Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 1-12

CATALDO AGOSTINELLI (*)

Sulle superficie d'onda elettromagnetiche in un plasma elettricamente anisotropo. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno.

1. – Nello studio del movimento di un plasma molto rarefatto, soggetto a un campo magnetico, viene spesso considerata una anisotropia della pressione, e sotto questo aspetto dall'equazione di BOLTZMANN, priva del termine relativo agli urti, sono state dedotte delle equazioni idromagnetiche che in questi ultimi anni hanno trovato svariate applicazioni (1).

Ora io ho pensato che in un plasma, oltre all'anisotropia della pressione, vi può essere anche, analogamente a quanto avviene nei mezzi cristallini, una anisotropia elettrica, determinata dal campo magnetico, nel senso che il *potere dielettrico* ε sarà un tensore con una componente $\varepsilon_{\parallel}$ parallela al campo magnetico e un'altra $\varepsilon_{\perp}$ perpendicolare ad esso.

In questa ipotesi, in questa Nota, riferendomi per ora alla sola propagazione di onde elettromagnetiche, mi sono proposto di stabilire l'equazione differenziale della superficie d'onda, applicando il ben noto metodo delle caratteristiche dei sistemi differenziali (2), e quindi l'equazione che dà le possibili velocità V di propagazione del fronte d'onda.

(*) Indirizzo: Istituto di Meccanica Razionale, Università di Torino, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino, Italia.

(**) Ricevuto: 3-IV-1973.

(1) G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER e F. E. LOW, *The Boltzmann equation and one fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions*, Proc. Ray. Soc., A **236** (1956), 112-118.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Zanichelli, Bologna 1931.

Seguendo due procedimenti diversi sono pervenuto sostanzialmente agli stessi risultati. Ho ottenuto cioè, per l'incognita velocità V, un'equazione che si scinde in due. Una dà luogo ad onde sferiche che si propagano con una velocità luminosa dipendente dalla componente trasversale $\varepsilon_\perp$ del potere dielettrico. La seconda equazione, che è di quarto grado completa in V, alquanto complicata, mostra che in generale sono possibili altre quattro distinte velocità di propagazione.

In quest'ultima equazione compare il parametro $k = (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)/\varepsilon_\parallel$ che dipende dalla differenza delle due componenti, parallela e perpendicolare al campo magnetico, del potere dielettrico. Per ottenere qualche risultato concreto ho considerato il caso particolarmente interessante in cui il parametro k è sufficientemente piccolo da poter trascurare i termini di ordine superiore al suo quadrato. In questo caso esiste realmente un fenomeno di propagazione ondosa se tra il campo elettrico e il campo magnetico è soddisfatta una certa condizione (la (39)). Un caso notevole, fisicamente significativo, in cui questa condizione è verificata, è quello in cui il campo magnetico è tangente alla superficie d'onda. In questo caso la velocità di propagazione del fronte d'onda, che è stata determinata esplicitamente (la (40)), dipende dall'intensità del campo magnetico e dalla componente normale alla superficie d'onda del vettore di POYNTING.

2. – Le equazioni del campo elettromagnetico in un plasma sono come è noto:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{I} + \mu \frac{\partial(\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad (\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0), \tag{2}$$

essendo $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica, $\boldsymbol{E}$ l'intensità del campo elettrico ed $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente espressa da

$$\boldsymbol{I} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) + \varrho_e \boldsymbol{v}, \tag{3}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità media delle particelle del plasma, ϱ_e la densità media delle cariche elettriche, σ la sua conduttività elettrica e μ la permeabilità magnetica, le quali ultime le supporremo costanti. Il potere dielettrico ε lo supporremo invece variabile, a carattere tensoriale, nel senso che esso ha due determinazioni distinte, una $\varepsilon_\parallel$ nella direzione parallela al campo magnetico e l'altra $\varepsilon_\perp$ nella direzione perpendicolare al detto campo. Supporremo cioè che il campo magnetico generi una anisotropia elettrica nel plasma, per cui avremo

$$\varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_{\parallel} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \varepsilon_{\perp} \boldsymbol{E} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \,, \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{B}/B$ è vettore unitario diretto tangenzialmente al campo magnetico.

