Riv. Mat. Univ. Parma (2) 12 (1971), 151-165

CORRADO SCARAVELLI (*)

Risoluzione, razionale nelle funzioni date, delle equazioni alle differenze (con un passo $h \neq 0$), d'ordine finito, lineari e a coefficienti periodici di periodo h.

Parte II. - Variabile indipendente reale, ordine generico. (**)

§ 1. - Introduzione.

1.1. – Nella precedente Parte I (cfr. [6]) ho considerato la generale equazione alle differenze, con un passo h ($\neq 0$), d'ordine finito n, lineare, a coefficienti periodici di periodo h,

$$(\mathrm{E}_n) \qquad \tilde{a}_0 u(x+nh) + \tilde{a}_1 u(x+(n-1)h) + \ldots + \tilde{a}_{n-1} u(x+h) + \tilde{a}_n u(x) = f(x) ,$$

dove: x è la variabile indipendente (che suppongo *reale*); h è un « passo » assegnato (pure reale) non nullo; $u(x)$ è la funzione incognita; $f(x)$ è una data funzione (reale o complessa), univoca, definita in modo qualsiasi su un intervallo $x_0 \leqslant x < x_1$ (¹); $\tilde{a}_r \equiv \tilde{a}_r(x; h)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sono date funzioni periodiche di periodo h, cioè date *costanti per l'incremento* h (²).

Nella Parte I (cfr. [6]) ho risolto, con un metodo che generalizza un procedimento seguito da A. MAMBRIANI [3], le equazioni (E_n) alle differenze dei primi tre ordini, dando anche alcuni esempi; in questa Parte II risolvo,

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.. Questo lavoro sarà oggetto di una comunicazione al IX Congresso dell'Un. Mat. Ital. (Bari, 27 settembre - 3 ottobre 1971). — Ricevuto: 30-VI-1971.
(¹) Cfr. l'annotazione (¹) di [6].
(²) Cfr. l'annotazione (²) di [6].

con lo stesso metodo, l'equazione generale (E_n) alle differenze di ordine generico n (³) (cfr. § 2).

Come ho già affermato (cfr. [6], n. **1.3**) il metodo che propongo *è sempre possibile* [quando sia soddisfatta la naturale condizione dell'annotazione (³)], ed *è completamente elementare*, nel senso che la soluzione generale si esprime non solo in termini finiti, ma anche *razionalmente* con i dati coefficienti (costanti per l'incremento h) dell'equazione (E_n), con la funzione data $f(x)$, e con funzioni arbitrarie (anch'esse costanti per l'incremento h).

La soluzione generale dell'equazione (E_n) si ottiene nella forma (cfr. [6], n. **1.3**)

$$u(x) = F(x;h) + U(x;h)\,,$$

dove $F(x;h)$ e $U(x;h)$ sono, rispettivamente, una soluzione particolare di (E_n) e la soluzione generale di $(E_n)_0$ [equazione omogenea corrispondente a (E_n)], entrambe in termini finiti e di forma speciale. Pertanto dirò che:

1°) $F(x;h)$ è *la soluzione elementare* di (E_n);

2°) $U(x;h)$ è *la soluzione generale elementare* di $(E_n)_0$;

3°) $F(x;h) + U(x;h)$ è *la soluzione generale elementare* di (E_n).

In questo lavoro dimostro anche (cfr. § 3) la seguente proprietà fondamentale della soluzione elementare $F(x;h)$ (già annunciata in [6], n. **1.3**):

$F(x;h)$ si può esprimere esplicitamente mediante una qualsiasi soluzione della (E_n).

Indico, infine (cfr. § 4), un semplice esempio: in tale esempio, poichè si sa risolvere l'equazione caratteristica corrispondente, ho potuto indicare come si possa trasformare la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea nella forma che viene data usualmente.

