Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 185-195

LUIGI CAVALIERI D'ORO

Sulle coppie di curve omologhe contenenti elementi totalmente caratteristici di una trasformazione puntuale fra spazi euclidei. (**)

1. – Sia T una trasformazione puntuale non degenere fra due spazi euclidei S_r, $\bar{S}_r$ ad r dimensioni e O, $\bar{O}$ una coppia regolare di punti corrispondenti nella T.

Se $\mathscr{C}$, $\bar{\mathscr{C}}$ è una coppia di curve omologhe i cui elementi E_{r-1}, $\bar{E}_{r-1}$ (¹), di centri rispettivamente O, $\bar{O}$, sono totalmente caratteristici (²), dimostreremo (n. 2) che sussiste il seguente

Teorema I. *Il coefficiente di dilatazione lineare della T in O nella direzione (caratteristica) tangente in O alla $\mathscr{C}$ e i rapporti $\bar{\varrho}_j/\varrho_j$ $(j=1,2,\ldots,r-1)$ del $r-1$ curvature in $\bar{O}$, O delle curve $\bar{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$ sono legati allo jacobiano J della T in O dalla seguente relazione*

$$J=\frac{\bar{\varrho}_{r-1}\,\bar{\varrho}_{r-2}^{2}\cdots\bar{\varrho}_{2}^{r-2}\,\bar{\varrho}_{1}^{r-1}}{\varrho_{r-1}\,\varrho_{r-2}^{2}\cdots\varrho_{2}^{r-2}\,\varrho_{1}^{r-1}}\,J_1^{\frac{r(r+1)}{2}}\ (^3)\,. \tag{1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria «Luigi Cremona», Università di Bologna, Piazza Porta S. Donato 5, 40127 Bologna, Italia.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni. Ricevuto: 11-X-1973.

(¹) Indicheremo anche nel seguito con E_i un elemento differenziale curvilineo di ordine i.

(²) Per le definizioni di elementi caratteristici e totalmente caratteristici di una trasformazione puntuale T rimandiamo alla Nota: L. CAVALIERI D'ORO, *Sugli elementi differenziali curvilinei di ordine i caratteristici di una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi S_r, $\bar{S}_r$*, Boll. Un. Mat. It. (4) 4 (1971), 420-439.

(³) Dalla (1), per $r=2$, si ottiene un teorema già noto: si veda L. CAVALIERI D'ORO, Dopo aver data in **3**, la definizione di *coefficiente di dilatazione di dimensione* k $(1 \leqslant k \leqslant r)$, J_k, della T in O, secondo la giacitura individuata da un S_k per O, in **4** si dimostra che — se $\mathscr{C}$, $\overline{\mathscr{C}}$ è una coppia di curve omologhe i cui elementi E_{k-1}, $\bar{E}_{k-1}$ $(1 < k \leqslant r)$ di centri rispettivamente O, $\bar{O}$ sono totalmente caratteristici — il Teorema I può essere generalizzato mediante il seguente

Teorema II. *Il coefficiente di dilatazione lineare J_1 della T in O nella direzione (caratteristica) tangente in O alla $\mathscr{C}$ e i rapporti $\bar{\varrho}_j/\varrho_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$ delle prime $k-1$ curvature in $\bar{O}$, O delle curve $\overline{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$, sono legati al coefficiente di dilatazione di dimensione k, J_k, della T in O secondo la giacitura individuata dall'S_k k-osculatore in O alla $\mathscr{C}$, dalla seguente relazione*

$$J_k = \frac{\bar{\varrho}_{k-1}}{\varrho_{k-1}} \frac{\bar{\varrho}^2_{k-2}}{\varrho^{k-2}_2} \cdots \frac{\bar{\varrho}^{k-2}_2}{\varrho^{k-2}_2} \frac{\bar{\varrho}^{k-1}_1}{\varrho^{k-1}_1} J_1^{\frac{k(k+1)}{2}} . \tag{2}$$

Per $k = r$ dalla (2) si ottiene la (1); per $k = 2$ si ottiene un teorema noto (4).

2. – Premettiamo alcune osservazioni che consentono una semplificazione dei calcoli relativi alle dimostrazioni dei Teoremi I e II.

Sia dunque T una trasformazione puntuale fra due spazi euclidei S_r, $\bar{S}_r$ ad r dimensioni e $\mathscr{C}$, $\overline{\mathscr{C}}$ una coppia di curve omologhe i cui elementi corrispondenti E_{r-1}, $\bar{E}_{r-1}$ di centri O, $\bar{O}$ sono totalmente caratteristici per la T.

