Riv. Mat. Univ. Parma (2) 12 (1971), 245-258

TIZIANA MONTALI (*)

Pseudolimiti e formule SH. (**)

1.

Sia A un insieme, $h: A \to A$ un'applicazione, $C \subseteq A$. Consideriamo un linguaggio $\mathscr{L}$, del primo ordine con uguaglianza, costituito da un predicato unario P e da un simbolo funzionale unario ω. Consideriamo la $\mathscr{L}$-struttura $(A; C, h)$, dove C è l'interpretazione di P e h l'interpretazione di ω. La formula

$$(1) \qquad (\forall y) \ \big(P(y) \leftrightarrow (\exists x)(\omega(x) = y)\big)$$

è vera in $\mathscr{A}$ se e solo se C è l'immagine di h. La (1), in forma aperta di SKOLEM, fornisce la seguente SH (di rango 2)

$$H_1: \qquad \big(P(\varepsilon_1) \to \omega f \varepsilon_1 = \varepsilon_1\big) \wedge \big(\omega\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \to P(\varepsilon_1)\big) \ (^1) .$$

Dato un morfismo h: $A \to A$ in una categoria $\mathscr{K}$ con prodotti finiti ed un sottoggetto $C \overset{u}{\rightarrowtail} A$, è naturale chiedersi quali rapporti esistano fra i seguenti due fatti:

(i) $[u]$ è l'immagine forte di h;

(ii) $\underset{\mathscr{A}}{\models} H_1$, ove $\mathscr{A}$ è la $\mathscr{L}$-struttura (in $\mathscr{K}$) ottenuta interpretando ω in h e P in $[u]$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto: 22-X-1971.

(1) Si noti che strutture come la $\mathscr{A}$ non sono state contemplate in [3]; per ovviare a questo inconveniente, basta riferirsi a linguaggi $\mathscr{L}$ contenenti due classi $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ di simboli funzionali e parlare di «$\mathscr{L}$-struttura» se si sono interpretati i simboli di $\mathscr{F}_1$, e di «$\mathscr{L}$-interpretazione» se si sono interpretati anche i simboli di $\mathscr{F}_2$. Nel nostro caso $\omega \in \mathscr{F}_1$, $f \in \mathscr{F}_2$.

La risposta a tale quesito è fornita dai seguenti due teoremi, i quali mostrano fino a dove si spinga l'analogia col caso concreto ($\mathscr{K} = \mathfrak{S}$).

Teorema 1. *Se* $\models_{\mathcal{A}} H_1$, *[u] è l'immagine forte di h.*

Dimostrazione. Considerando il morfismo $g = \{h, 1_A\}: A \to A^2$, si ha $h\varepsilon_2 g = h = \varepsilon_1 g$ e quindi, poichè per ipotesi $\models_{\mathcal{A}} H_1$, $\varepsilon_1 g \leqslant u$, o anche $h \leqslant u$. Ciò significa che esiste un morfismo $\psi: A \to C$ tale che $h = u\psi$.

Per dimostrare che ψ è una ritrazione, si consideri una $\mathscr{L}$-interpretazione $\mathscr{A}^*$ associata ad $\mathscr{A}$ e tale che $\models_{\mathcal{A}^*} H_1$; sia f^* l'interpretazione in $\mathscr{A}^*$ di f. Preso il morfismo $g = \{u, f^*u\}: C \to A^2$, per esso si ha $\varepsilon_1 g \leqslant u$ e quindi $hf^*u = u$ cioè $u\psi f^* u = u$ e quindi $\psi f^* u = 1$.

Teorema 2. *Il morfismo h ammetta immagine forte [u]; se u è una coritrazione, allora* $\models_{\mathcal{A}} H_1$.

Dimostrazione. Sia $h = u\psi$, con ψ ritrazione e u coritrazione, diciamo $\psi\psi' = 1$ e $u'u = 1$. Posto $f^* = \psi' u'$, vogliamo mostrare che la $\mathscr{L}$-interpretazione $\mathscr{A}^*$ che interpreta f in f^* verifica la H_1.

Si considerino un oggetto X di $\mathscr{K}$ e un morfismo $g: X \to A^2$ tale che $\varepsilon_1 g \leqslant u$, diciamo $\varepsilon_1 g = ua$. Si ha allora

$$hf^* \varepsilon_1 g = u\psi\psi' u' ua = ua = \varepsilon_1 g \, .$$

Sia inoltre $h\varepsilon_2 g = \varepsilon_1 g$; allora

$$\varepsilon_1 g = h\varepsilon_2 g = u\psi\varepsilon_2 g \leqslant u \, .$$

Si può perciò concludere che $\models_{\mathcal{A}^*} H_1$, e quindi $\models_{\mathcal{A}} H_1$.