1.2. – Aggiungo ora che: una generica equazione ricorrente, d'ordine finito n, lineare, a coefficienti costanti, della forma

$$(R_n) \qquad a_0\gamma_\nu + a_1\gamma_{\nu-1} + a_2\gamma_{\nu-2} + \ldots + a_n\gamma_{\nu-n} = b_\nu \qquad (\nu = n, n+1, \ldots)\ (^4)\,,$$

ha la soluzione generale (cfr. [3], p. 18, (5)):

$$(1) \qquad \gamma_\nu = \sum_0^\nu {}_s\, b_{\nu-s}\, A_s \qquad (\nu = n, n+1, \ldots),$$

(³) L'equazione (E_n) è *d'ordine* n se è contemporaneamente $\tilde{a}_0 \not\equiv 0$, $\tilde{a}_n \not\equiv 0$. Qui, per semplicità, suppongo che sia $\tilde{a}_0 \neq 0$, $\tilde{a}_n \neq 0$ $\forall x \in \big(x_0 \ldots (x_0 + h) -\big)$ (e allora sarà $\tilde{a}_0 \neq 0$, $\tilde{a}_n \neq 0$ $\forall x$ reale).

(⁴) In (R_n) la γ_ν $(\nu = n, n+1, \ldots)$ è la successione incognita; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono date costanti (rispetto a ν); e b_ν $(\nu = n, n+1, \ldots)$ è una data successione. L'equazione (R_n) è proprio *d'ordine* n se è contemporaneamente $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ (cfr. [6], n. **2.2**).

dove:

$$
(2)\quad \begin{cases}
A_s = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \sum_0^{r_1}{}_{r_2} \cdots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^r \binom{r}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots \\
\qquad\qquad \cdots \binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} \dfrac{a_1^{r-r_1}\, a_2^{r_1-r_2} \cdots a_{n-1}^{r_{n-2}-r_{n-1}}\, a_n^{r_{n-1}}}{a_0^{r+1}}\, \varepsilon_{s-\sigma} \\
(\sigma = r + r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1}; \\
\qquad\qquad \dots = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0,\ \varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0)\ (^5);
\end{cases}
$$

e inoltre le quantità $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ sono n *costanti arbitrarie* (rispetto a ν) legate alle corrispondenti n *costanti arbitrarie* $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ [che si ottengono da (1) facendo $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$] dalle eguaglianze:

$$
(3)\quad \begin{cases}
b_0 = a_0\gamma_0 \\
b_1 = a_0\gamma_1 + a_1\gamma_0 \\
b_2 = a_0\gamma_2 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_0 \\
\dots\dots\dots\dots \\
b_{n-1} = a_0\gamma_{n-1} + a_1\gamma_{n-2} + a_2\gamma_{n-3} + \dots + a_{n-1}\gamma_0 .
\end{cases}
$$

Per il seguito è utile scrivere la (1) nella forma:

$$
(1)' \qquad \gamma_\nu = \sum_0^{\nu-n}{}_s A_s\, b_{\nu-s} + \sum_0^{n-1}{}_m b_m A_{\nu-m} \qquad (\nu = n, n+1, \dots),
$$

dove, nel secondo membro, la prima somma (contenente le date quantità $b_n, b_{n+1}, \dots, b_\nu$) è una soluzione particolare dell'equazione (R_n) (non omogenea), e la seconda somma (contenente le costanti arbitrarie $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$) è la soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente ad (R_n) ([6]).

([5]) Cfr. [5], n. **2.2**, 3°).

([6]) Nella formula risolutiva di (R_n) figurano potenze della forma $a_k^{r_k}$ (con r_k intero non negativo); quando risulta $a_k = 0$, si deve convenire qui che sia $a_k^{r_k} = 0^{r_k} \equiv \varepsilon_{r_k}$, essendo $\dots = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0$ (convenzione importante di [6], n. **2.2**).

§ 2. - Risoluzione dell'equazione (E_n).

2.1. - Caso del passo $h > 0$.

