Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 67-77

DANIELA MONTEVERDI (*)

SH a più sorte di variabili. (**)

Nel presente lavoro viene affrontato il problema di estendere alle SH con più sorte di variabili i concetti di soddisfazione e di verità introdotti in [**5**] per le SH in una $\mathscr{L}$-struttura definita su un oggetto di una categoria con prodotti finiti.

Per comodità e anche perchè nella letteratura non c'è uniformità di convenzioni, premetto un primo paragrafo in cui descrivo un linguaggio (concreto) con più sorte di variabili e richiamo le principali nozioni ad esso relative (formule, strutture, verità). Nei paragrafi successivi, dopo aver introdotto le SH con più sorte di variabili e le strutture (a più sorte) in una categoria, passo a definire i concetti di soddisfazione e di verità estendendo e generalizzando, in un certo senso, i risultati di [**2**]. Il lavoro si chiude con l'esame di alcune corrispondenze particolari; si trova così che i concetti di corrispondenza suriettiva, iniettiva etc., sono adeguatamente generalizzati alle categorie dalle definizioni date in [**4**], mentre per il concetto di composizione ci ritroviamo di fronte alla stessa situazione, già esaminata in [**1**], per il caso di una sola sorta.

1.1. - Linguaggio $\mathscr{L}$ con più sorte di variabili.

I simboli del nostro linguaggio $\mathscr{L}$ sono:

1) le costanti logiche: *a*) connettivi proposizionali,

b) quantificatori,

c) parentesi e virgola.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (Ricercatore senza assegno), durante il periodo di godimento di una borsa di studio del C.N.R. afferente alle discipline algebriche e geometriche. — Ricevuto: 3-V-1973.

2) Le variabili individuali, che costituiscono una famiglia I non vuota di insiemi numerabili a due a due disgiunti, detti « sorte ». Se $i \in I$, si diranno « variabili di sorta i » gli elementi di i. Diremo « tipo » ogni n-upla $\tau = (i_1, \dots, i_n)$ di sorte $n \geqslant 1$.

3) Le costanti non logiche, che si suddividono in

a) un insieme R^τ di *predicati di tipo* τ, per ogni tipo τ. Se $\tau \neq \sigma$, supponiamo $R^\tau \cap R^\sigma = \emptyset$,

b) un insieme $C^{(i)}$ di *costanti individuali di sorta* i, per ogni $i \in I$. Se $i \neq j$, supponiamo $C^{(i)} \cap C^{(j)} = \emptyset$,

c) un insieme $F^{(i,\tau)}$ di *simboli funzionali*, per ogni sorta i e per ogni tipo τ. Se $(i, \tau) \neq (j, \sigma)$, supponiamo $F^{(i,\tau)} \cap F^{(j,\sigma)} = \emptyset$.

Una successione finita di simboli di $\mathscr{L}$ si dice « espressione » di $\mathscr{L}$. Le espressioni sensate di $\mathscr{L}$ sono i termini e le formule.

I termini costituiscono una famiglia di insiemi $T^{(i)}$ così definiti per ricursione:

I) ogni variabile e ogni costante individuale di sorta i appartiene a $T^{(i)}$,

II) ogni espressione della forma $f(t_1, \dots, t_n)$, dove $f \in F^{(i,\tau)}$ e $\tau = (i_1, \dots, i_n)$ e $t_k \in T^{(i_k)}$ per ogni $1 \leqslant k \leqslant n$, appartiene a $T^{(i)}$.

Gli elementi di $T^{(i)}$ si dicono « termini di sorta i ».

La sorta di un termine è univocamente determinata, poichè due diversi insiemi $T^{(i)}$ sono sempre disgiunti.

L'insieme delle formule di $\mathscr{L}$ è così definito, per ricursione:

I) ogni espressione della forma $R(t_1, \dots, t_n)$ dove R è predicato di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_n)$ e $t_k \in T^{(i_k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, è una formula, detta « formula atomica »,

II) ogni espressione della forma $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \wedge B)$, $((\forall x)A)$, $((\exists x)A)$, dove A e B sono formule e x una variabile, è una formula.

1.2. - $\mathscr{L}$-strutture.