Si può mostrare con un esempio che se h ammette immagine forte, ma questa non è una coritrazione, non necessariamente H_1 è vera in $\mathscr{A}$.

Si consideri la categoria $\mathfrak{S}$ degli insiemi; in essa si considerino gli oggetti $A = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0, 1\}$ e l'applicazione $h: A \to A$ così definita: $h(0) = 0$, $h(1) = 0$, $h(2) = 0$; come è facile verificare, h ammette immagine forte $[u]$, ove $u: C \rightarrowtail A$ è l'inclusione, diremo $h = u\psi$, con $\psi: A \to C$ è l'applicazione che opera come h; indichiamo con $\psi': C \to A$ l'applicazione che opera in questo modo: $\psi'(0) = 1$, $\psi'(1) = 2$; naturalmente $\psi\psi' = 1_C$. Si consideri la sottocategoria $\mathscr{C}$ di $\mathfrak{S}$ generata dai morfismi ε_1, ε_2, Δ_A, $\{u, \psi'\}$, $\{\psi', u\}$, $\{1, h\}$, $\{h, 1\}$; naturalmente $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C} = \{A, C, A^2\}$.

Si noti che $(A^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ è prodotto di A per A anche in $\mathscr{C}$. È facile verificare che anche in $\mathscr{C}$, $[u]$ è l'immagine forte di h, ma non esiste alcun morfismo f^* tale che in $\mathscr{A}^*$ sia vera la (H_1) (2).

2.

Si consideri la seguente SH:

H_2: $$\big(P(\varepsilon_1) \to (Q(f\varepsilon_1) \wedge S(f\varepsilon_1, \varepsilon_1))\big) \wedge \big((Q(\varepsilon_1) \wedge S(\varepsilon_2, \varepsilon_1)) \to P(\varepsilon_1)\big)$$

associata alla formula

(2) $$P(y) \leftrightarrow ((\exists x)\, Q(x) \wedge S(x, y))$$

che definisce l'immagine di un sottoinsieme di A in una relazione binaria su A.

Sia $\mathscr{A}$ la struttura su un oggetto A (3) ottenuto interpretando P in β, S in ϱ e Q in α, ove $\alpha = [A' \overset{i}{\rightarrowtail} A]$, $\varrho = [R \rightarrowtail A^2]$, $\beta = [C \overset{u}{\rightarrowtail} A]$.

Con tali notazioni si ha:

Teorema 3. *Se* $\models_{\mathscr{A}} H_2$, *allora* $\beta = \varrho(\alpha)$ (4).

Dimostrazione. Si scelga $g = \{u, u\}$, per cui $\varepsilon_1 g \leqslant u$. Si sa per ipotesi che esiste un morfismo f^* tale che, detta $\mathscr{A}^*$ l'interpretazione associata ad $\mathscr{A}$ ottenuta interpretando f in f^*, sia $\models_{\mathscr{A}^*} H_2$, perciò si ha

$$\{f^* \varepsilon_1 g,\ \varepsilon_1 g\} \leqslant v\,, \qquad f^* \varepsilon_1 g \leqslant i\,,$$

diciamo

$$\{f^* \varepsilon_1 g,\ \varepsilon_1 g\} = va\,, \qquad f^* \varepsilon_1 g = ib\,,$$

per cui $f^* u = \varepsilon_1 va$, $u = \varepsilon_2 va$, $f^* u = ib$, e quindi $\varepsilon_1 va = ib$. Allora la famiglia

---

(2) La categoria $\mathscr{C}$ non ha prodotti finiti, ma se si considera la minima categoria $\mathscr{C}'$ chiusa rispetto ai prodotti finiti di $\mathfrak{S}$ e contenente $\mathscr{C}$ come sottocategoria, neppure in essa esistono morfismi f^* tali che in $\mathscr{A}$ sia vera la H_1.

(3) In tutto il lavoro ci si riferisce ad una fissata categoria $\mathscr{K}$ con prodotti finiti.

(4) Per questo simbolo cfr. [**2**].

$(C \xrightarrow{b} A',\ C \xrightarrow{a} R,\ C \xrightarrow{u} A)$ è compatibile per il diagramma

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "i"] & A \\ R \arrow[ur, "\varepsilon_1 v"] \arrow[dr, "\varepsilon_2 v"'] & \\ & A \end{tikzcd} .$$

Sia data ora una qualunque famiglia compatibile per il diagramma precedente $(K \xrightarrow{s} A',\ K \xrightarrow{t} R,\ K \xrightarrow{c} A)$. Si consideri ora il morfismo $g\colon K \to A^2$, $g = \{c, is\}$. Si ha allora $\varepsilon_2 g = is \leqslant i$, $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\} g = \{is, c\} = vt \leqslant v$, per cui $c = \varepsilon_1 g \leqslant u$. Ciò significa che esiste un $h\colon K \to C$ tale che $c = uh$.

