $w(x)$, e altrettanto la (13) per $z(y)$; più propriamente, questa locuzione si riferisce al caso in cui le successioni $\{\lambda_j\}$, $\{\mu_k\}$ sono infinite, ma il caso presente vi è ovviamente incluso, potendosi pensare $\{\lambda_j\}$, $\{\mu_k\}$ comunque assegnate per $j > J$, $k > K$.

La teoria del problema dei momenti garantisce, per una successione infinita arbitraria $\{\lambda_j\}$ $(j = 0, 1, \dots, \infty)$, l'esistenza di infinite soluzioni $w(x)$, che sono però, in generale, distribuzioni, cioè derivate distribuzionali di funzioni a variazione limitata (cfr. per esempio [**3**], [**4**]); ma PÓLYA [**5**] ha mostrato come costruire un'infinità di soluzioni che sono trascendenti intere. Nel caso in esame, essendo in effetti assegnata soltanto una sottosuccessione finita della successione $\{\lambda_j\}$, l'indeterminazione della soluzione è ancora maggiore. Ciò, beninteso, per ciascuno dei due problemi (10) e (13), presi separatamente; se viceversa si considera l'insieme dei due problemi, assunta per evidente l'unicità della soluzione del problema al contorno (1), (3), (4) cui esso equivale, rimane provata la seguente proposizione:

Fra le infinite soluzioni del problema di HAMBURGER *(10) ve n'è una e una sola che, mediante la trasformazione (12), si muta in una soluzione di un secondo problema di* HAMBURGER*, distinto dal primo. Poichè l'inversa della (12) è la stessa trasformazione, la corrispondenza fra le due soluzioni è biunivoca per ogni scelta delle due successioni* $\{\lambda_j\}$, $\{\mu_k\}$.

3. – Nel cercare una espressione analitica esplicita per la soluzione (8) è preferibile riferirsi alle condizioni (10) e (11) per $w(x)$, trascurando la trasformazione (12) e la conseguente condizione (13).

Sia $N > 1$ un intero positivo, e sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ una successione di numeri reali e positivi distinti, che possiamo senza restrizione di generalità supporre in ordine crescente: $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$.

Assumiamo per $w(x)$ l'espressione:

$$w(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N} C_n \exp(\alpha_n x) , & x < 0 \\ 0 , & x \geqslant 0 , \end{cases} \tag{14}$$

(ciò che muta il problema dei momenti di HAMBURGER (10) in un problema dei momenti di STIELTJES).

Consideriamo gli integrali:

$$\varrho_{jn} = \int_{-\infty}^{0} x^j \exp(\alpha_n x)\, \mathrm{d}x = (-1)^j \int_{0}^{\infty} t^j \exp(-\alpha_n t)\, \mathrm{d}t = \frac{(-1)^j j!}{\alpha_n^{j+1}} \tag{15}$$

per $1 \leqslant j \leqslant J$;

$$\sigma_{kn} = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{x}{x-1}\right)^k \exp(\alpha_n x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^k \exp(-\alpha_n t)\, \mathrm{d}t = \tag{16}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \int_{0}^{\infty} (t+1)^{-\nu} \exp(-\alpha_n t)\, \mathrm{d}t = \exp(\alpha_n) \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} E_\nu(\alpha_n)$$

per $1 \leqslant k \leqslant K$, dove $E_\nu(z)$ è l'integrale esponenziale iterato, definito ed esempio da

$$E_\nu(z) = \int_1^\infty t^{-\nu} \exp(-zt)\, \mathrm{d}t , \qquad z > 0 ,\ \nu = 0, 1, 2, \dots .$$