A) Considero l'equazione (E_n), con $h > 0$. Mutando x in $x - nh$, la (E_n) diventa:

$$(4) \qquad \tilde{a}_0 u(x) + \tilde{a}_1 u(x-h) + \tilde{a}_2 u(x-2h) + \ldots + \tilde{a}_n u(x-nh) = f(x-nh) \qquad (h>0),$$

dove necessariamente deve essere $x_0 \leqslant x - nh < x_1$ (7), cioè

$$(5) \qquad x_0 + nh \leqslant x < x_1 + nh\,.$$

Posto (cfr. [6], (9))

$$(6) \qquad x = x_0 + \nu h + \theta h = \xi_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

la (4) si scrive

$$(7) \qquad \tilde{a}_0 u(\xi_\nu) + \tilde{a}_1 u(\xi_{\nu-1}) + \tilde{a}_2 u(\xi_{\nu-2}) + \ldots + \tilde{a}_n u(\xi_{\nu-n}) = f(\xi_{\nu-n}) \qquad (\nu \geqslant n),$$

dove

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(\xi_0; h), \quad \tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(\xi_0; h), \quad \tilde{a}_2 = \tilde{a}_2(\xi_0; h), \quad \ldots, \quad \tilde{a}_n = \tilde{a}_n(\xi_0; h)$$

sono date costanti rispetto a ν (cfr. le analoghe affermazioni di [6], nn. **3.1**, **4.1**, **5.1**, A)). Ne segue che la (7) è un'equazione ricorrente della forma (R_n), precisamente si passa da (R_n) a (7) ponendo

$$y_\nu = u(\xi_\nu)\,, \qquad b_\nu = f(\xi_{\nu-n})\,, \qquad (\nu \geqslant n).$$

Applico ora la formula (1)' risolutiva di (R_n) e tengo conto di (3), cioè che si ha:

$$\begin{cases} b_0 = \tilde{a}_0 y_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_0) \\ b_1 = \tilde{a}_0 y_1 + \tilde{a}_1 y_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_1) + \tilde{a}_1 u(\xi_0) \\ b_2 = \tilde{a}_0 y_2 + \tilde{a}_1 y_1 + \tilde{a}_2 y_0 = \tilde{a}_0 u(\xi_2) + \tilde{a}_1 u(\xi_1) + \tilde{a}_2 u(\xi_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1} = \tilde{a}_0 y_{n-1} + \tilde{a}_1 y_{n-2} + \tilde{a}_2 y_{n-3} + \ldots + \tilde{a}_{n-1} y_0 = \\ \qquad = \tilde{a}_0 u(\xi_{n-1}) + \tilde{a}_1 u(\xi_{n-2}) + \tilde{a}_2 u(\xi_{n-3}) + \ldots + \tilde{a}_{n-1} u(\xi_0)\,. \end{cases}$$

---

(7) Si deve anche avere $x_1 - x_0 > nh$, come risulterà evidente in seguito [cfr. l'annotazione (1)].

Trovo così che la soluzione generale di (7) è data da

$$u(\xi_\nu) = \sum_0^{\nu-n}{}_s A_s f(\xi_{\nu-n-s}) + \sum_0^{n-1}{}_m \{\tilde{a}_0 u(\xi_m) + \tilde{a}_1 u(\xi_{m-1}) + \ldots + \tilde{a}_m u(\xi_0)\} A_{\nu-m}\,, \tag{8}$$

dove:

$\nu = \nu_{(x-x_0)/h} \geqslant n$;

$u(\xi_0), u(\xi_1), u(\xi_2), \ldots, u(\xi_{n-1})$ (che sono costanti rispetto a ν) *vanno prese ad arbitrio*;

$$\left\{\begin{aligned} A_s = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \sum_0^{r_1}{}_{r_2} \ldots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^r \binom{r}{r_1} \cdot \\ \cdot \binom{r_1}{r_2} \ldots \binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} \frac{\tilde{a}_1^{r-r_1} \tilde{a}_2^{r_1-r_2} \ldots \tilde{a}_{n-1}^{r_{n-2}-r_{n-1}} \tilde{a}_n^{r_{n-1}}}{\tilde{a}_0^{r+1}} \varepsilon_{s-\sigma}\,, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

od anche

$$A_s = (-1)^{ns} (\tilde{a}_n/\tilde{a}_0)^s A_s^*\,, \tag{9$'$}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} A_s^* = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \sum_0^{r_1}{}_{r_2} \ldots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^{r-ns} \binom{r}{r_1} \cdot \\ \cdot \binom{r_1}{r_2} \ldots \binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} \frac{\tilde{a}_0^{s-r-1} \tilde{a}_1^{r-r_1} \tilde{a}_2^{r_1-r_2} \ldots \tilde{a}_{n-1}^{r_{n-2}-r_{n-1}}}{\tilde{a}_n^{s-r_{n-1}}} \varepsilon_{s-\sigma}\,, \end{aligned}\right. \tag{9$''$}$$

e tanto in (9) che in (9)$''$ si ha:

$s = 0, 1, 2, \ldots, \nu$; $\quad \sigma = r + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}$;

$\ldots = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 0$ (8).