Conservando le notazioni del teorema precedente si ha il

Teorema 4. *Sia $\beta = \varrho(\alpha)$. Se u è una coritrazione, allora* $\models_{\mathcal{A}} H_2$.

Dimostrazione. Sia $u'\colon A \to C$ un inverso sinistro di u. Poichè u è il sottoggetto di A pseudolimite nel diagramma

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "i"] & A \\ R \arrow[ur, "\varepsilon_1 v"] \arrow[dr, "\varepsilon_2 v"'] & \\ & A \end{tikzcd} ,$$

esiste per esso una famiglia compatibile $(C \overset{u}{\rightarrowtail} A,\ C \xrightarrow{b} A,\ C \xrightarrow{a} R)$.

Si consideri ora un morfismo $g\colon X \to A^2$ tale che $\varepsilon_2 g \leqslant i$ e $\{\varepsilon_2, \varepsilon_1\} g \leqslant v$, diciamo $\varepsilon_2 g = is$, $\varepsilon_2 g = \varepsilon_1 vt$, $\varepsilon_1 g = \varepsilon_2 vb$. Allora $(X \xrightarrow{s} A',\ X \xrightarrow{t} R,\ X \xrightarrow{\varepsilon_1 g} A)$ è una famiglia compatibile, perciò esiste uno ed un solo $k\colon X \to C$ tale che $uk = \varepsilon_1 g$ od anche $\varepsilon_1 g \leqslant u$.

Ora, invece, si consideri il morfismo $g\colon X \to A^2$ tale che $\varepsilon_1 g \leqslant u$, diciamo $\varepsilon_1 g = uh$. Indichiamo con f^* il morfismo $\varepsilon_1 vau'$, da cui

$$f^* \varepsilon_1 g = f^* uh = \varepsilon_1 vah = ibh \leqslant i .$$

Inoltre, essendo $\varepsilon_1 g = uh = \varepsilon_2 vah$, si ha

$$\{f^* \varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = vah \leqslant v .$$

3.

Si consideri ora la SH:

$$H_3: \quad \Big(P(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to \big(Q(\varepsilon_1, f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \wedge V(f(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_2)\big)\Big)\wedge$$
$$\wedge\Big((Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \wedge V(\varepsilon_3, \varepsilon_2)) \to P(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\Big),$$

ottenuta dalla formula

$$P(x, y) \leftrightarrow (\exists z)(Q(x, z) \wedge V(z, y)) \tag{3}$$

esprimente che P è composizione di Q e V.

Sia $\mathscr{A}$ la struttura su un oggetto A ottenuta interpretando P in ϱ_3, Q in ϱ_1, V in ϱ_2, ove $\varrho_3 = [T \overset{w}{\rightarrowtail} A^2]$, $\varrho_1 = [R \overset{u}{\rightarrowtail} A^2]$, $\varrho_2 = [S \overset{v}{\rightarrowtail} A^2]$.

Si ha il seguente

Teorema 5. *Se* $\models_{\mathscr{A}} H_3$, *allora* $\varrho_3 = \varrho_1 \circ \varrho_2$ (5).

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste un morfismo f^* tale che, detta $\mathscr{A}^*$ l'interpretazione associata ad $\mathscr{A}$ ottenuta interpretando f in f^*, sia $\models_{\mathscr{A}^*} H_3$. Si consideri il morfismo $g = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\}\, w\colon T \to A^3$.

Si ha allora $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g = w \leqslant w$ e perciò

$$\{\varepsilon_1, f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\} g \leqslant u\,, \qquad \{f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \varepsilon_2\} g \leqslant v\,;$$

diciamo

$$\{\varepsilon_1, f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\} g = ua\,, \qquad \{f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \varepsilon_2\} g = vb\,,$$

cioè

$$\{\varepsilon_1, f^*\} w = ua\,, \qquad \{f^*, \varepsilon_2\} = vb\,.$$

Ora sia $j = \{a, b\}\colon T \to R \times S$, per cui

$$\varepsilon_2 u \varepsilon_1 j = \varepsilon_2 ua = f^* w = \varepsilon_1 vb = \varepsilon_1 v \varepsilon_2 j\,,$$

cioè j ugualizza $\varepsilon_2 u \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 v \varepsilon_2$,

---

(5) Cfr. [**2**].