Alle equazioni (1) e (2) va associata l'equazione di continuità delle cariche elettriche

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{I} = 0 \,. \tag{5}$$

Come conseguenza di questa e della (1) si ha anche

$$\varrho_e = \operatorname{div} (\varepsilon \boldsymbol{E}) \,. \tag{6}$$

Ciò premesso vogliamo determinare l'equazione differenziale delle superficie d'onda elettromagnetiche nel plasma considerato, applicando il ben noto metodo delle caratteristiche.

Per questo supporremo ancora, come si usa fare nella determinazione delle superficie d'onda di FRESNEL nei mezzi cristallini triassici, che il potere dielettrico ε del plasma, pur essendo eventualmente variabile da punto a punto e col tempo, sia continuo, colle sue derivate, attraverso la superficie d'onda, mentre indicheremo con $\boldsymbol{e}$ e con $\boldsymbol{b}$ rispettivamente i vettori caratteristici che rappresentano la discontinuità delle derivate prime del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e dell'induzione magnetica $\boldsymbol{B}$.

Essendo $\varDelta$ il simbolo di discontinuità dalle equazioni (1) e (2) avremo allora

$$\varDelta \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu \varDelta \frac{\partial(\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t} \tag{7}$$

$$\varDelta \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = - \varDelta \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \,. \tag{8}$$

Osserviamo che applicando l'operazione di discontinuità alla (5) si avrebbe l'equazione di discontinuità delle derivate di ϱ_e dopo aver determinate le discontinuità delle derivate prime di $\boldsymbol{B}$ ed $\boldsymbol{E}$ per mezzo delle (7) e (8), e quelle delle derivate prime di $\boldsymbol{v}$ per mezzo delle equazioni idromagnetiche. Ma di questo non vogliamo occuparci.

È da rilevare ancora che applicando l'operazione di discontinuità ad ambo i membri della (6) si ha

$$\varDelta \operatorname{div} (\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0 \,; \tag{9}$$

ma vedremo che la (9) è conseguenza della (7). Ci rimane dunque da considerare soltanto le equazioni (7) e (8), dove il vettore spontamento elettrico $\varepsilon\boldsymbol{E}$ di MAXWELL è espresso dalla (4).

Ora, se $\varphi(x_1, x_2, x_3; t) = \text{cost}$ è l'equazione di una superficie d'onda si ha

$$\varDelta \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \operatorname{grad}\varphi\wedge\boldsymbol{b}\,, \qquad \varDelta\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\boldsymbol{b}\,,$$

$$\varDelta \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\varphi\wedge\boldsymbol{e}\,,$$

$$\varDelta\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left\{\varepsilon_\perp\boldsymbol{e} + \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2}\left[\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{b} - 2\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{b}}{B^2}\boldsymbol{B}\right)\right]\right\}\,.$$

Sostituendo nella (7) e (8) e ponendo

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{p} = g\boldsymbol{n}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = p_0\,, \tag{10}$$

dove $g = |\boldsymbol{p}|$, ed $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale alla superficie d'onda $\varphi = \text{cost}$, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} g\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{b} = \mu p_0 \Big\{\varepsilon_\perp\boldsymbol{e} + {}& \\ &+ \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2}\left[\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{b} - 2\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{b}}{B^2}\boldsymbol{B}\right)\right]\Big\}\,, \end{aligned} \tag{11}$$

$$g\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{e} = -p_0\boldsymbol{b}\,. \tag{12}$$

Dalla (12) si ricava intanto

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n} = 0\,, \qquad \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b} = 0\,,$$

la prima delle quali deriva dalla condizione $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$, ed esprime che il vettore caratteristico $\boldsymbol{b}$ è tangente alla superficie d'onda; inoltre i due vettori $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ sono ortogonali fra loro.

Moltiplicando ambo i membri della (11) scalarmente per $\boldsymbol{n}$ si ottiene

$$\varepsilon_\perp\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n} + \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2}B_n\left(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b} - 2\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{b}}{B^2}\right) = 0\,, \tag{13}$$

che non è altro che lo sviluppo della (9). Eliminando il vettore $\boldsymbol{b}$ per mezzo della (12) si ha anche

$$\left\{\varepsilon_\perp \boldsymbol{n} + \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2} B_n \left(\boldsymbol{B} - \frac{g}{p_0} \boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n} + 2\frac{g}{p_0}\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n}\right)\right\} \times e = 0 \tag{13'}$$

la quale esprime che il vettore $\boldsymbol{e}$ è perpendicolare al vettore racchiuso fra graffe.