Chiameremo *r-edro osculatore alla $\mathscr{C}$ in O* l'insieme $\mathscr{R}$ delle r rette uscenti da O e ottenute come segue: consideriamo gli r spazi S_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ j-osculatori alla $\mathscr{C}$ in O (5) e in ciascun S_j $(j > 1)$ scegliamo una retta uscente da O e non appartenente a S_{j-1}; l'insieme $\mathscr{R}$ è costituito dalle suddette $r-1$ rette e dalla tangente S_1 in O alla $\mathscr{C}$.

Una proprietà relativa alle trasformazioni puntuali fra due piani o fra due spazi euclidei, Boll. Un. Mat. It. (4) **3** (1970), 637-642.

Per $r = 3$ dalla (1) si ottiene la semplice espressione

$$J = \frac{\bar{\varrho}_2 \cdot \bar{\varrho}^2_1}{\varrho_2 \cdot \varrho^2_1} J^6_1$$

nella quale ϱ_1, $\bar{\varrho}_1$ e ϱ_2, $\bar{\varrho}_2$ sono rispettivamente flessione e torsione in O, $\bar{O}$ delle curve omologhe $\mathscr{C}$, $\overline{\mathscr{C}}$ (i cui elementi E_2, $\bar{E}_2$ di centri O, $\bar{O}$ sono totalmente caratteristici).

(4) Cfr. l'op. cit. in (3), p. 640.

(5) Gli spazi j-osculatori $(j = 2, 3, \ldots, r-1)$ alla $\mathscr{C}$ in O hanno dimensione j, perchè gli elementi E_j della $\mathscr{C}$ aventi centro in O sono *regolari*. Nell'op. cit. in (2) ho definito regolare un elemento E_j di S_r $(1 < j \leqslant r)$ se lo spazio di dimensione minima che lo contiene è un S_j.

Se le rette che costituiscono $\mathscr{R}$ sono a 2 a 2 ortogonali si dirà che $\mathscr{R}$ è l'*r-edro fondamentale della $\mathscr{C}$ in O.*

Sia dunque $\mathscr{R}$ l'r-edro fondamentale della $\mathscr{C}$ in O; la T, limitatamente all'intorno del 1° ordine di O, $\bar{O}$, trasforma $\mathscr{R}$ in un r-edro $\bar{\mathscr{R}}$ osculatore alla $\mathscr{C}$ in $\bar{O}$. Consideriamo ora un'affinità $\mathscr{A}$ — fra $\bar{S}_r$ ed un altro spazio euclideo S'_r ad r dimensioni — che trasformi $\bar{\mathscr{R}}$ in un r-edro $\mathscr{R}'$ di rette a 2 a 2 ortogonali. Evidentemente $\mathscr{R}'$ è l'r-edro fondamentale in O' della curva $\mathscr{C}'$, trasformata della $\bar{\mathscr{C}}$ mediante $\mathscr{A}$ (essendo O' il corrispondente di $\bar{O}$ in $\mathscr{A}$).

Se T' è la trasformazione puntuale prodotto di T per $\mathscr{A}$, $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ sono r-edri *principali* della T' in O, O' (6).

Siano ora $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{r-1}$ le prime $r-1$ curvature della $\mathscr{C}$ in O ed s' la derivata prima dell'ascissa curvilinea s della $\mathscr{C}$ in O; indicheremo con $\mathscr{I}(\mathscr{C})$ la seguente espressione

$$\mathscr{I}(\mathscr{C}) = \varrho_{r-1}\,\varrho_{r-2}^{2} \cdots \varrho_{2}^{r-1}\,\varrho_{1}^{r-1}\,s'^{\frac{r(r+1)}{2}}$$

e con $\mathscr{I}(\mathscr{C})$, $\mathscr{I}(\bar{\mathscr{C}}')$ le espressioni analoghe relative alle curve $\bar{\mathscr{C}}$ e $\mathscr{C}'$. Con tali notazioni la (1) diviene

$$J = \frac{\mathscr{I}(\bar{\mathscr{C}})}{\mathscr{I}(\mathscr{C})}\,. \tag{1'}$$

Supposto che il Teorema I valga per le curve $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ corrispondenti nella T' e analogamente per la coppia di curve $\bar{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}'$ corrispondenti nell'affinità $\mathscr{A}$, si avrà

$$J_{T'} = \frac{\mathscr{I}(\mathscr{C}')}{\mathscr{I}(\mathscr{C})}\,, \qquad J_{\mathscr{A}^{-1}} = \frac{\mathscr{I}(\bar{\mathscr{C}})}{\mathscr{I}(\mathscr{C}')} \tag{3}$$

avendo indicato con $\mathscr{A}^{-1}$ l'affinità inversa della $\mathscr{A}$ e con $J_{T'}$ e $J_{\mathscr{A}^{-1}}$ gli jacobiani di T' e $\mathscr{A}^{-1}$ rispettivamente in O, O' e O', $\bar{O}$. Dalle (3) segue subito la (1'): infatti $T = T' \cdot \mathscr{A}^{-1}$ e quindi lo jacobiano J della T in O, $\bar{O}$ è uguale al prodotto degli jacobiani $J_{T'}$ e $J_{\mathscr{A}^{-1}}$.