Inoltre si ha

$$\alpha(u, v)j = \{\varepsilon_1 u\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 v\varepsilon_2\}\{a, b\} = \{\varepsilon_1 ua,\ \varepsilon_2 vb\} = \{\varepsilon_1 w,\ \varepsilon_2 w\} = w\ .$$

Si consideri ora un qualunque morfismo $j'\colon T' \to R \times S$ che ugualizzi $\varepsilon_2 u\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 v\varepsilon_2$, ed il morfismo $g = \{\varepsilon_1 u\varepsilon_1 j', \varepsilon_2 v\varepsilon_2 j', \varepsilon_2 u\varepsilon_1 j'\}$. Si ha allora

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}\, g = u\varepsilon_1 j' \leqslant u\ , \qquad \{\varepsilon_3, \varepsilon_2\}\, g = v\varepsilon_2 j' \leqslant v\ ,$$

e quindi, per l'ipotesi,

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant w\ ,$$

cioè

$$\alpha(u, v)j' = \{\varepsilon_1 u\varepsilon_1 j', \varepsilon_2 v\varepsilon_2 j'\} \leqslant w = \alpha(u, v)j\ ,$$

ossia

$$\alpha(u, v)j' \leqslant \alpha(u, v)j\ .$$

Conservando le notazioni del Teorema precedente, si ha:

Teorema 6. *Sia* $\varrho_3 = \varrho_1 \circ \varrho_2$ (6). *Se* w *è una coritrazione, allora* $\models_{\mathcal{A}} H_3$.

Dimostrazione. Si indichi con w' un inverso sinistro di w.

Si consideri un morfismo $g\colon X \to A^3$ tale che

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant u\ , \qquad \{\varepsilon_3, \varepsilon_2\} g \leqslant v\ ,$$

diciamo

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} g = ua\ , \qquad \{\varepsilon_3, \varepsilon_2\} g = vb$$

o, in modo equivalente,

$$\varepsilon_1 g = \varepsilon_1 ua\ , \qquad \varepsilon_3 g = \varepsilon_2 ua = \varepsilon_1 vb\ , \qquad \varepsilon_2 g = \varepsilon_2 vb\ .$$

Il morfismo $j' = \{a, b\}\colon A^3 \to R \times S$ ugualizza $\varepsilon_2 u\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 v\varepsilon_2$, perciò, per l'ipotesi

$$\alpha(u, v)j' \leqslant \alpha(u, v)j\ ,$$

cioè

$$\{\varepsilon_1 ua,\ \varepsilon_2 vb\} \leqslant w\ , \qquad \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant w\ .$$

---

(6) Per questo simbolo e per le notazioni usate nel corso della dimostrazione del teorema, si veda [**2**], n. 3, teorema 6.

Si consideri ora un morfismo $g\colon X \to A^3$ tale che $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} g \leqslant w$, cioè tale che esista un $h\colon A^3 \to T$ con $\varepsilon_1 g = \varepsilon_1 wh$, $\varepsilon_2 g = \varepsilon_2 wh$.

Il morfismo $f^* = \varepsilon_2 u \varepsilon_1 jw' = \varepsilon_1 v \varepsilon_2 jw'$ è tale che $\models_{\mathcal{A}^*} H_3$: infatti

$$\{\varepsilon_1,\ f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\} g = \{\varepsilon_1 wh,\ f^* wh\} = \{\varepsilon_1 u \varepsilon_1 jh,\ \varepsilon_2 u \varepsilon_1 jh\} \leqslant u ,$$

Analogamente si mostra che

$$\{f^*\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},\ \varepsilon_2\} g \leqslant v .$$

4.

I tre diagrammi precedenti si prestano ad una naturale generalizzazione.

Si consideri una categoria $\mathscr{K}$ con prodotti finiti e un suo oggetto A. Sia dato un diagramma D siffatto:

i vertici del diagramma siano

$$R_1, \dots, R_n ; \qquad D_0, D_1, \dots, D_n ; \qquad C_1, \dots, C_p ,$$

ove ciascun D_k è una potenza di A, diciamo $A^{\varrho(k)}$, e $C_i = A$ per ciascun C_i; le frecce del diagramma siano

$$u_1, \dots, u_n ; \qquad \theta_1, \dots, \theta_m ; \qquad \eta_1, \dots, \eta_q ,$$

ove

$$u_k\colon R_k \rightarrowtail D_k = A^{\varrho(k)} \qquad (k = 1, 2, \dots, n) ,$$

$$\vartheta_k\colon D_0 \to C_{\beta(k)} , \qquad \vartheta_k = \varepsilon^{\varrho(0)}_{\nu(k)} , \qquad (k = 1, 2, \dots, m),$$

$$\eta_k\colon D_{\alpha(k)} \to C_{\gamma(k)} , \qquad \eta_k = \varepsilon^{\varrho(\alpha(k))}_{\mu(k)} \qquad (k = 1, 2, \dots, q) .$$

Posto $\varrho \circ \alpha = \delta$, si ha $\eta_k\colon A^{\delta(k)} \to A$ (7).