Per ogni k, $E_k(z)$ è linearmente indipendente da $E_0(z) = \exp(-z)/z$, $E_1(z), \dots$ $\dots, E_{k-1}(z)$ (valgono fra le $E_\nu(z)$ relazioni lineari, ma a coefficienti non tutti indipendenti da z); quindi, per la (16), σ_{kn} è linearmente indipendente, come funzione di α_n, da $\sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \dots, \sigma_{k-1,n}$. Eguale indipendenza lineare sussiste palesemente per le ϱ_{jn}, sia fra loro che rispetto alle σ_{kn}; così che, complessivamente, le (15) e (16) costituiscono un sistema di $J + K$ funzioni di α_n linearmente indipendenti. Allora, se per l'intero N, finora imprecisato, si assume proprio il valore

$$N = J + K ,$$

la matrice quadrata di ordine N

$$\left[\begin{array}{cccc} \varrho_{11} & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varrho_{J1} & \varrho_{J2} & \cdots & \varrho_{JN} \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{K1} & \sigma_{K2} & \cdots & \sigma_{KN} \end{array}\right] \tag{17}$$

non è identicamente singolare rispetto a una scelta generica degli N numeri reali e positivi distinti $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

Dopo ciò, l'applicazione alla (14) delle condizioni (10) e (11) dà

$$\sum_{n=1}^{N} \varrho_{jn} C_n = \lambda_j\,, \qquad \sum_{n=1}^{N} \sigma_{kn} C_n = \mu_k\,, \tag{18}$$

sistema lineare non omogeneo che, per quanto precede, determina completamente i coefficienti C_n (salvo per scelte particolari di $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$) e quindi la (14). Indi, sostituendo questa nella (8), si ottiene per il problema al contorno proposto la soluzione

$$u(j, k) = (-1)^j a^j b^h \sum_{n=1}^{J+K} C_n \varphi_{j,k}(\alpha_n)\,, \tag{19}$$

dove $\varphi_{j,k}(\alpha)$ è la trasformata di LAPLACE di una funzione razionale:

$$\varphi_{jk}(\alpha) = \int_0^\infty \frac{t^{j+k}}{(t+1)^k} \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{20}$$

Le funzioni $\varphi_{j,k}(\alpha)$ costituiscono un sistema fondamentale per l'equazione alle differenze finite (1), nel senso definito nel paragrafo **1**. Come già le ϱ_{jn}, σ_{kn}, esse sono esprimibili mediante le potenze intere di α^{-1} e le trascendenti $E_\nu(\alpha)$. Della loro forma esplicita tralasciamo la deduzione, che è elementare; quella delle ϱ_{jn}, σ_{kn} è stata fatta più sopra principalmente per accertare la non singolarità della matrice (17), che a priori non è affatto certa per una qualsiasi scelta della funzione $w(x)$ ammissibile riguardo alla (8).

Nel paragrafo successivo saranno discusse alcune possibili estensioni della trattazione svolta. Qui concludiamo con l'osservazione che se il problema al contorno proposto avesse costituito uno schema implicito, la sua risoluzione numerica tradizionale si sarebbe attuata mediante un sistema lineare di circa JK equazioni; numero che, per J e K non piccolissimi, è apprezzabilmente maggiore dell'ordine $J+K$ del sistema (18).

4. – Nei due paragrafi precedenti sono intervenute, sia nella formulazione che nella risoluzione del problema, successive scelte particolari: dell'equazione alle differenze finite (1), delle (7) come funzioni $v_1(x)$, $v_2(x)$ obbedienti alla (6), e della (14) come funzione $w(x)$. A queste avremmo dovuto aggiungere, in un eventuale esempio numerico, una scelta delle costanti positive α_n.

Volendo ora cercare di recuperare, fin dove è possibile, la generalità via via abbandonata, è naturale riesaminare le scelte suddette nell'ordine inverso (cioè di generalità crescente).

La scelta delle α_n non comporta a rigore, finchè N non è troppo grande, una restrizione di generalità; essa può quindi essere sfruttata per ottenere un buon condizionamento del sistema algebrico lineare (18), cosa che non si è certi di conseguire con una scelta arbitraria. Tuttavia, al crescere di N, cioè al tendere delle (10) e (13) verso «veri» problemi dei momenti (ossia con successioni $\{\lambda_j\}$, $\{\mu_k\}$ infinite), si pone anche un problema di approssimabilità della soluzione $w(x)$ con una espressione come la (14), in relazione alla scelta delle α_n. In proposito si può osservare che la sostituzione $\xi = \exp(x)$ muta la (14) nella somma di potenze $\sum_{n=1}^{N} C_n \xi^{\alpha_n}$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$; potenze che, per $0 \leqslant n < \infty$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, in virtù di un teorema di MÜNTZ [**6**] costituiscono un sistema completo in $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ solo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1}$ diverge. Questa condizione naturalmente non impedisce una scelta della α_n che tenga conto della succitata esigenza di buon condizionamento numerico.