Basterà quindi dimostrare il Teorema I nei seguenti due casi.

Caso (*a*). Supponendo che la trasformazione puntuale sia un'affinità.

Caso (*b*). Per una generica trasformazione puntuale T', in una coppia regolare O, O' di punti corrispondenti, relativamente alle coppie di curve omologhe passanti per O, O' e aventi ivi gli r-edri fondamentali coincidenti con r-edri principali per la T' in O, O'.

(6) Si veda M. VILLA, *Lezioni di Geometria*, Vol. II, Cedam, Padova (1972), p. 259.

Siano dunque

$$x'_i = \sum_{1}^{r}{}_j\, a_{ij}\bar{x}_j \qquad (i = 1, 2, \dots, r;\ A = |a_{ij}| \neq 0)$$

le equazioni di un'affinità $\mathscr{A}$ fra due spazi euclidei $\bar{S}_r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$, $S'_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$ ad r dimensioni; le origini $\bar{O}$, O' si corrispondono in $\mathscr{A}$. Sia poi $\bar{\mathscr{C}}$ una curva di $\bar{S}_r$ passante per $\bar{O}$; fino all'intorno di ordine r di $\bar{O}$ la $\bar{\mathscr{C}}$ si può rappresentare con le seguenti equazioni

$$\bar{x}_i = \sum_{1}^{r}{}_j\, \beta_{ij} u^j \qquad (i = 1, 2, \dots, r)\,.$$

Supporremo che il rango della matrice $\|\beta_{ih}\|$ $(i = 1, 2, \dots, r;\ h = 1, 2, \dots, r-1)$ sia $r-1$, cioè che l'elemento $\bar{E}_{r-1}$ di centro $\bar{O}$ della curva $\bar{\mathscr{C}}$ sia regolare.

Le equazioni della curva $\mathscr{C}'$, trasformata della $\bar{\mathscr{C}}$ in $\mathscr{A}$, limitatamente all'intorno di ordine r di O', sono:

$$x'_i = \sum_{1}^{r}{}_j \sum_{1}^{r}{}_k\, a_{ij}\beta_{jk}\, u^k \qquad (i = 1, 2, \dots, r)\,.$$

Supporremo anche ora che l'elemento E'_{r-1} avente centro nel punto O' di $\mathscr{C}'$ sia regolare.

Le curvature $(r-1)$-me — $\bar{\varrho}_{r-1}$, ϱ'_{r-1} — delle curve $\bar{\mathscr{C}}$ e $\mathscr{C}'$ rispettivamente in $\bar{O}$ e O' sono

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{\varrho}_{r-1} &= \prod_{1}^{r}{}_m\, m!\, \frac{B}{\bar{\varrho}^2_{r-2}\, \bar{\varrho}^3_{r-3} \cdots \bar{\varrho}_2^{r-2}\, \bar{\varrho}_1^{r-1}\, \bar{s}'^{\frac{r(r+1)}{2}}}\,, \\ \varrho'_{r-1} &= \prod_{1}^{r}{}_m\, m!\, \frac{A \cdot B}{\varrho'^2_{r-2}\, \varrho'^3_{r-3} \cdots \varrho'^{r-2}_2\, \varrho'^{r-1}_2\, s'^{\frac{r(r+1)}{2}}}\,, \end{aligned} \right.$$

avendo indicato con B il determinante della matrice quadrata $\|\beta_{ij}\|$, con $\bar{\varrho}_h$, ϱ'_h $(h = 1, 2, \dots, r-1)$ le curvature h-me delle curve $\bar{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}'$ in $\bar{O}$, O' e con $\bar{s}'$, s' le derivate prime delle ascisse curvilinee $\bar{s}$, s delle curve $\bar{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}'$ calcolate rispettivamente in $\bar{O}$, O'.

Dalla (4) segue

$$A = \frac{\varrho'^1_{r-1}\, \varrho'^2_{r-2} \cdots \varrho'^{r-2}_2\, \varrho'^{r-1}_1\, s'^{\frac{r(r+1)}{2}}}{\bar{\varrho}_{r-1}\, \bar{\varrho}^2_{r-2} \cdots \bar{\varrho}^{r-2}_2\, \bar{\varrho}^{r-1}_1\, \bar{s}'^{\frac{r(r+1)}{2}}}$$

cioè

$$A = \frac{\mathcal{I}(\mathcal{C}')}{\mathcal{I}(\overline{\mathcal{C}})} \cdot$$

Poichè A è lo jacobiano dell'affinità $\mathcal{A}$ in $\overline{O}$, risulta dimostrato il Teorema I nel Caso (a) (7).