(7) Si noti che il diagramma relativo alla composizione di due relazioni, sebbene non sia di questa forma, è banalmente equivalente ad un diagramma quale quello sotto a sinistra; mentre, analogamente, il diagramma relativo all'immagine forte è equivalente a quello sotto a destra:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail, "u"] & A^2 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[dr, "\varepsilon_2"'] & A & \\
& & A & A^2 \arrow[ul, "\varepsilon_1"'] \arrow[dl, "\varepsilon_2"] \\
S \arrow[r, tail, "v"'] & A^2 \arrow[r, "\varepsilon_2"'] \arrow[ur, "\varepsilon_1"] & A &
\end{tikzcd} , \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\{1_A, h\}"] & A^2 \arrow[r, "\varepsilon_2"] & A \\
& C \arrow[ur, tail, "u"'] &
\end{tikzcd} .$$

Sia inoltre $u_0 \colon R_0 \rightarrowtail D_0$ sottoggetto di D_0.

Si considerino ora le variabili

$$
\begin{gathered}
z_1, z_2, \ldots, z_{\varrho(0)} \\
x^1_1, x^1_2, \ldots, x^1_{\varrho(1)} \\
\ldots\ldots\ldots \\
x^n_1, x^n_2, \ldots, x^n_{\varrho(n)} \\
y_1, y_2, \ldots, y_p
\end{gathered}
$$

e le due formule benformate

$$A'\colon\ z_{\nu(1)} = y_{\beta(1)} \wedge \ldots \wedge z_{\nu(m)} = y_{\beta(m)}\ ,$$

$$A''\colon\ x^{\alpha(1)}_{\mu(1)} = y_{\gamma(1)} \wedge \ldots \wedge x^{\alpha(q)}_{\mu(q)} = y_{\gamma(q)}\ .$$

Associamo al diagramma D la seguente formula benformata di un linguaggio contenente, per ciascun R_k del diagramma, un predicato P_k a $\varrho(k)$ posti:

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & (\forall z_1) \ldots (\forall z_{\varrho(0)})\big(P_0(z_1, \ldots, z_{\varrho(0)}) \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow (\exists x^1_1) \ldots (\exists x^1_{\varrho(1)}) \ldots (\exists x^n_1) \ldots (\exists x^n_{\varrho(n)})(\exists y_1) \ldots (\exists y_q)\cdot \\
& \cdot \big(P_1(x^1_1 \ldots, x^1_{\varrho(1)}) \wedge \ldots \wedge P_n(x^n_1, \ldots, x^n_{\varrho(n)}) \wedge A' \wedge A''\big)\big)\ .
\end{aligned}
$$

Si considerino ora le proiezioni

$$
\begin{array}{lcll}
\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)} & & \left\{\begin{array}{l} \zeta_k = \varepsilon_k \end{array}\right. & (k = 1, 2, \ldots, \varrho(0))\ , \\
\lambda^1_1, \ldots, \lambda^1_{\varrho(1)} & & \lambda^1_k = \varepsilon_{\varrho(0)+k} & (k = 1, 2, \ldots, \varrho(1))\ , \\
\lambda^2_1, \ldots, \lambda^2_{\varrho(2)} & & \lambda^2_k = \varepsilon_{\varrho(0)+\varrho(1)+k} & (k = 1, 2, \ldots, \varrho(2))\ , \\
\ldots\ldots & \text{ove:} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\lambda^n_1, \ldots, \lambda^n_{\varrho(n)} & & \lambda^n_k = \varepsilon_{\varrho(0)+\varrho(1)+\ldots+\varrho(n-1)+k} & (k = 1, 2, \ldots, \varrho(n))\ , \\
\xi_1, \ldots, \xi_p & & \xi_k = \varepsilon_{\varrho(0)+\varrho(1)+\ldots+\varrho(n-1)+\varrho(n)+k} & (k = 1, 2, \ldots, p),
\end{array}
$$

e $r = \varrho(0) + \varrho(1) + \ldots + \varrho(n) + p$ è l'arietà comune delle varie proiezioni.