Una $\mathscr{L}$-struttura o interpretazione di $\mathscr{L}$ è per definizione una coppia $\mathfrak{M} = \langle (M_i)_{i \in I}, \Psi \rangle$, dove il primo elemento è una famiglia di insiemi non vuoti detti « insiemi base della struttura» e Ψ è una funzione, detta « funzione di interpretazione », definita sull'insieme delle costanti non logiche di $\mathscr{L}$ e tale che:

1) se $R \in R^{(i_1, \dots, i_n)}$, $n > 0$ qualunque, allora $\Psi(R) \subseteq M_{i_1} \times \dots \times M_{i_n}$,

2) se $c \in C^{(i)}$ allora $\Psi(c) \in M_i$,

3) se $f \in F^{(i,(i_1, \dots, i_n))}$, $n > 0$ qualunque, allora $\Psi(f)\colon M_{i_1} \times \dots \times M_{i_n} \to M_i$.

1.3. - Interpretazione dei termini e soddisfazione.

Se $i \in I$, dicesi «successione di sorta i» ogni elemento di M_i^i, cioè ogni applicazione da i ad M_i.

Data una successione s di sorta i, definiamo $s_\Psi: T^{(i)} \to M_i$ come segue

I) $s_\Psi(x) = s(x) \in M_i, \ x \in i$;

II) $s_\Psi(c) = \Psi(c) \in M_i, \ c \in C^{(i)}$;

III) $s_\Psi(f(t_1, \dots, t_n)) = \Psi(f)(s_\Psi(t_1), \dots, s_\Psi(t_n)) \in M_i, \ f \in F^{(i,(i_1, \dots, i_n))}$,

quando il primo membro ha senso.

Dicesi *successione* (*in* $\mathfrak{M}$) ogni elemento di $\prod_{i \in I} M_i^i$.

Se s è una successione, per ogni $i \in I$, $s(i)$ è una successione di sorta i. Indichiamo poi con $s_\Psi: \bigcup_{i \in I} T^{(i)} \to \bigcup_{i \in I} M_i$ la funzione così definita: se $t \in T^{(i)}$, $s_\Psi(t) = s(i)_\Psi(t)$.

Sia ora $R(t_1, \dots, t_n)$ una formula atomica con R di tipo $(i_1, \dots, i_n)$ e sia s una successione in $\mathfrak{M}$; si dirà che R è soddisfatta da s in $\mathfrak{M}$ (in simboli: $\models_{\mathfrak{M}} R(t_1, \dots, t_n)[s]$) se e solo se $(s_\Psi(t_1), \dots, s_\Psi(t_n)) \in \Psi(R)$.

Il concetto di soddisfazione si estende a tutte le formule nel modo consueto.

Una formula di $\mathscr{L}$ è *vera* in $\mathfrak{M}$ se e solo se è soddisfatta in $\mathfrak{M}$ da tutte le successioni s.

2.1. - Formule SH con più sorte di variabili.

D'ora in poi con $\mathscr{L}$ si designerà un linguaggio dei predicati del 1° ordine con più sorte di variabili, privo di simboli funzionali e con un predicato (detto di uguaglianza) $E^{(i,i)}$ per ogni $i \in I$.

Se $\tau = (i_1, \dots, i_n)$ è un tipo, si dirà *tipo parziale di* τ ogni segmento iniziale $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ di τ, con $1 \leqslant k \leqslant n$; ovviamente un tipo parziale di un tipo è ancora un tipo. Sia Ω l'insieme dei predicati di $\mathscr{L}$ e sia Ω^* l'estensione di Ω ottenuta aggiungendovi, per ogni sorta i e ogni tipo τ, una infinità numerabile $f_1^{(i,\tau)}, f_2^{(i,\tau)}, \dots$ di simboli funzionali e, per ogni $i \in I$, una successione $a_1^i, a_2^i, \dots$ di costanti individuali di sorta i.

Definizione di « termini elementari » (astratti) di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_n)$ e sorta i:

1) ε_k^τ, $1 \leqslant k \leqslant n$, è un termine elementare di tipo τ e sorta i_k,

2) $f^{(i,(i_1))}\ \varepsilon_1^\tau$ è un termine elementare di tipo τ e sorta i,

3) $f^{(i,\sigma)}\{\varepsilon_1^\tau, \varepsilon_2^\tau, \dots, \varepsilon_p^\tau\}$, dove $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $1 \leqslant p \leqslant n$, è un termine elementare di tipo τ e sorta i,

4) ca^τ, dove $c \in C^{(i)}$, è un termine elementare di tipo τ e sorta i.