Dimostriamo infine il Teorema I nel Caso (*b*).

Sia T' una trasformazione puntuale fra due spazi euclidei $S_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $S'_r(x'_1, x'_2, \ldots, x'_r)$ ad r dimensioni. Assumendo le r rette principali uscenti dalle origini O, O' come assi cartesiani ortogonali, le equazioni della T', sviluppate in serie di potenze nell'intorno di O, O', si possono scrivere

$$(5) \qquad x'_i = a_i x_i + f_2^i + f_3^i + \ldots + f_r^i + [r+1] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \ (^8)$$

avendo indicato con f_j^i forme di grado j nelle $x_1, x_2, \ldots, x_r$ e con $[r+1]$ un infinitesimo di ordine $> r$.

Sia $\mathcal{C}$ una curva di S_r per O tale che: l'elemento E_{r-1} di centro O della $\mathcal{C}$ sia regolare e l'r-edro osculatore a $\mathcal{C}$ in O sia principale per la T' in O, O' (cioè coincida con gli assi cartesiani ortogonali di S_r). A meno di affinità la $\mathcal{C}$, fino all'intorno di ordine r di O, si può rappresentare con le seguenti equazioni

$$(6) \qquad x_j = h_j x_1^j \qquad (j = 2, 3, \ldots, r) \ (^9) \, .$$

La trasformata $\mathcal{C}'$, limitatamente all'intorno di ordine r di O', ha equazioni del tipo

$$(6') \qquad \begin{cases} x'_1 = a_1 x_1 + \sum_{2}^{r} {}_s \beta_s^1 x_1^s \, , \\ x'_j = \sum_{2}^{r} {}_s (\delta_s^j a_s h_s + \beta_s^j) x_1^s \qquad (j = 2, 3, \ldots, r) \, , \end{cases}$$

nelle quali i coefficienti β_j^i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sono funzioni delle h_j e dei coefficienti delle forme f_j^i (10) e δ_s^j è il noto simbolo: $\delta_j^j = 1$; $\delta_s^j = 0$ per $s \neq j$.

(7) Si osservi che, relativamente agli elementi $\overline{E}_{r-1}$ ed E'_{r-1} aventi i centri rispettivamente nei punti $\overline{O}$, O' delle curve $\overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}'$ è stata fatta soltanto l'ipotesi che essi siano regolari. Infatti essendo $\mathcal{A}$ un'omografia, essi sono totalmente caratteristici. Si veda l'op. cit. in (2), p. 424.

(8) Si veda l'op. cit. in (6), p. 259.

(9) Supposto che le h_j $(j = 2, 3, \ldots, r-1)$ non siano nulle, l'E_{r-1} di centro O della $\mathcal{C}$ è regolare, essendo contenuto nell'S_{r-1} di equazione $x_r = 0$.

(10) Ad esempio:

$$\beta_2^i = f_2^i(1, 0, 0, \ldots, 0) \, ; \qquad \beta_3^i = f_2^i \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & h_2, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix} + f_3^i(1, 0, 0, \ldots, 0) \, ; \qquad \text{ecc.}.$$

L'espressione esplicita di tali coefficienti non gioca alcun ruolo nella dimostrazione e pertanto sarebbe un'inutile complicazione formale farla apparire nelle formule.

Gli elementi omologhi E_{r-1}, E'_{r-1} aventi centro nei punti O, O' delle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ sono totalmente caratteristici (cioè caratteristici insieme agli elementi di ordine $1, 2, \ldots, r-2$ in essi contenuti) se

$$h_2, h_3, \ldots, h_{r-1} \neq 0 , \tag{7}$$

$$\beta_p^q = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots, r;\ q = p, p+1, \ldots, r) \text{ [11]} . \tag{7'}$$