Vogliamo ora associare alla (4) una opportuna SH, analogamente a quanto fatto per i tre casi particolari nei precedenti paragrafi. A tale scopo consideriamo un linguaggio $\mathscr{L}$ in cui, oltre ai predicati $P_0, P_1, \ldots, P_n$ vi siano i simboli funzionali g^i_j con $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant \max\{\varrho(1), \ldots, \varrho(n)\}$ di arietà $\varrho(0)$, e $f_{\gamma(i)}$ con $1 \leqslant i \leqslant q$, anche essi di arietà $\varrho(0)$. A tale scopo si ponga

$$t = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\},$$

$$t^i_j = g^i_j t \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, \max\{\varrho(1) \ldots, \varrho(n)\}),$$

e si considerino le formule benformate

$$M_1 \qquad \zeta_{\nu(1)} = f_{\beta(1)}\, t \wedge \ldots \wedge \zeta_{\nu(m)} = f_{\beta(m)}\, t,$$

$$M_2 \qquad t^{\alpha(1)}_{\mu(1)} = f_{\gamma(1)} t \wedge \ldots \wedge t^{\alpha(q)}_{\mu(q)} = f_{\gamma(q)}\, t,$$

$$M_3 \qquad \zeta_{\nu(1)} = \xi_{\beta(1)} \wedge \ldots \wedge \zeta_{\nu(m)} = \xi_{\beta(m)},$$

$$M_4 \qquad \lambda^{\alpha(1)}_{\mu(1)} = \xi_{\gamma(1)} \wedge \ldots \wedge \lambda^{\alpha(q)}_{\mu(q)} = \xi_{\gamma(q)}.$$

Ora indicando con

$$H_4 \qquad P_0(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}) \to (P(t^1_1, \ldots, t^1_{\varrho(1)}) \wedge \ldots \wedge P_n(t^n_1, \ldots, t^n_n) \wedge M_1 \wedge M_2),$$

$$H_5 \qquad (P_1(\lambda^1_1, \ldots, \lambda^1_{\varrho(1)}) \wedge \ldots \wedge P_n(\lambda^n_1, \ldots, \lambda^n_{\varrho(n)} \wedge M_3 \wedge M_4) \to P_0(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}),$$

la SH associata alla (4) è la seguente:

$$H \qquad H_4 \wedge H_5.$$

Sia ora $\mathscr{A}$ la struttura che si ottiene interpretando P_0 in $[u_0], \ldots, P_n$ in $[u_n]$. Si ha allora il seguente

Teorema 7. *Se* $\models_{\mathscr{A}} H$, $[u_0]$ *è sottoggetto pseudolimite nel diagramma* D.

Dimostrazione. Consideriamo la $\mathscr{L}$-interpretazione $\mathscr{A}^*$ associata ad $\mathscr{A}$, ottenuta interpretando g^i_j in h^i_j, con $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant \max\{\varrho(1) \ldots, \varrho(n)\}$, e $f_{\gamma(j)}$ in $k_{\gamma(j)}$ con $1 \leqslant j \leqslant q$.

Per definizione di verità di una SH data in [**3**], per ogni oggetto X di $\mathscr{K}$ e per ogni morfismo $g: X \to A^r$ deve essere soddisfatta la formula H. In particolare si consideri $X = P_0$ e si definisca g nel modo seguente

$$\zeta_1 g = \varepsilon_1^{\varrho(0)} u \,, \;\ldots,\; \zeta_{\varrho(0)}\, g = \varepsilon_{\varrho(0)}^{\varrho(0)} u \,,$$

e le rimanenti proiezioni di g siano morfismi qualunque aventi P_0 come dominio e A come codominio. Con tali posizioni si ha

$$\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\}\, g = u_0 \leqslant u_0$$

e perciò

$$\{h_1^1, \ldots, h_{\varrho(1)}^1\}\, u_0 \leqslant u_1 \,, \;\ldots,\; \{h_1^n, \ldots, h_{\varrho(n)}^n\}\, u_0 \leqslant u_0 \,,$$

diciamo

$$\{h_1^i, \ldots, h_{\varrho(i)}^i\}\, u_0 = u_i a_i \,, \qquad \text{con} \qquad a_i\colon\; P_0 \to P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Inoltre

$$\zeta_{\nu(i)}\; g = k_{\beta(i)} u_0 \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$h_{\mu(i)}^{\alpha(i)}\; g = k_{\gamma(i)} u_0 \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, q)\,.$$

Allora, considerando $u_0\colon P_0 \to D_0$, $a_i\colon P_0 \to P_i$ con $1 \leqslant i \leqslant n$, e gli altri morfismi in modo ovvio, si ottiene una famiglia compatibile.