Le considerazioni precedenti coinvolgono anche l'adozione della forma (14) per $w(x)$ e le possibili alternative. Questa scelta è soggetta a numerosi vincoli: l'esistenza dell'integrale improprio (8); la sua esprimibilità come combinazione lineare di funzioni speciali non troppo inconsuete; la non singolarità della matrice (17); il buon condizionamento numerico del sistema (18). Ad esempio, il primo requisito è facilmente soddisfatto assumendo una $w(x)$ non identicamente nulla soltanto in un intervallo finito (problema di HAUSDORFF): ma ciò può rendere difficile il soddisfacimento del secondo e del quarto. Come altro esempio di difficoltà, assumendo

$$w(x) = \sum C_n \exp\left[-\alpha_n x^2/|x-1|\right] \; (\alpha_n > 0)\,, \quad -\infty < x < +\infty\,, \quad x \neq 1\,;\; w(1) = 0\,,$$

le funzioni σ_{kn} riescono combinazioni lineari di funzioni di BESSEL in numero minore di K, e quindi la matrice (17) è identicamente singolare. In conclusione si può dire che la scelta di $w(x)$ è forse il punto più delicato dell'intero procedimento.

Nelle (7), la scelta di $v_1(x)$ è sostanzialmente obbligata, se si vuol ricondurre il problema al contorno (1), (3), (4) alla coppia di problemi dei momenti (10), (13); scelte apparentemente più generali lascerebbero poi da specificare o trasformare la conseguente forma della (5), sino a pervenire ad una espressione di $u(j, k)$ più o meno equivalente alla (8).

Rimane da ultimo la scelta della (1), dichiaratamente assunta soltanto come esempio di equazione alle differenze finite in due variabili. È facile constatare come il tipo di trattazione sviluppato nel paragrafo 2 sia applicabile, mantenendo ferma la (5), ad equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine qualunque: classe di equazioni che comprende sia le discretizzazioni di note equazioni della Fisica Matematica, sia significativi modelli probabilistici. Invece l'intervento di condizioni al contorno riducibili alla forma (3), (4) appare essenziale e non suscettibile di immediate estensioni. La forma particolare dell'equazione considerata in luogo della (1) si rifletterà nella forma dell'equazione (6) e quindi, mantenendo per le ragioni dette sopra la prima (7), nella forma della seconda (7) e della (8). Ciò obbligherà a considerare ex novo il problema della ricerca di una soluzione analoga alla (14); ma non è detto che, almeno nei casi più semplici, le difficoltà da affrontare siano necessariamente maggiori che nell'esempio trattato.

Se poi il problema al contorno è sempre di quelli per cui l'esistenza e unicità della soluzione è accertata, continua a valere la proposizione finale del paragrafo **2**, con una nuova trasformazione che gode le stesse proprietà della (12) rispetto a una coppia arbitraria di problemi di HAMBURGER.

Bibliografia.

[1] J. V. USPENSKY, *Introduction to Mathematical Probability*, McGraw-Hill, New York 1937.

[8] G. BOOLE, *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*, Macmillan, London 1872; Dover, New York 1960.

[3] D. V. WIDDER, *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, Princeton 1946.

[4] J. SHOHAT and J. TAMARKIN, *The Problem of Moments*, American Mathematical Society, Providence 1950.

[5] G. PÒLYA, *Sur l'indétermination d'un problème voisin du problème des moments*, C. R. Acad. Sc. Paris, **207** (1938), 708-711.

[6] H. MUNTZ, *Ueber den Approximationssatz von Weierstrass*, Julius Springer, Berlin 1914.

* * *