Le equazioni (11) e (12) sono le equazioni di compatibilità relative al campo elettromagnetico e sono lineari omogenee nei due vettori caratteristici $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$. Eliminando fra esse il vettore $\boldsymbol{b}$, si ottiene facilmente l'equazione

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \mu &\left\{\frac{p_0^2}{g}\left(\varepsilon_\perp \boldsymbol{e} + \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \right.\\ &\left. - \frac{p_0}{g}\frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2}\left[\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{e} - 2\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B}\right]\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

che si può scrivere

$$\begin{aligned}&\left\{\mu\varepsilon_\perp\frac{p_0^2}{g^2} - 1 + (\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) + \frac{p_0^2}{g^2}\mu\frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}) - \right.\\ &\left. - \frac{p_0}{g}\mu\frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2}\left[(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n},\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\wedge - 2\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n},\boldsymbol{B})\right]\right\}\boldsymbol{e} = 0\,,\end{aligned} \tag{14'}$$

dove $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})$, $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n},\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n},\boldsymbol{B})$ sono *diadi.*

Nella (14') la quantità racchiusa fra graffe è un operatore vettoriale omografico composto di quantità scalari, di diadi e dell'omografia assiale $\boldsymbol{n}\wedge$.

Con riferimento a tre assi cartesiani ortogonali (x_1, x_2, x_3) la (14), come anche la (14'), dà luogo a tre equazioni scalari lineari omogenee nelle tre componenti e_1, e_2, e_3 del vettore $\boldsymbol{e}$. Uguagliando a zero il determinante dei coefficienti di queste componenti si ha l'equazione differenziale della superficie d'onda. Per ottenere questa equazione nel modo più semplice osserviamo che l'operatore omografico applicato al vettore $\boldsymbol{e}$, è *degenere*, e pertanto il suo *invariante terzo*, che non è altro che il detto determinante, deve essere nullo (1).

---

(1) Cfr.: C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale. Trasformazioni lineari*, Cap. I, nn. 4 e 5, Zanichelli, Bologna 1929.

Ponendo allora per semplicità

$$A = \mu \varepsilon_\perp \frac{p_0^2}{g^2} - 1 , \tag{15}$$

$$\alpha = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) + \mu \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2} \left\{ \frac{p_0^2}{g^2} (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}) - \frac{p_0}{g} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \wedge - \frac{p_0}{g} (\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{B}) + \right. \tag{16}$$

$$\left. + 2 \frac{p_0}{g} \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2} (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{B}) \right\} ,$$

dove A è una quantità scalare, ed α un operatore vettoriale omografico, abbiamo l'equazione

$$I_3(A + \alpha) = 0 , \tag{17}$$

che esprime in sintesi l'equazione differenziale delle superficie d'onda.

In virtù di una nota formula di CAYLEY si ha

$$I_3(A + \alpha) \equiv A^3 + A^2 I_1 \alpha + A I_2 \alpha + I_3 \alpha = 0 , \tag{18}$$

dove gli invarianti primo, secondo e terzo di α, indicati rispettivamente con $I_1\alpha$, $I_2\alpha$, $I_3\alpha$, calcolati mediante la (16), risultano:

$$I_1 \alpha = 1 + \mu(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp) \frac{p_0^2}{g^2} + \mu \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2} \frac{p_0}{g} (\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B})_n ,$$

$$I_2 \alpha = \frac{\mu(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)}{B^6} \frac{p_0^2}{g^2} \left\{ B^2 - B_n^2 + \mu \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \left(2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \frac{B_n^2}{B^2} - E_n B_n \right) \right\} +$$

$$+ \mu \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{B^2} \frac{p_0}{g} (\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B})_n ,$$

$$I_3 \alpha = \mu^3 \frac{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)^3}{B^6} B_n^2 (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})^2 \frac{p_0^4}{g^4} + \mu^2 \frac{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)^2}{B^4} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \left(2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \cdot \frac{B_n^2}{B^2} - E_n B_n \right) \frac{p_0^2}{g^2} .$$