Ora si consideri un qualunque oggetto X di $\mathscr{K}$ e una qualunque famiglia compatibile $(w_0, w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_{2n}, w_{2n+1}, \ldots, w_{2n+p})$ con $w_0\colon X \to D_0$,

$$w_i\colon X \to P_i \;\; (1 \leqslant i \leqslant n); \;\; w_{n+i}\colon X \to D_i \;\; (1 \leqslant i \leqslant n); \;\; w_{2n+i}\colon X \to C_i \;\; (1 \leqslant i \leqslant p).$$

Naturalmente si avrà

$$u_i w_i = w_{n+i} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,, \qquad w_{2n+\beta(i)} = \theta_i w_0 \qquad (i = 1, \ldots, m)\,,$$

cioè $w_{2n+\beta(i)}$ commuta un triangolo del tipo

$$\begin{tikzcd}
A^{\varrho(0)} = D_0 \arrow[rr, "\vartheta_i = \varepsilon_{\nu(i)}"] & & C_{\beta(i)} \\
& X \arrow[ul, "w_0"] \arrow[ur, "w_{2n+\beta(i)}"'] &
\end{tikzcd}$$

e inoltre

$$w_{2n+\gamma(i)} = \eta_i w_{n+\alpha(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)\,,$$

cioè $w_{2n+\gamma(i)}$ commuta un triangolo del tipo

$$\begin{tikzcd}
A^{\delta(i)} = D_{\alpha(i)} \arrow[rr, "\eta_i"] & & C_{\gamma(i)} \\
& X \arrow[ul, "w_{n+\alpha(i)}"] \arrow[ur, "w_{2n+\gamma(i)}"'] &
\end{tikzcd}\,.$$

Si consideri il morfismo g così definito:

$$\begin{cases}
\varepsilon_1 g = \varepsilon_1 w_0\,, \ \ldots,\ \varepsilon_{\varrho(0)}\, g = \varepsilon_{\varrho(0)} w_0\,, \\
\varepsilon_{\varrho(0)+1}\, g = \varepsilon_1 w_{n+1}\,, \ \ldots,\ \varepsilon_{\varrho(0)+\varrho(1)}\, g = \varepsilon_{\varrho(1)}\, w_{n+1}\,, \ \ldots,\ \varepsilon_{r-p}\, g = \varepsilon_{\varrho(n)}\, w_{2n}\,, \\
\varepsilon_{r-p+1}\, g = w_{2n+1}\,, \ \ldots,\ \varepsilon_r g = w_{2n+p}\,.
\end{cases}$$

Per tale g si ha

$$\{\lambda_1^i, \ldots, \lambda_{\varrho(i)}^i\}\, g = w_{n+i} = u_i w_i \leqslant u_i \qquad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

$$\xi_{\beta(i)} g = \varepsilon_{r-p+\beta(i)}\, g = w_{2n+\beta(i)} = \theta_i w_0 = \theta_i \{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\}\, g = \zeta_{\nu(i)}\, g \qquad (i = 1, \ldots, m)\,,$$

e queste ultime uguaglianze valgono perchè sono commutativi i triangoli

$$\begin{tikzcd}
& D_0 = A^{\varrho(0)} \arrow[d, "\vartheta_i = \varepsilon_{\nu(i)}"] \\
X \arrow[ur, "w_0"] \arrow[dr, "w_{2n+\beta(i)}"'] & \\
& C_{\beta(i)}
\end{tikzcd}\,.$$

Inoltre

$$\lambda^{\alpha(i)}_{\mu(i)} g = \eta_i \{\lambda^{\alpha(i)}_1, \ldots, \lambda^{\alpha(i)}_{\alpha(i)}\} g = \eta_i w_{n+\alpha(i)} = w_{2n+\gamma(i)} = \varepsilon_{r-p+\gamma(i)} g = \xi_{\gamma(i)} g$$

$$(i = 1, 2, \ldots, q)\,,$$

poichè sono commutativi i triangoli

$$\begin{tikzcd}
D_{\alpha(i)} \arrow[rr, "\eta_i"] & & C_{\gamma(i)} \\
& X \arrow[ul, "w_{n+\alpha(i)}"] \arrow[ur, "w_{2n+\gamma(i)}"'] &
\end{tikzcd}\quad .$$

Allora si ha

$$\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\} g \leqslant u_0\,,$$

cioè $w_0 \leqslant u_0$, diciamo $w_0 = u_0 b$.

Conservando le notazioni del teorema precedente, si ha:

Teorema 8. *Sia* $u_0 \colon P_0 \rightarrowtail D_0$ *sottoggetto pseudolimite nel diagramma* D. *Se* u_0 *è coritrazione, allora* $\models_{\mathcal{A}} H$.