Chiameremo « SHE atomica » (di tipo ϱ) ogni espressione della forma $(P(t_1, \dots, t_m))$, dove P è un predicato di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_m)$, $t_1, \dots, t_m$ sono termini elementari dello stesso tipo ϱ (che sarà detto anche *tipo della formula atomica*) e t_j è di sorta i_j, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Definizione di SHE di tipo τ:

1) ogni SHE atomica di tipo τ è una SHE di tipo τ,

2) ogni congiunzione di SHE atomiche di tipo τ è una SHE di tipo τ,

3) se $H_1, H_2, \dots, H_n$, H sono SHE atomiche di tipo τ allora l'espressione $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow H$ è una SHE di tipo τ.

Definizione di SH di tipo τ:

sono SH di tipo τ tutte le SHE di tipo τ e le congiunzioni di SHE di tipo τ.

2.2. - $\mathscr{L}$-strutture (in $\mathscr{K}$) e interpretazioni.

Sia $\mathscr{K}$ una categoria con prodotti finiti. Consideriamo una famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di oggetti di $\mathscr{K}$ non vuoti (nel senso che $[\mathbf{1}, A_i] \neq \emptyset$), e una funzione Φ che a ciascun predicato P di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_m)$ associ un sottoggetto di $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_m}$ e ad ogni predicato $E^{(i,i)}$ associ il sottoggetto Δ_{A_i} di $A_i \times A_i$. Ogni coppia $\mathscr{A} = \langle (A_i)_{i \in I}, \Phi \rangle$ si dirà *$\mathscr{L}$-struttura* (in $\mathscr{K}$).

Consideriamo una famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di oggetti di $\mathscr{K}$ non vuoti e una funzione Φ^* che associ a ciascun predicato P di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_m)$ un sottoggetto di $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}$, a ciascun predicato $E^{(i,i)}$ il sottoggetto Δ_{A_i} di $A_i \times A_i$, e a ciascun simbolo funzionale $f^{(i,\sigma)}$ con $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ un morfismo

$$\Phi^*(f^{(i,\sigma)}) \colon A_{j_1} \times \dots \times A_{j_n} \rightarrow A_i \, .$$

Dicesi *interpretazione* di $\mathscr{L}$ ogni coppia $\langle (A_i)_{i \in I}, \Phi^* \rangle$ che soddisfi le condizioni precedenti.

Se $\mathscr{A} = \langle (A_i)_{i\in I}, \Phi \rangle$ è una $\mathscr{L}$-struttura e $\mathscr{A}^* = \langle (B_i)_{i\in I}, \Phi^* \rangle$ una interpretazione, diremo che « $\mathscr{A}^*$ è associata ad $\mathscr{A}$ » se per ogni $i \in I$, $A_i = B_i$ e Φ è la restrizione ad Ω di Φ^*.

Estendiamo Φ ai termini elementari di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_n)$ e sorta i:

I) $\Phi^*(\varepsilon_k^\tau) = \varepsilon_k \colon A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n} \to A_{i_k}$,

II) $\Phi^*(f^{(i,(i_1))} \varepsilon_1^\tau) = \Phi^*(f^{(i,(i_1))}) \varepsilon_1 \colon A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n} \xrightarrow{\varepsilon_1} A_{i_1} \xrightarrow{\Phi^*(f)} A_i$,

III) Se $\sigma = (i_1, \dots, i_r)$ è un tipo parziale di τ allora

$$\Phi^*(f^{(i,\sigma)}\{\varepsilon_1^\tau, \dots, \varepsilon_r^\tau\}) = \Phi^*(f^{(i,\sigma)})\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\} \colon A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n} \xrightarrow{\{\dots\}} A_{i_1} \times \dots \times A_{i_r} \xrightarrow{\Phi^*(f)} A_i\,,$$

IV) se $c \in C^{(i)}$, $\Phi^*(ca^\tau) \colon A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n} \to 1 \xrightarrow{\Phi^*(c)} A_i$.

2.3. - Soddisfazione e verità.

Sia $H = P(t_1, \dots, t_n)$ una SHE atomica con più sorte di variabili di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_m)$, e sia $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ il tipo di P.