Supponiamo dunque che in O, O' gli elementi omologhi E_{r-1}, E'_{r-1} siano totalmente caratteristici, cioè che siano verificate le (7) e (7'). Mediante semplici calcoli si trova che le curvature $(r-1)$-me nei punti O, O' delle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ sono date rispettivamente da

$$\varrho_{r-1} = \prod_1^r {}_m\, m! \frac{h_2 h_3 \ldots h_r}{\varrho_{r-2}^2\, \varrho_{r-3}^3 \cdots \varrho_2^{r-2}\, \varrho_1^{r-1}\, s'^{\frac{r(r+1)}{2}}} , \tag{8}$$

$$\varrho'_{r-1} = \prod_1^r {}_m\, m! \frac{h_2 h_3 \ldots h_r}{\varrho'^2_{r-2}\, \varrho'^3_{r-3} \cdots \varrho'^{r-2}_2\, \varrho'^{r-1}_1\, \bar{s}'^{\frac{r(r+1)}{2}}}\, a_1 a_2 \ldots a_r , \tag{8'}$$

avendo indicato con ϱ_i, ϱ'_i $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ le curvature i-me in O, O' delle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ e con s', $\bar{s}'$ le derivate prime delle ascisse curvilinee s, $\bar{s}$ delle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ calcolate rispettivamente in O, O'.

Poichè il prodotto $a_1 a_2 \ldots a_r$ è lo jacobiano della T' in O ed $\bar{s}'/s' = J_1$ è il coefficiente di dilatazione lineare della T in O nella direzione caratteristica tangente in O alla $\mathscr{C}$, dalle (8), (8') si ottiene la

$$J\, \varrho_{r-1}\, \varrho_{r-2}^2 \cdots \varrho_2^{r-2}\, \varrho_1^{r-1} = \varrho'_{r-1}\, \varrho'^2_{r-2} \cdots \varrho'^{r-2}_2\, \varrho'^{r-1}_1\, J_1^{\frac{r(r+1)}{2}} \tag{9}$$

dalla quale segue subito la (1) in **1** (cioè la prima delle (3)); risulta pertanto dimostrato il Teorema I.

3. – Data fra due spazi euclidei $S_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $\bar{S}_r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r)$ ad r dimensioni una trasformazione puntuale T (non degenere) di equazioni $\bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, sia O, $\bar{O}$ una coppia regolare di punti corrispondenti nella T.

---

[11] Le (7) sono le condizioni che, supposte verificate le (7'), assicurano che l'elemento E'_{r-1} è regolare, essendo contenuto nell'S'_{r-1} di equazione $x'_r = 0$.

Per le condizioni analitiche affinchè una coppia di elementi differenziali curvilinei omologhi siano totalmente caratteristici, si veda pure N. Baldisserri, *Sugli E_i caratteristici e totalmente caratteristici di una trasformazione puntuale fra spazi proiettivi*, Atti Acc. Sci. Bologna (12) **10** (1973), 154-165.

Diamo ora la seguente:

Definizione. *Dicesi coefficiente di dilatazione di dimensione* k $(1 \leq k \leq r)$ *della* T *in* O, *secondo la giacitura individuata da un* S_k *per* O, *il rapporto* $d\bar{v}_k/dv_k$ *di due* k*-volumi infinitesimi omologhi, racchiudenti rispettivamente i punti* $\bar{O}$, O, *essendo* dv_k *appartenente ad* S_k (12).

Si osservi che $d\bar{v}_k$ dovrà necessariamente appartenere ad $\bar{S}_k$, corrispondente di S_k nell'omografia Ω che la T, nell'intorno del primo ordine di O, $\bar{O}$, subordina fra le stelle di spazi lineari di dimensione k aventi i centri nei punti O, $\bar{O}$ (13).

Indicheremo con J_k il suddetto coefficiente di dilatazione di dimensione k.

Il coefficiente di dilatazione di dimensione 1, $J_1 = d\bar{v}_1/dv_1 = d\bar{s}/ds$ (essendo $d\bar{s}$, ds due archi infinitesimi omologhi racchiudenti rispettivamente i punti $\bar{O}$, O) è il ben noto coefficiente di dilatazione lineare della T in O secondo la direzione tangente in O a ds.

Per $k = r$ il coefficiente di dilatazione J_r coincide con il determinante jacobiano delle f_i, calcolato in O: cioè $J_r = J$ è il ben noto rapporto degli ipervolumi infinitesimi in $\bar{O}$, O.

Siano ora $\mathscr{C}$, $\bar{\mathscr{C}}$ due curve omologhe per O, $\bar{O}$ i cui elementi differenziali curvilinei di ordine k $(1 \leq k \leq r)$ aventi i centri in O, $\bar{O}$ siano regolari.

Se gli spazi S_k, $\bar{S}_k$ di dimensione k, k-osculatori in O, $\bar{O}$ alle curve $\mathscr{C}$, $\bar{\mathscr{C}}'$ si corrispondono in Ω (14), vale la seguente

Proposizione (A). *Il rapporto dei* k*-volumi infinitesimi omologhi racchiudenti rispettivamente i punti* $\bar{O}$, O, *sugli spazi* $\bar{S}_k$, S_k *— corrispondenti in* Ω *e* k*-osculatori in* $\bar{O}$, O *alle curve* $\bar{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$ *— coincide con il coefficiente di dilatazione di dimensione* k, J_k, *della* T *in* O, *secondo la giacitura individuata dall'*S_k, k*-osculatore in* O *alla* $\mathscr{C}$ (15).