Sostituendo nella (18), ricordando che A è dato dalla (15), semplificando, ordinando quindi rispetto a p_0/g, e ponendo

$$k = \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp} , \qquad c_\parallel^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon_\parallel} , \qquad c_\perp^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon_\perp} , \tag{19}$$

si ha infine

$$
(20)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{p_0^4}{g^4}+k\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{B^2}\,\frac{p_0^3}{g^3}+\left\{-(c_\parallel^2+c_\perp^2)-k\,c_\perp^2\,\frac{B_n^2}{B^2}+\right.\\
&\quad\left.+\,k^2\,\frac{c_\perp^2}{c_\parallel^2}\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^4}\left[\left(1+\frac{c_\perp^2}{c_\parallel^2}\right)\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,B_n^2-E_nB_n\right]\right\}\frac{p_0^2}{g^2}+\\
&\quad-\,k\,c_\perp^2\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{B^2}\,\frac{p_0}{g}+c_\parallel^2c_\perp^2+k\,c_\perp^4\,\frac{B_n^2}{B^2}=0\,,
\end{aligned}
\right.
$$

che è la cercata equazione differenziale delle superficie d'onda.

Indicando con

$$
(21)\qquad V=-\frac{p_0}{g}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/|\operatorname{grad}\varphi|
$$

la velocità di propagazione del fronte d'onda, la (20) porge

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&V^4-k\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{B^2}\,V^3+\left\{-(c_\parallel^2+c_\perp^2)-k\,c_\perp^2\,\frac{B_n^2}{B^2}+\right.\\
&\quad\left.+\,k^2\,\frac{c_\perp^2}{c_\parallel^2}\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^4}\left[\left(1+\frac{c_\perp^2}{c_\parallel^2}\right)\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,B_n^2-E_nB_n\right]\right\}V^2+\\
&\qquad\qquad+\,k\,c_\perp^2\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{B^2}\,V+c_\parallel^2c_\perp^2+k\,c_\perp^4\,\frac{B_n^2}{B^2}=0\,.
\end{aligned}
$$

Questa equazione che è di quarto grado completa in V, fornirà in generale quattro valori per V, e se essi saranno tutti reali si avranno quattro velocità di propagazione.

3. – L'equazione differenziale delle superficie d'onda si può ottenere anche eliminando fra le equazioni (11) e (12) il vettore caratteristico $\boldsymbol{e}$. Per questo osserviamo che moltiplicando ambo i membri della (11) scalarmente per $\boldsymbol{B}$, si ricava

$$
(23)\qquad \frac{p_0}{g}\,\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}}{\mu\varepsilon_\parallel}-\frac{\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\,\frac{p_0}{g}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{b}\right).
$$

Moltiplicando ora ambo i membri della (11) vettorialmente per $\boldsymbol{n}$, ricordando che $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}=0$, e tenendo quindi conto della (23) e della (12), si ottiene l'equazione

$$\text{(24)}\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{p_0^2}{g^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}\right)\boldsymbol{b}+\frac{k}{B^2}\left\{\frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n}+\right.\\ &\left.+\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\frac{p_0}{g}\left[\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b}-k\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{b}\right)\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{n}\right]\right\}=0\,, \end{aligned}\right.$$

che si può scrivere

$$\text{(24')}\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{p_0^2}{g}-\frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}+\frac{k}{B^2}\left\{\frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n},\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})+\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{p_0}{g}\left[(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})-\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}k\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})-\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\wedge\right]\right\}\right]\boldsymbol{b}=0 \end{aligned}\right.$$

dove $(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n},\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})$, $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})$, $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})$ sono al solito delle diadi.

La (24), o ciò che è lo stesso la (24′), equivale a tre equazioni scalari, lineari omogenee nelle componenti di $\boldsymbol{b}$. Uguagliando a zero il determinante dei coefficienti si ottiene l'equazione differenziale richiesta.