Sia $\mathscr{A}^* = \langle (A_i)_{i\in I}, \Phi^* \rangle$ una interpretazione e sia $g \colon X \to A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}$. Diremo che « H è soddisfatta in $\mathscr{A}^*$ da g » (e scriveremo $\models_{\mathscr{A}^*} H[g]$) se

$$\{\Phi^*(t_1), \dots, \Phi^*(t_n)\}\, g \leqslant u_p$$

essendo $u_p \colon R_p \rightarrowtail A_{j_1} \times \dots \times A_{j_n}$ un rappresentante di $\Phi^*(P)$.

Questa definizione fornisce poi il concetto di soddisfazione per una SH a più sorte di variabili qualunque, purchè si interpretino i connettivi $\wedge$ ed $\to$ nel modo consueto.

Sia H una SH a più sorte di variabili di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_m)$ e sia $\mathscr{A}^* = \langle (A_i)_{i\in I}, \Phi^* \rangle$ una interpretazione. Diremo che « H è vera in $\mathscr{A}^*$ », (e scriveremo $\models_{\mathscr{A}^*} H$), se per ogni oggetto X e per ogni morfismo $g \colon X \to A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}$, si ha $\models_{\mathscr{A}^*} H[g]$.

Sia ora $\mathscr{A}$ una $\mathscr{L}$-struttura ed H una SH a più sorte di variabili. Diremo che « H è vera in $\mathscr{A}$ » se esiste una interpretazione $\mathscr{A}^*$ associata ad $\mathscr{A}$ in cui H è vera.

Lemma 0. *Sia $P(t_1, \dots, t_n)$ una formula atomica di tipo $\tau = (i_1, \dots, i_m)$ e sia $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ il tipo di P. Sia $\mathscr{A}^* = \langle (A_i)_{i\in I}, \Phi^* \rangle$ una interpretazione e* *sia* $u: R \to A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_n}$ *un rappresentante di* $\Phi^*(P)$. *Allora* $\models_{\mathscr{A}^*} P(t_1, \ldots, t_n)$ *se e solo se* $\{\Phi^*(t_1), \ldots, \Phi^*(t_n)\} \leqslant u$.

Dimostrazione. Ovvia [1].

3.1. - Corrispondenze particolari.

Sia $u: R \rightarrowtail A \times B$ una corrispondenza fra A e B.

Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio con due sorte di variabili, $I = \{1, 2\}$ e con un predicato P di tipo $(1, 2)$.

Sia $\mathscr{A} = \langle (A, B), \Phi \rangle$ la struttura ottenuta interpretando P in $[u]$. Valgono allora i lemmi 1-4 seguenti.

Lemma 1. *Consideriamo la seguente* SH *di tipo* $(1, 2, 2)$:

(1) $$P^{(1,2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \wedge P^{(1,2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \to E^{(2,2)}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) .$$

allora $[u]$ *è funzionale se e solo se in* $\mathscr{A}$ *è vera la* (1).

Dimostrazione. Sia $\varepsilon_1 u$ un monomorfismo e sia $g: X \to A \times B \times B$ tale che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant u$ ed $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g \leqslant u$, diciamo $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = ua$ ed $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g = ub$, dove $a, b: X \to R$. Devo provare che $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} g \leqslant \Delta_B$. Dalle ipotesi ho che $\varepsilon_1 ua = \varepsilon_1 g = \varepsilon_1 ub$. Ma $\varepsilon_1 u$ è mono, quindi $a = b$. Ora

$$\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} g = \{\varepsilon_2 ua, \varepsilon_2 ub\} = \{\varepsilon_2 ua, \varepsilon_2 ua\} = \{1_B, 1_B\} \varepsilon_2 ua \leqslant \Delta_B .$$

Viceversa, siano $a, b: X \to R$ tali che $\varepsilon_1 ua = \varepsilon_1 ub$. Prendo

$$g = \{\varepsilon_1 ua, \varepsilon_2 ua, \varepsilon_2 ub\}: X \to A \times B \times B .$$

Ho che

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = \{\varepsilon_1 ua, \varepsilon_2 ua\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} ua = ua \leqslant u ,$$

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g = \{\varepsilon_1 ub, \varepsilon_2 ub\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} ub = ub \leqslant u .$$

Quindi anche $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} g \leqslant \{1_B, 1_B\}$ vale a dire $\varepsilon_2 ua = \varepsilon_2 ub$. Ma per ipotesi $\varepsilon_1 ua = \varepsilon_1 ub$, ed essendo u mono, si ha $a = b$.