B) Dalla posizione (6) segue:

$$\xi_m = x_0 + mh + \theta h \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n-1)\,, \tag{6$'$}$$

$$\xi_{\nu-n-s} = x - (n+s)h\,, \qquad \xi_\nu = x\,,$$

(8) Cfr. annotazione (5).

e quindi la (8) si può scrivere:

$$u(x) = \sum_{0}^{\nu-n}{}_s A_s\, f(x-(n+s)h) + \sum_{1}^{n}{}_m B_m\, A_{\nu-m+1} \qquad (\nu \geqslant n), \tag{10}$$

dove ho posto, per brevità,

$$B_m = \tilde{a}_0\ u(x_0+(m-1)h+\theta h) + \tilde{a}_1\ u(x_0+(m-2)h+\theta h) + \tag{11}$$

$$+ \ldots + \tilde{a}_{m-1}\ u(x_0+\theta h) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

La (10) dà quindi la soluzione generale elementare [in forma *razionale* com'è detto nel n. **1.1**] di (4) e anche di (E_n) (con $h > 0$).

Ragionando ora sulla (10) in modo analogo a quanto ho fatto sulle (31) e (44) di [6], nn. **3.1** e **4.1**, B) (9), concludo:

La soluzione generale elementare dell'equazione alle differenze (E_n), *con* $h > 0$, *ha la forma*

$$u(x) = F(x;h) + U(x;h)\,,$$

dove:

$$F(x;h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (x_0 \ldots (x_0+nh)-), \\ \sum_{0}^{\nu-n}{}_s A_s\, f(x-(n+s)h)\,, \quad \nu = \nu_{(x-x_0)/h}\,, & x \in (x_0+nh \ldots x_1-) \end{cases} \tag{12}$$

[A_s *essendo dato da* (9)] *è* (v. Introduzione, n. **1.1**) *la soluzione elementare dell'equazione* (E_n);

$$\begin{cases} U(x;h) = \sum_{1}^{n}{}_m \tilde{c}_m\ \{(-1)^n \tilde{a}_n/\tilde{a}_0\}^{(x-(m-1)h)/h}\ A^*_{\nu-m+1} \\ \nu = \nu_{(x-x_0)/h}\,, \qquad\qquad x \in (x_0 \ldots +\infty) \end{cases} \tag{13}$$

[*essendo* $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$ *arbitrarie costanti per l'incremento* h, *e* A^*_ν *essendo dato da* (9)″] *è* (v. Introduzione, n. **1.1**) *la soluzione generale elementare dell'equazione*

---

(9) Qui, in particolare, si terrà presente la (9)′ per $s = \nu, \nu-1, \ldots, \nu-n+1$, e si noterà che dalla (6) segue

$$\nu - m + 1 = \{(x-(m-1)h)/h\} - (x_0+\theta h)/h \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

omogenea corrispondente ad (E_n) ([10]) (ora, però, a motivo di un passaggio simile a (31)' e (44)' di [6], la $U(x; h)$ non ha più forma razionale nei coefficienti).

Osservazione. È utile a volte scrivere la soluzione generale elementare $U(x; h)$ nella forma [razionale nei coefficienti, e immediatamente deducibile dalla (10)]:

$$(13)' \qquad U(x; h) = \sum_{1}^{n}{}_m \tilde{\omega}_m A_{\nu-m+1}, \qquad \nu = \nu_{(x-x_0)/h}, \; x \in (x_0 \dots + \infty),$$

dove le $\tilde{\omega}_m$ sono arbitrarie costanti per l'incremento h.

2.2. - Caso del passo $h < 0$.