---

(12) Per semplicità si usa qui il linguaggio degli infinitesimi attuali: infatti, come è noto, per rapporto di volumi infinitesimi omologhi si intende il rapporto di due volumi corrispondenti al tendere a zero di uno di essi.

(13) Cioè S_k, $\bar{S}_k$ si corrispondono in una qualunque omografia Ω tangente alla T in O, $\bar{O}$.

(14) Si osservi che, in generale, se O, $\bar{O}$ è una coppia regolare di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale T fra due spazi proiettivi S_r, $\bar{S}_r$ ed E_k, $\bar{E}_k$ $(1) < k < r)$ sono due elementi regolari appartenenti a due curve omologhe $\mathscr{C}$, $\bar{\mathscr{C}}$ e aventi i centri rispettivamente nei punti O, $\bar{O}$, si ha: gli spazi S_k, $\bar{S}_k$, k-osculatori in O, $\bar{O}$ alle curve $\mathscr{C}$, $\bar{\mathscr{C}}$, non si corrispondono in Ω. Tali spazi S_k, $\bar{S}_k$ si corrispondono invece in Ω se in O, $\bar{O}$ gli elementi E_k, $\bar{E}_k$ (oppure E_{k-1}, $\bar{E}_{k-1}$) delle curve $\mathscr{C}$, $\bar{\mathscr{C}}$ sono caratteristici. Si vedano: op. cit. in (2), p. 434; op. cit. in (11), p. 161; L. Cavalieri D'Oro, *Sulla rappresentazione delle curve 2-caratteristiche corrispondenti in una trasformazione puntuale sulla varietà di Segre*, Boll. Un. Mat. It. (4) **5** (1971), 962.

(15) La Proposizione (A) è ovvia se $k = 1$, oppure se $k = r$.

4. – Considerazioni analoghe a quelle fatte relativamente al Teorema I possono essere fatte per dimostrare il Teorema II. Sarà cioè sufficiente dimostrare tale teorema nei casi (a) e (b) di cui si è detto in **2.**

Sia dunque $\mathscr{A}$ l'affinità di equazioni

$$x'_i = \sum_1^r {}_j\, a_{ij}\, \bar{x}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ A = |a_{ij}| \neq 0)$$

fra i due spazi euclidei $\bar{S}_r$, S'_r e $\overline{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}'$ due curve corrispondenti in $\mathscr{A}$ e passanti per le origini $\bar{O}$, O' (che si corrispondono in $\mathscr{A}$); $\overline{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}'$, fino all'intorno di ordine k $(k < r)$ di $\bar{O}$, O', abbiano le seguenti equazioni

$$\overline{\mathscr{C}}:\ \bar{x}_i = \sum_1^k {}_n\, \beta_{in}\, u^n\ ; \qquad \mathscr{C}':\ x'_i = \sum_1^r {}_j \sum_1^k {}_n\, a_{ij}\beta_{jn}\, u^n \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\, .$$

Supporremo anche ora che gli elementi $\bar{E}_{k-1}$ ed E'_{k-1} — aventi i centri nei punti $\bar{O}$, O' e appartenenti rispettivamente alle curve $\overline{\mathscr{C}}$ e $\mathscr{C}'$ — siano regolari, cioè che il rango delle due matrici $\|\beta_{in}\|$ e $\|a_{ij}\| \cdot \|\beta_{jn}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r;$ $n = 1, 2, \ldots, k)$ sia $k-1$.

Le curvature $(k-1)$-me $\bar{\varrho}_{k-1}$, ϱ'_{k-1} delle curve $\overline{\mathscr{C}}$ e $\mathscr{C}'$ rispettivamente in $\bar{O}$, O' sono

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{\varrho}_{k-1} &= \frac{\prod_1^k {}_m\, m!\, \sqrt{\|\beta_{in}\|^2}}{\bar{\varrho}^2_{k-2}\, \bar{\varrho}^3_{k-3} \cdots \bar{\varrho}_2^{k-2}\, \bar{\varrho}_1^{k-1}\, \bar{s}'^{\frac{k(k+1)}{2}}}\, , \\ \varrho'_{k-1} &= \frac{\prod_1^k {}_m\, m!\, \sqrt{\{\|a_{ij}\| \cdot \|\beta_{jn}\|\}^2}}{\varrho'^2_{k-2}\, \varrho'^3_{k-3} \cdots \varrho'^{k-2}_2\, \varrho'^{k-1}_1\, s'^{\frac{k(k+1)}{2}}}\, . \end{aligned} \right.$$