---

[1] Cfr. [**3**].

Lemma 2. *Consideriamo la seguente* SH *di tipo* (1, 1, 2):

$$P^{(1,2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \wedge P^{(1,2)}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \to E^{(1,1)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) . \tag{2}$$

Allora una interpretazione $[u]$ *di* P *è iniettiva se e solo se in* $\mathscr{A}$ *è vera la* (2).

Dimostrazione. Del tutto analoga a quella del Lemma 1.

Lemma 3. *Si consideri la seguente* SH *di tipo* (1):

$$P^{(1,2)}(\varepsilon_1^{(1)}, f^{(2,(1))}\varepsilon_1^{(1)}) . \tag{3}$$

Allora $[u]$ *è ovunque definita se e solo se la* (3) *è vera in* $\mathscr{A}$.

Dimostrazione. Poichè la (3) è atomica, sono nelle ipotesi del Lemma 0 del paragrafo precedente. Sia $k\colon A \to R$ tale che $\varepsilon_1 uk = 1_A$ e sia $\mathscr{A}^* = \langle (A, B), \Phi^* \rangle$ una interpretazione associata ad $\mathscr{A}$ in cui $\Phi^*(f) = \varepsilon_2 uk\colon A \to B$. Si ha

$$\{\varepsilon_1^1, \varepsilon_2 uk\varepsilon_1^1\} = \{1_A, \varepsilon_2 uk\} = \{\varepsilon_1 uk, \varepsilon_2 uk\} = uk \leqslant u .$$

Viceversa, sia vera in $\mathscr{A}$ la (3). Allora esiste una interpretazione $\mathscr{A}^* = \langle (A, B), \Phi^* \rangle$ associata ad $\mathscr{A}$, tale che, posto $\varphi = \Phi^*(f)$, si abbia $\{\varepsilon_1, \varphi\varepsilon_1\} \leqslant u$, diciamo $\{\varepsilon_1^1, \varphi\varepsilon_1^1\} = u\,a$, con $a\colon A \to B$. Si ha $\{1_A, \varphi\} = ua$, quindi $1_A = \varepsilon_1 ua$, che è la tesi.

Lemma 4 *Consideriamo la seguente* SH *di tipo* (2):

$$P^{(1,2)}(f^{(1,(2))}\varepsilon_1, \varepsilon_1) . \tag{4}$$

L'interpretazione $[u]$ *di* P *è suriettiva se e solo se la* (4) *è vera in* $\mathscr{A}$.

Dimostrazione. Del tutto analoga a quella del Lemma 3.

Siano $u\colon R \rightarrowtail A \times B$ e $v\colon S \rightarrowtail B \times A$ due corrispondenze.

Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio con due sorte di variabili, $I = \{1, 2\}$ e con due predicati P e Q, rispettivamente di tipo (1, 2) e (2, 1). Sia $\mathscr{A} = \langle (A, B), \Phi \rangle$ la struttura ottenuta interpretando P in $[u]$ e Q in $[v]$. Si ha il

Lemma 5. *Data la* SH *di tipo* (1, 2)

$$[Q^{(2,1)}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \to P^{(1,2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)] \wedge [P^{(1,2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to Q^{(2,1)}(\varepsilon_2, \varepsilon_1)] , \tag{5}$$

essa è vera in $\mathscr{A}$ *se e solo se* $[v]$ *è la corrispondenza inversa di* $[u]$.

Dimostrazione. Supponiamo che $[v]$ sia inversa di $[u]$, cioè che esista un isomorfismo $\alpha\colon R \approx S$ tale che $v\alpha = \{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}u$. Devo provare che $\forall X$ e $\forall g\colon X \to A\times B$, $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}g \leqslant v$ se e solo se $g \leqslant u$. Sia $g \leqslant u$, diciamo $g = ua$, $a\colon X \to R$. Allora $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}g = \{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}ua = v\alpha a \leqslant v$. Sia ora $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}g \leqslant v$, diciamo $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}g = vb$, $b\colon X \to S$. Allora

$$g = \{\varepsilon_2 v, \varepsilon_1 v\}b = \{\varepsilon_1 u\alpha^{-1}, \varepsilon_2 u\alpha^{-1}\}b = u\alpha^{-1}b \leqslant u\,.$$