Considero ora l'equazione (E_n) con $h < 0$. Poichè qui è $h = -|h|$, la (E_n) si può scrivere

$$\tilde{a}_0 u(x - n|h|) + \tilde{a}_1 u(x - (n-1)|h|) + \dots + \tilde{a}_{n-1} u(x - |h|) + \tilde{a}_n u(x) = f(x) \quad (h < 0),$$

ossia (ponendo i termini del primo membro in ordine inverso)

$$(14) \qquad \tilde{a}_n u(x) + \tilde{a}_{n-1} u(x - |h|) + \dots + \tilde{a}_1 u(x - (n-1)|h|) + \\ + \tilde{a}_0 u(x - n|h|) = f(x) \qquad (h < 0),$$

che è un'equazione del tipo (4). Precisamente (sempre ricordando che è ora $h < 0$), da (4) si passa a (14) così:

1) si scambiano fra loro (al primo membro) i coefficienti equidistanti dagli estremi,

2) si sostituisce h con $|h|$,

3) si muta $f(x - n|h|)$ in $f(x)$.

Concludo quindi che ([11]):

La soluzione generale elementare dell'equazione alle differenze (E_n), *con* $h < 0$, *ha la forma*

$$u(x) = \overline{F}(x; h) + \overline{U}(x; h),$$

([10]) Ne discende che $\{(-1)^n \tilde{a}_n/\tilde{a}_0\}^{(x-(m-1)h)/h} A^*_{\nu-m+1}$ $(m = 1, 2, \dots, n)$ costituiscono necessariamente un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione omogenea corrispondente ad (E_n).

Restano, poi, valide le affermazioni delle annotazioni ([5]) e ([9]) di [6].

([11]) Si tenga presente che, essendo $h < 0$, si ha:

$$|h| = -h, \quad f(x - s|h|) = f(x + sh),$$

$$\{(-1)^n \tilde{a}_0/\tilde{a}_n\}^{(x-(m-1)|h|)/|h|} = \{(-1)^n \tilde{a}_n/\tilde{a}_0\}^{(x+(m-1)h)/h} \qquad (m = 1, 2, \dots, n).$$

dove:

1) *La* $\overline{F}(x; h)$ *è* (v. Introduzione, n. **1.1**) *la soluzione elementare dell'equazione* (E_n) *data da*

$$(15)\qquad \overline{F}(x; h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (x_0 \ldots (x_0 - nh) -) \\ \sum\limits_{0}^{\nu-n}{}_s\, \mathcal{A}_s\, f(x+sh)\,, & \nu = \nu_{(x-x_0)/(-h)},\ x \in (x_0 - nh \ldots x_1 -), \end{cases}$$

con

$$\mathcal{A}_s = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \sum_0^{r_1}{}_{r_2} \ldots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^r \binom{r}{r_1} \cdot$$
$$\cdot \binom{r_1}{r_2} \ldots \binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} \frac{\tilde{a}_0^{r_{n-1}}\, \tilde{a}_1^{r_{n-2}-r_{n-1}}\, \tilde{a}_2^{r_{n-3}-r_{n-2}} \ldots \tilde{a}_{n-1}^{r-r_1}}{\tilde{a}_n^{r+1}}\, \varepsilon_{s-\sigma}\,;$$

2) *La* $\overline{U}(x; h)$ *è* (v. Introduzione, n. **1.1**) *la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente ad* (E_n) *data da*

$$(16)\qquad \begin{cases} \overline{U}(x; h) = \sum\limits_1^n{}_m\, \tilde{c}_m\, \{(-1)^n \tilde{a}_n / \tilde{a}_0\}^{(x+(m-1)h)/h}\, \mathcal{A}^*_{\nu-m+1} \\ \nu = \nu_{(x-x_0)/(-h)}\,, \qquad x \in (x_0 \ldots +\infty)\,, \end{cases}$$

essendo $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$ *arbitrarie costanti per l'incremento* h *e*

$$\mathcal{A}^*_\nu = \sum_0^\nu{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \sum_0^{r_1}{}_{r_2} \ldots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^{r-n\nu} \binom{r}{r_1} \cdot$$
$$\cdot \binom{r_1}{r_2} \ldots \binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} \frac{\tilde{a}_1^{r_{n-2}-r_{n-1}}\, \tilde{a}_2^{r_{n-3}-r_{n-2}} \ldots \tilde{a}_{n-1}^{r-r_1}\, \tilde{a}_n^{\nu-r-1}}{\tilde{a}_0^{\nu-r_{n-1}}}\, \varepsilon_{\nu-\sigma}\,.$$

§ 3. - Una proprietà fondamentale della soluzione elementare $F(x; h)$ (12).