Dalla (10) segue

$$(11)\qquad \frac{\sqrt{\{\|a_{ij}\| \cdot \|\beta_{jn}\|\}^2}}{\sqrt{\|\beta_{in}\|^2}} = \frac{\varrho'_{k-1}\, \varrho'^2_{k-2} \cdots \varrho'^{k-2}_2\, \varrho'^{k-1}_1}{\bar{\varrho}_{k-1}\, \bar{\varrho}^2_{k-2} \cdots \bar{\varrho}^{k-2}_2\, \bar{\varrho}^{k-1}_1}\ J_1^{\frac{k(k+1)}{2}}\, .$$

Poichè il primo membro della (11) è il coefficiente di dilatazione J_k di $\mathscr{A}$ in $\bar{O}$ secondo la giacitura dello spazio S_k, k-osculatore alla $\overline{\mathscr{C}}$ in $\bar{O}$, risulta dimostrato il Teorema II nel Caso (a).

Caso (b). La T' abbia come equazioni le (5); ci occorrerà considerare, negli sviluppi in serie, soltanto i termini di grado $\leqslant k$ e pertanto le (5) divengono

$$x'_i = a_i x_i + f_2^i + f_3^i + \ldots + f_k^i + [k+1] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\,, \tag{5'}$$

avendo indicato con $[k+1]$ un infinitesimo di ordine $> k$.

Anche ora una curva $\mathscr{C}$ per O — avente l'E_{k-1} (di centro O) regolare e l'r-edro osculatore in O che è principale per la T' in O, O' — si può rappresentare, a meno di affinità, con equazioni del tipo

$$\begin{cases} x_j = h_j x_1^j & (j = 1, 2, \ldots, k)\,, \\ x_n = 0 & (n = k+1, k+2, \ldots, r)\,. \end{cases} \tag{12}$$

L'elemento E_{k-1} di centro O della $\mathscr{C}$ è contenuto nello spazio S_{k-1} di equazioni

$$x_k = x_{k+1} = \ldots = x_r = 0 \ ({}^{16})\,. \tag{12'}$$

Se $\mathscr{C}'$ è la trasformata della $\mathscr{C}$, le sue equazioni, fino all'intorno di ordine k di O', sono del tipo

$$\begin{cases} x'_1 = a_1 x_1 + \sum_2^k {}_s\, \beta_s^1 x_1^s \\ x'_j = \sum_2^k {}_s\, (\delta_s^j a_s h_s + \beta_s^j)\, x_1^s & (j = 2, 3, \ldots, k)\,, \\ x'_n = \sum_2^k {}_s\, \beta_s^n x_1^s & (n = k+1, k+2, \ldots, r)\,, \end{cases} \tag{13}$$

i simboli usati avendo gli stessi significati di cui al paragrafo **3**.

Le condizioni affinchè gli elementi omologhi E_{k-1}, E'_{k-1} — aventi i centri nei punti O, O' e appartenenti alle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ — siano totalmente caratteristici, sono

$$h_2, h_3, \ldots, h_{k-1} \neq 0\,; \tag{14}$$

$$\beta_p^q = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots, k;\ q = p, p+1, \ldots, r)\,. \tag{15}$$

---

(16) L'E_{k-1} di centro O della (12) che, come si è detto, è contenuto nell'S_{k-1} (12'), è regolare se non è contenuto in un S_{k-2}, cioè se tutte le h_j $(j = 2, 3, \ldots, k-1)$ non sono nulle.

La curvature $(k-1)$-ma ϱ_{k-1} nel punto O della curva $\mathscr{C}$ di equazioni (12) è

$$\varrho_{k-1} = \prod_{1}^{k}{}_{m}\, m!\, \frac{h_2 h_3 \dots h_k}{\varrho_{k-2}^{2}\, \varrho_{k-3}^{3} \dots \varrho_{2}^{k-2}\, \varrho_{1}^{k-1}\, s'^{\frac{k(k+1)}{2}}} \,. \tag{16}$$

Supposte verificate le (14) e (15), la curvatura $(k-1)$-ma ϱ'_{k-1} nel punto O' della curva $\mathscr{C}'$ di equazioni (13) è

$$\varrho'_{k-1} = \prod_{1}^{k}{}_{m}\, m!\, \frac{h_2 h_3 \dots h_k}{\varrho_{k-2}^{2} \cdot \varrho_{k-3}^{3} \dots \varrho_{2}^{k-2} \cdot \varrho_{1}^{k-1}\, \bar{s}'^{\frac{k(k+1)}{2}}}\, a_1 a_2 \dots a^k \text{ (17)} \,. \tag{17}$$