Viceversa, sia vera in $\mathscr{A}$ la (5) cioè $\forall X$ e $\forall g\colon X \to A\times B$ sia $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}g \leqslant v$ se e solo se $g \leqslant u$ e proviamo che $[v]$ è inversa di $[u]$. Preso $g = u\colon R \to A\times B$, da $u \leqslant u$ si ha $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}u \leqslant v$, quindi esiste $\alpha\colon R \to S$ tale che $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}u = v\alpha$. Posto ora $g = \{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}v\colon S \to A\times B$, si ha per ipotesi che se $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}v \leqslant v$ allora $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}v \leqslant u$. Ma banalmente $v \leqslant v$ quindi esiste $\beta\colon S \to R$ tale che $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}v = u\beta$. Ora $u = \{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}u = \{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}v\alpha = u\beta\alpha$, quindi $\beta\alpha = 1_R$.

Siano $v\colon S \to A\times B$ e $u\colon R \to A$ due corrispondenze e siano P e D due predicati di $\mathscr{L}$ rispettivamente di tipo $(1, 2)$ e (1). Sia $\mathscr{A} = \langle (A, B), \Phi\rangle$ la struttura ottenuta interpretando P in $[v]$ e D in $[u]$. Si ha il

Lemma 6. *Consideriamo la* SH *di tipo* $(1, 2)$

$$[D^{(1)}(\varepsilon_1) \to P^{(1,2)}(\varepsilon_1, f^{(2,(1))}\varepsilon_1)] \wedge [P^{(1,2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to D^{(1)}(\varepsilon_1)]\,. \tag{6}$$

Se essa è vera in $\mathscr{A}$ *allora* $[u]$ *è dominio di* $[v]$.

Dimostrazione. Sia vera in $\mathscr{A}$ la (6). Allora esiste $\mathscr{A}^*$ associata ad $\mathscr{A}$, tale che posto $\psi = \Phi^*(f)$, $\forall X$, $\forall g\colon X \to A\times B$ se $\varepsilon_1 g \leqslant u$ allora $\{\varepsilon_1, \psi\varepsilon_1\}g \leqslant v$ e se $g \leqslant v$ allora $\varepsilon_1 g \leqslant u$.

Devo provare che esiste una ritrazione $\varphi\colon S \to R$ tale che $u\varphi = \varepsilon_1 v$.

Sia $g = v\colon S \to A\times B$. Poichè $v \leqslant v$ allora $\varepsilon_1 v \leqslant u$. Quindi esiste $\varphi\colon S \to R$ tale che $\varepsilon_1 v = u\varphi$. Vediamo che φ è invertibile a destra.

Sia $g = \{u, \psi u\}\colon R \to A\times B$. Poichè $u \leqslant u$ allora $\{\varepsilon_1, \psi\varepsilon_1\}\{u, \psi u\} \leqslant v$, cioè esiste $\varphi'\colon R \to S$ tale che $\{1_A, \psi\}u = v\varphi'$.

Ora $u = \varepsilon_1 v\varphi' = u\varphi\varphi'$, da cui $\varphi\varphi' = 1_R$.

Viceversa ho il

Lemma 6$'$. *Se* $[u]$ *è dominio di* $[v]$ *e* u *è una coritrazione, allora la* (6) *è vera in* $\mathscr{A}$.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $\varphi\colon S \twoheadrightarrow R$ tale che $u\varphi = \varepsilon_1 v$. Detto φ' un inverso destro di φ dimostriamo un risultato più forte di quello enunciato: anzichè assumere che u sia una coritrazione, ci limitiamo a supporre che $\varepsilon_2 v\varphi'\colon R \to B$ sia estendibile ad un morfismo $\psi\colon A \to B$.

Proviamo che $\forall X$ e $\forall g\colon X \to A \times B$, se $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant v$ allora $\varepsilon_1 g \leqslant u$. Sia $a\colon X \to S$ tale che $g = va$. Si ha che $\varepsilon_1 g = \varepsilon_1 va = u\varphi a \leqslant u$.