Dimostrazione. Si supponga che $g \colon X \to A^r$ sia un morfismo tale che si abbia

$$\{\lambda^i_1, \ldots, \lambda^i_{\varrho(i)}\} g \leqslant u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

diciamo

$$\{\lambda^i_1, \ldots, \lambda^i_{\varrho(i)}\} g = u_i w_i\,, \qquad w_i \colon X \to P_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

ed inoltre

$$\zeta_{\nu(i)}\, g = \xi_{\beta(i)}\, g \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\,, \qquad \lambda^{\alpha(i)}_{\mu(i)} g = \xi_{\gamma(i)}\, g \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)\,.$$

Ne discende immediatamente che, considerando

$$\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\}\, g \colon X \to A^{\varrho(0)}\,,$$

$$w_i \colon X \to P_i\,, \qquad \{\lambda^i_1, \ldots, \lambda^i_{\varrho(i)}\}\, g \colon X \to A^{\varrho(i)}\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

e gli altri morfismi definiti in modo opportuno, si ottiene una famiglia compatibile per il diagramma D, perciò

$$\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\}\, g \leqslant u_0 .$$

Abbiamo così mostrato la prima parte del Teorema 8; per dimostrare la seconda, si indichi con u_0' un inverso sinistro di u_0, ricordiamo inoltre che per ipotesi si ha una famiglia compatibile

$$(P_0 \overset{u_0}{\rightarrowtail} D_0,\ P_0 \xrightarrow{a_1} P_1,\ \ldots,\ P_0 \xrightarrow{a_n} P_n,\ P_0 \xrightarrow{a_{n+1}} D_1,\ \ldots,\ P_0 \xrightarrow{a_{2n}} D_n,\ P_0 \xrightarrow{b_1} C_1,\ P_0 \xrightarrow{b_p} C_p).$$

Poichè la famiglia è compatibile, sono commutativi i seguenti triangoli:

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[rr, "u_i"] & & D_i \\ & P_0 \arrow[ul, "a_i"] \arrow[ur, "a_{n+i}"'] & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} D_0 \arrow[rr, "\vartheta_i"] & & C_{\beta(i)} \\ & P_0 \arrow[ul, "u_0"] \arrow[ur, "b_{\beta(i)}"'] & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} D_{\alpha(i)} \arrow[rr, "\eta_i"] & & C_{\gamma(i)} \\ & P_0 \arrow[ul, "a_{n+\alpha(i)}"] \arrow[ur, "b_{\gamma(i)}"'] & \end{tikzcd}$$

perciò

$$a_{n+i} = u_i a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$b_{\beta(i)} = \theta_i\, u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,, \qquad b_{\gamma(i)} = \eta_i a_{n+\alpha(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)\,.$$

Ora si consideri un morfismo $g\colon X \to A^r$ tale che $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\}\, g \leqslant u_0$, diciamo $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\}\, g = u_0 m$ e si ponga:

$$h^i_j = \varepsilon_j a_{n+i} u_0' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \max\{\varrho(1), \ \ldots,\ \varrho(n)\})\,,$$

$$k_{\gamma(i)} = h^{\alpha(i)}_{\mu(i)}\ \text{(8)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)\,.$$

---

(8) Si noti che per ogni coppia i, j tale che $\beta(i) = \gamma(j)$, si ha

$$h_{\gamma(i)} = k_{\gamma(j)} = h^{\alpha(j)}_{\mu(j)} = \varepsilon_{\mu(j)} a_{n+\alpha(j)}\, u_0' = \vartheta_i\,,$$

poichè è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} D_0 \arrow[rr, "\vartheta_i"] & & C_{\beta(i)=\gamma(j)} & & D_{\alpha(j)} \arrow[ll, "\eta_j"'] \\ & & P_0 \arrow[ull, "u_0"] \arrow[urr, "a_{n+\alpha(j)}"'] & & \end{tikzcd} .$$

Con tali posizioni si ha:

$$\{h_1^i, \ldots, h_{\varrho(i)}^i\}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\} g = \{\varepsilon_1 a_{n+i} u_0', \ldots, \varepsilon_{\varrho(i)} a_{n+i} u_0'\} u_0 m =$$

$$= a_{n+i} m = u_i a_i m \leqslant u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$k_{\beta(i)}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\} g = \zeta_{\nu(i)} g \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$k_{\gamma(i)}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\} g = h_{\mu(i)}^{\alpha(i)}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varrho(0)}\} g \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Avendo trovato un $\mathscr{A}^*$ tale che $\models_{\mathscr{A}^*} H$, possiamo concludere che $\models_{\mathscr{A}} H$.

Bibliografia.

[1] F. Galvin, *Horn Sentences*, Ann. Math. Logic **4** (1970), 389-422.

[2] M. Servi, *Alcune proprietà delle relazioni su un oggetto di una categoria*, Symposia Mathematica **5** (1971).

[3] M. Servi, *Una questione di teoria dei modelli nelle categorie con prodotti finiti* (in corso di pubblicazione).

* * *