Il prodotto $a_1 a_2 \dots a_k$ è il rapporto dv'_k/dv_k dei due k-volumi infinitesimi omologhi racchiudenti i punti O', O ed appartenenti rispettivamente agli spazi

$$S'_k:\ x'_{k+1} = x'_{k+2} = \dots = x'_r = 0 \,, \tag{18}$$

$$S_k:\ x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_r = 0 \,, \tag{19}$$

---

(17) Ricordiamo che, data in S_r la curva γ di equazioni parametriche $x_i = F_i(u)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, considerato un punto P semplice ordinario di γ ottenuto per il valore $\bar{u}$ del parametro u, la curvatura $(k-1)$-ma ϱ_{k-1} $(1 < k \leqslant r)$ di γ in P è data da

$$\varrho_{k-1} = \frac{\sqrt{\left\| \begin{matrix} F_1^{(1)} & F_2^{(1)} & \dots & F_r^{(1)} \\ F_1^{(2)} & F_2^{(2)} & \dots & F_r^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & \dots & F_r^{(k)} \end{matrix} \right\|^2}}{\varrho_{k-2}^{2}\, \varrho_{3}^{k-3} \dots \varrho_{2}^{k-2}\, \varrho_{1}^{k-1}\, s'^{\frac{k(k+1)}{2}}} \tag{*}$$

dove le $F_i^{(j)}$ sono le derivate (supposte esistenti) di ordine j delle F_i in P, e ϱ_h è la curvatura h-ma di γ in P ed s' è la derivata prima dell'ascissa curvilinea s di γ calcolata in P. Indicata con M la matrice che compare nel radicale della (*), si osservi che nella matrice $M_{\mathscr{C}}$, relativa all'espressione che dà la curvatura $(k-1)$-ma della curva (12), gli elementi delle ultime $r-k$ verticali sono tutti nulli e quindi tale matrice $M_{\mathscr{C}}$ risulta quadrata. Segue subito che la curvatura ϱ_{k-1} di $\mathscr{C}$ in O è data dalla (16). Nell'analoga matrice $M_{\mathscr{C}'}$ — relativa alla curvatura $(k-1)$-ma della curva (13), le ultime $r-k$ verticali — qualora si suppongano verificate le (14), (15), cioè se gli elementi curvilinei di ordine $k-1$ di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ in O, O' sono totalmente caratteristici — risultano pure costituite da elementi tutti nulli. Segue subito che la curvatura ϱ'_{k-1} di $\mathscr{C}'$ in O' è data dalla (17).

corrispondenti nell'omografia Ω che la T', nell'intorno del primo ordine di O, O', subordina fra le stelle di spazi lineari di dimensione k aventi i centri nei punti O, O'.

Poichè S_k, S'_k — nell'ipotesi che gli elementi E_{k-1}, E'_{k-1} delle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ siano totalmente caratteristici — sono gli spazi k-osculatori in O, O' alle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ ([18]), dalla Proposizione (A) in **3** segue subito che tale prodotto $a_1 a_2 \dots a_k$ è il coefficiente di dilatazione di dimensione k, J_k, della T' in O, secondo la giacitura dell'S_k, k-osculatore in O alla $\mathscr{C}$, cioè dell'S_k (19).

Dalle (16), (17), posto $\bar{s}'/s' = J_1$ e $a_1 a_2 \dots a_k = J_k$ si ottiene la

$$J_k \varrho_{k-1} \varrho_{k-1}^2 \cdots \varrho_2^{k-2} \varrho_1^{k-1} = \varrho'_{k-1} \varrho'^2_{k-2} \cdots \varrho'^{k-2}_2 \varrho'^1_{k-1} J_1^{\frac{k(k+1)}{2}} \tag{20}$$

dalla quale segue subito (salvo lo scambio degli apici con le sopralineature nel secondo membro) la (2) del paragrafo **1**. Risulta così dimostrato il Teorema II anche nel Caso (b).

Il Teorema II espresso dalla (20) $\big($o dalla (2)$\big)$ generalizza il Teorema I: infatti dalla (20) $\big($o dalla (2)$\big)$, per $k = r$, si ottiene la (9) $\big($o la (1)$\big)$.

([18]) Si veda la nota ([14]) a piè di pagina. Osserviamo anche che, essendo gli elementi E_{k-1}, E'_{k-1} delle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ totalmente caratteristici, si corrispondono in Ω, e quindi in ogni omografia tangente alla T' in O, O', anche tutte le coppie di spazi S_h, S'_h ($h = 1, 2, \dots, k-2$), h-osculatori in O, O' alle curve $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ (oltre a quelli di dimensione $k-1$ e k).

* * *