Ora sia $\varepsilon_1 g = ub$, $b\colon R \to A$, e sia $\mathscr{A}^* = \langle (A, B), \Phi^* \rangle$ una interpretazione associata ad $\mathscr{A}$ con $\Phi^*(f) = \psi\colon A \to B$, dove ψ è una estensione di $\varepsilon_2 v\varphi'$, cioè $\psi u = \varepsilon_2 v \varphi'$. Allora

$$\{\varepsilon_1, \psi\varepsilon_1\} g = \{1_A, \psi\} \varepsilon_1 g = \{1_A, \psi\} ub = \{u, \varepsilon_2 v\varphi'\} b = \{\varepsilon_1 v\varphi', \varepsilon_2 v\varphi'\} b = v\varphi' b \leqslant v .$$

Siano $u\colon R \to A \times B$, $v\colon S \to B \times C$, $w\colon T \to A \times C$ tre corrispondenze e siano P_1, P_2, P_3 predicati di $\mathscr{L}$ rispettivamente di tipo $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,3)$. Sia $\mathscr{A} = \langle (A, B, C), \Phi \rangle$ la struttura ottenuta interpretando P_1 in $[u]$, P_2 in $[v]$ e P_3 in $[w]$. Si ha il

Lemma 7. *Consideriamo la* SH *di tipo* $(1, 3, 2)$

$$\begin{aligned}(7)\qquad & [P_3^{(1,3)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to P_1^{(1,2)}(\varepsilon_1, f^{(2,(1,3))}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \wedge P_2^{(2,3)}(f^{(2,(1,3))}(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_2)] \wedge \\ & \wedge [P_1^{(1,2)}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \wedge P_2^{(2,3)}(\varepsilon_3, \varepsilon_2) \to P_3^{(1,3)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)] .\end{aligned}$$

Se essa è vera in $\mathscr{A}$ *allora* $[w] = [v] \circ [u]$ (2).

Dimostrazione. Sia vera in $\mathscr{A}$ la (7), cioè $\exists \mathscr{A}^*$ tale che, posto $\varphi = \Phi^*(f)\colon A \times C \to B$, si abbia $\forall X$, $\forall g\colon X \to A \times C \times B$,

1) se $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant w$ allora $\{\varepsilon_1, \varphi\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\} g \leqslant u$ e $\{\varphi\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \varepsilon_2\} g \leqslant v$,

2) se $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g \leqslant u$ e $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2\} g \leqslant v$ allora $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant w$.

Proviamo che esiste un morfismo $j\colon T \to R \times S$ che ugualizza $\varepsilon_1 v \varepsilon_2$ ed $\varepsilon_2 u \varepsilon_1$.

Posto $g = \{\varepsilon_1 w, \varepsilon_2 w, \varphi w\}\colon T \to A \times C \times B$, si ha $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = w \leqslant w$. Per la 1) esiste $a\colon T \to R$ tale che $\{\varepsilon_1 w, \varphi w\} = ua$ ed esiste $b\colon T \to S$ tale che $\{\varphi w, \varepsilon_2 w\} = v b$. Poniamo $j = \{a, b\}\colon T \to R \times S$. j ugualizza $\varepsilon_1 v \varepsilon_2$ ed $\varepsilon_2 v \varepsilon_1$ giacchè $\varepsilon_1 v \varepsilon_2 j = \varphi w = \varepsilon_2 u \varepsilon_1 j$. Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 u \varepsilon_1 j &= \varepsilon_1 u \varepsilon_1 \{a, b\} = \varepsilon_1 ua = \varepsilon_1 \{\varepsilon_1 w, \varphi w\} = \varepsilon_1 w , \\ \varepsilon_2 v \varepsilon_2 j &= \varepsilon_2 v \varepsilon_2 \{a, b\} = \varepsilon_2 v\mathrm{b} = \varepsilon_2 \{\varphi w, \varepsilon_2 w\} = \varepsilon_2 w ,\end{aligned}$$

da cui $\alpha j = w$, dove $\alpha = \{\varepsilon_1 u \varepsilon_1, \varepsilon_2 v \varepsilon_2\}$.

---

(2) Cfr. [**3**].