Ponendo

$$\text{(25)}\qquad C=\frac{p_0^2}{g^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}\,,$$

$$\text{(26)}\qquad \begin{aligned}\gamma=\frac{k}{B^2}&\left\{\frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})+\frac{p_0}{g}\left[(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})-\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}k\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})-\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\wedge\right]\right\}\,,\end{aligned}$$

avremo dunque

$$\text{(27)}\qquad I_3(C+\gamma)\equiv C^3+C^2I_1\gamma+CI_2\gamma+I_3\gamma=0\,.$$

Risulta

$$I_1\gamma=\frac{k}{B^2}\left[\frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}(B^2-B_n^2)+\frac{p_0}{g}(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n\right],$$

$$I_2\gamma=-\frac{k^2}{B^4}\frac{p_0^2}{g^2}\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\left(E_nB_n-\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}k\frac{B_n^2}{B^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right)$$

$$I_3\gamma=0\,.$$

L'equazione (27) si scinde quindi nelle seguenti

$$C \equiv \frac{p_n^2}{g^2} - \frac{1}{\mu\varepsilon_\perp} \equiv V^2 - c_\perp^2 = 0\,, \tag{28}$$

$$C^2 + C I_1 \gamma + I_2 \gamma = 0\,.$$

Quest'ultima, fatte le sostituzioni, porge

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{p_0^4}{g^4} + k\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{B^2}\,\frac{p_0^3}{g^3} - \left\{\frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}\,\frac{\varepsilon_\parallel+\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} + \frac{k}{\mu\varepsilon_\perp}\,\frac{B_n^2}{B^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\,\frac{k^2}{B^4}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot B_n\left(E_n - \frac{\varepsilon_\parallel+\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp}\,B_n\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\right)\right\}\frac{p_0^2}{g^2} - \\ &- \frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}\,\frac{k}{B^2}\,(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n\,\frac{p_0}{g} + \frac{1}{\mu^2\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp} + \frac{k}{(\mu\varepsilon_\perp)^2}\cdot\frac{B_n^2}{B^2} = 0, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

che coincide con la (20). La corrispondente equazione delle velocità del fronte d'onda risulta coincidente con la (22).

Con questo procedimento abbiamo ottenuto dunque un risultato più completo. La superficie d'onda è composta cioè da quella definita dalla (28), che dà luogo ad onde sferiche che si propagano con la velocità $V = c_\perp$, e da quella definita dalla (29).

L'integrazione dell'equazione differenziale (29) si presenta in generale oltremodo difficile, e per questo occorrerebbe innanzitutto integrare, nelle ipotesi ammesse, le equazioni di MAXWELL che sono legate d'altra parte con la velocità media delle particelle del plasma.

Per ottenere qualche risultato concreto considereremo il caso, fisicamente interessante, in cui l'anisotropia elettrica del plasma è sufficientemente piccola da poter trascurare nella risoluzione della (29) rispetto a p_0, o della (22) rispetto a V, i termini di ordine superiore al secondo nel parametro $k = (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)/\varepsilon_\parallel$.

Supponendo allora tanto p_0, quanto V, sviluppabili in serie di potenze di k, avremo

$$p_0 = (p_0)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}k}\right)_0 k + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 p_0}{\mathrm{d}k^2}\right)_0 k^2 + \dots\,, \tag{30}$$

$$V = V_0 + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0 k + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}k^2}\right)_0 k^2 + \dots\,. \tag{31}$$

Riferendoci all'equazione (22), e indicando con $f(V(k), k)$ il primo membro di essa, in base alla teoria delle funzioni implicite avremo

$$f(V(0), 0) = 0\,, \tag{32}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k}\right)_0 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)_0 = 0\,, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}k^2}\right)_0 \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial V\,\partial k}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0 + \\ + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial k^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}k^2}\right)_0 = 0\,,\end{aligned} \tag{34}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}k^3}\right)_0 \equiv \left(\frac{\partial^3 f}{\partial V^3}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0^3 + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial V^2\,\partial k}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0^2 + \\ &\qquad + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial V\,\partial k^2}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial k^3}\right)_0 + \\ &+ 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k} + \frac{\partial^2 f}{\partial V\,\partial k}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}k^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}^3 V}{\mathrm{d}k^3}\right)_0 = 0\,,\end{aligned}\right. \tag{35}$$

. . . .

Poichè per $k = 0$, $(\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp})$, è $c_{\parallel}^2 = c_{\perp}^2 = c^2$, la (32) diventa

$$V_0^4 - 2c^2 V_0^2 + c^4 = 0 \tag{36}$$

e questa porge $V_0^2 = c^2$, che è il quadrato della velocità della luce in un mezzo isotropo.

Calcolando poi le derivate parziali della funzione f per $k = 0$, si riconosce che le derivate parziali prime $(\partial f/\partial V)_0$, $(\partial f/\partial k)_0$ sono identicamente nulle e la (33) si riduce ad una identità.

Le altre due equazioni (34) e (35), essendo ancora $\partial^3 f/\partial k^3 = 0$, diventano

$$8c^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0^2 - \frac{4c^2}{B^2}\left[(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n + cB_n^2\right]\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0 + 2c^2\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^4}\left(2\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,B_n^2 - E_n B_n\right) = 0\,, \tag{37}$$

$$\left\{\begin{aligned}&24\,c\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0^3 - \frac{6c}{B^2}\left[3(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n + cB_n^2\right]\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0^2 + \\ &\qquad + 12\,c\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^4}\left(2\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,B_n^2 - E_n B_n\right)\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0 + \\ &\qquad + 3\left\{8c^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0 - \frac{2c^2}{B^2}\left[(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n + cB_n^2\right]\right\}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}k^2}\right)_0 = 0\,,\end{aligned}\right. \tag{38}$$

. . . .

La (37) fornisce per $(\mathrm{d}V/\mathrm{d}k)_0$ due valori reali se è verificata la condizione

$$[(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n + cB_n^2]^2 - 4\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\left(2\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\frac{B_n^2}{B^2} - E_n B_n\right) \geqslant 0\,. \tag{39}$$

In tal caso la (38), e le successive relazioni she si ottengono oltre le (34) e (35), forniscono le altre derivate $(\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}k^2)_0\ldots$, e si hanno quindi dalla (31) due possibili velocità di propagazione del fronte d'onda.

Un caso notevole, fisicamente significativo, in cui la condizione (39) è verificata, si ha quando $B_n = 0$, cioè il campo magnetico è tangente alla superficie d'onda. In questo caso la (37) porge

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}k}\right)_0 = \frac{1}{2B^2}(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n$$

e quindi dalla (38) si ricava

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}k^2}\right)_0 = \frac{1}{4cB^4}(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n^2\,.$$

Pertanto, a meno di termini di ordine superiore al 2° in k, la (31) porge

$$V = c + \frac{1}{2B^2}(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n k + \frac{1}{8cB^4}(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n^2 k^2, \tag{40}$$

che è, nell'approssimazione considerata, una possibile velocità di propagazione, la quale dipende dalla componente normale alla superficie del vettore di POYNTING (1).

---

(1) È opportuno osservare che se supponiamo il campo magnetico perpendicolare alla superficie d'onda, anzichè tangenziale, abbiamo

$$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{n}\,,\qquad B_n^2 = B^2,\qquad \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = BE_n\,,\qquad (\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n = B(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n})_n = 0$$

e l'equazione (22) diventa

$$V^4 - \left(2c_\perp^2 - k^2\frac{c_\perp^4}{c_\parallel^4}\frac{E_n^2}{B^2}\right)V^2 + c_\perp^4 = 0$$

che si può scrivere

$$(V^2 - c_\perp^2)^2 + k^2\frac{c_\perp^4}{c_\parallel^4}\frac{E_n^2}{B^2}V^2 = 0$$

la quale ammette soluzioni reali soltanto se $k = 0$, caso che escludiamo, oppure se $E_n = 0$, cioè se il campo elettrico è tangenziale. In quest'ultimo caso si hanno soltanto onde sferiche che si propagano con velocità $c_\perp$.

Summary

In this paper we consider the propagation of electromagnetic waves in a very rarefied plasma, on the assumption that the magnetic field determine a electric anisotropy and the dielectric power is a tensor with parallel and perpendicular component to the magnetic field. We establish the differential equation of the wave surface and the equation that define the velocity of propagation; we give of the last an approximate solution, and finally we consider the significant case in which the magnetic field is tangent to the wave surface. In this case che velocity of propagation of the wave front is dependent by che normal component to the wave surface of che Poynting vector.

* * *