Infine $\forall j\colon T' \to R \times S$ che ugualizzi $\varepsilon_1 v \varepsilon_2$ ed $\varepsilon_2 u \varepsilon_1$ si ha $\alpha j' \leqslant w = \alpha j$. Infatti preso $g = \{\varepsilon_1 \alpha j', \varepsilon_2 \alpha j', \varepsilon_1 v \varepsilon_2\}\colon T' \to A \times C \times B$,

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g = \{\varepsilon_1 u \varepsilon_1 j', \varepsilon_1 v \varepsilon_2 j'\} = \{\varepsilon_1 u \varepsilon_1, \varepsilon_2 u \varepsilon_1\} j' = u \varepsilon_1 j' \leqslant u ,$$

$$\{\varepsilon_3, \varepsilon_2\} g = \{\varepsilon_1 v \varepsilon_2 j', \varepsilon_2 v \varepsilon_2 j'\} = v \varepsilon_2 j' \leqslant v .$$

Quindi per la 2) si ha $\{\varepsilon_1 \alpha j', \varepsilon_2 \alpha j'\} = \alpha j' \leqslant w$.

Lemma 7'. *Se $[w] = [v] \circ [u]$ e w è coritrazione, allora la (7) è vera in $\mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $j\colon T \to R \times S$ tale che

1) $\varepsilon_1 v \varepsilon_2 j = \varepsilon_2 u \varepsilon_1 j$,

2) $\alpha j = w$ dove $\alpha = \{\varepsilon_1 u \varepsilon_1, \varepsilon_2 v \varepsilon_2\}$,

3) $\forall j'\colon T' \to R \times S$ tale che $\varepsilon_1 v \varepsilon_2 j' = \varepsilon_2 u \varepsilon_1 j'$, si ha $\alpha j' \leqslant w$.

Invece di utilizzare in tutta la sua potenza l'ipotesi che w sia una coritrazione è sufficiente supporre che $\varepsilon_2 u \varepsilon_1 j\colon T \to B$ sia estendibile ad un morfismo $\varphi\colon A \times C \to B$.

Allora esiste una interpretazione $\mathscr{A}^*$ associata ad $\mathscr{A}$ con $\Phi^*(f)\colon A \times C \to B$. Infatti basta porre $\Phi^*(f) = \varphi$, ed essendo φ una estensione di $\varepsilon_2 u \varepsilon_1 j$, si avrà $\varphi w = \varepsilon_2 u \varepsilon_1 j$. Inoltre $\forall X$, $\forall g\colon X \to A \times C \times B$ tale che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant w$ si ha

$$\{\varepsilon_1, \varphi\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\} g \leqslant u .$$

Infatti per ipotesi esiste $c\colon X \to T$ tale che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = wc$, quindi

$$\{\varepsilon_1, \varphi\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\} g = \{\varepsilon_1 wc, \varphi wc\} = \{\varepsilon_1 wc, \varepsilon_2 u \varepsilon_1 jc\} =$$

$$= \{\varepsilon_1 u \varepsilon_1 jc, \varepsilon_2 u \varepsilon_1 jc\} = u \varepsilon_1 jc \leqslant u .$$

Infine provo che $\forall X$, $\forall g\colon X \to A \times C \times B$ tale che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g \leqslant u$ e $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2\} g \leqslant v$ si ha $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant w$.

Infatti per ipotesi esiste $a\colon X \to R$ tale che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g = ua$ ed esiste $b\colon X \to S$ tale $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = vb$. Allora

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = \{\varepsilon_1 ua, \varepsilon_2 vb\} .$$

Ora, il morfismo $j = \{a, b\}\colon X \to R \times S$ ugualizza $\varepsilon_2 u \varepsilon_1$ ed $\varepsilon_1 v \varepsilon_2$, quindi per la 3) $\alpha j' \leqslant w$. Ma

$$\alpha j' = \{\varepsilon_1 u \varepsilon_1, \varepsilon_2 v \varepsilon_2\}\{a, b\} = \{\varepsilon_1 ua, \varepsilon_2 vb\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \,.$$

Quindi la (7) è vera in $\mathscr{A}^*$ e di conseguenza è vera in $\mathscr{A}$.

Bibliografia.

[1] T. Montali, *Pseudolimiti e formule SH*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 245-258.

[2] D. Monteverdi, *SH relative e pseudolimiti*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972), 189-194.

[3] M. Servi, *Alcune proprietà delle relazioni su un oggetto di una categoria*, Symposia Mathematica **5** (1971), 150-165.

[4] M. Servi, *Una questione di teoria dei modelli nelle categorie con prodotti finiti*, Matematiche (Catania) **26** (1971), 307-324.

[5] M. Servi, *Questioni di algebra universale in una categoria astratta*, Ann. Univ. Ferrara **13** (1969), 93-116.

* * *