La soluzione elementare $F(x; h)$ *si può esprimere esplicitamente mediante una* q u a l s i a s i *soluzione* $\Phi(x; h)$ *della* (E_n), *nel modo seguente:*

$$(17)\qquad F(x; h) = \Phi(x; h) - U_\Phi(x; h)\,, \qquad x \in (x_0 \ldots x_1 -)\,,$$

(12) Considero qui il caso del passo $h > 0$; analogamente per $h < 0$.

dove

$$(18)\qquad U_\Phi(x;h)=\sum_1^n{}_m\Big\{\sum_1^m{}_r\,\tilde{a}_{r-1}\cdot\Phi\big(x-(\nu-m+r)h;\,h\big)\Big\}A_{\nu-m+1}\,,\qquad \nu=\nu_{(x-x_0)/h}\,,$$

è una particolare soluzione elementare dell'equazione omogenea $(\mathrm{E}_n)_0$.

Dimostrazione.

1°) Essendo $\Phi(x;h)$ una qualsiasi soluzione di (E_n), si ha, identicamente,

$$\sum_0^n{}_r\,\tilde{a}_r\cdot\Phi\big(x+(n-r)h;\,h\big)=f(x)\,,\qquad x\in(x_0\ldots x_1-),\ h>0,$$

da cui, mutando x successivamente in $x-nh$, $x-(n+1)h$, ..., $x-(n+s)h$, ..., $x-\nu h$, si ottengono le $\nu-n+1$ identità:

$$\sum_0^n{}_r\,\tilde{a}_r\cdot\Phi(x-rh;\,h)=f(x-nh)\,,$$
$$\sum_0^n{}_r\,\tilde{a}_r\cdot\Phi\big(x-(r+1)h;\,h\big)=f\big(x-(n+1)h\big)\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_0^n{}_r\,\tilde{a}_r\cdot\Phi\big(x-(r+s)h;\,h\big)=f\big(x-(n+s)h\big)\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_0^n{}_r\,\tilde{a}_r\cdot\Phi\big(x-(r+\nu-n)h;\,h\big)=f(x-\nu h)\,.$$

Moltiplicando queste uguaglianze rispettivamente per $A_0, A_1, \ldots, A_s, \ldots, A_{\nu-n}$ [con A_s dato da (9)], e sommando membro a membro le nuove identità, si ottiene:

$$\sum_0^{\nu-n}{}_s\ \sum_0^n{}_r\,\tilde{a}_r A_s\Phi\big(x-(r+s)h;\,h\big)=\sum_0^{\nu-n}{}_s\ A_s\ f\big(x-(n+s)h\big)\,,$$

od anche, osservando che il secondo membro è proprio $F(x;h)$, e ponendo $r+s=\mu$,

$$(19)\qquad F(x;h)=\sum_0^{\nu-n}{}_s\ \sum_s^{n+s}{}_\mu\,\tilde{a}_{\mu-s}A_s\Phi(x-\mu h;\,h)\,.$$

2°) Intendendo ora che $\tilde{a}_s$ sia il termine generale della successione

$$\tilde{a}_0,\ \tilde{a}_1,\ \tilde{a}_2,\ \dots,\ \tilde{a}_n,\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ \dots,$$

la (19) si può anche scrivere

$$F(x;h)=\sum_{0}^{\nu-n}{}_s\ \sum_{s}^{\nu}{}_\mu\,\tilde{a}_{\mu-s}\,A_s\,\Phi(x-\mu h;h)\,,$$

od anche, aggiungendo e togliendo $\sum_{\nu-n+1}^{\nu}{}_s\ \sum_{s}^{\nu}{}_\mu\,\tilde{a}_{\mu-s}A_s\Phi(x-\mu h;h)$,

$$F(x;h)=\sum_{0}^{\nu}{}_s\ \sum_{s}^{\nu}{}_\mu\,\tilde{a}_{\mu-s}\,A_s\Phi(x-\mu h;h)-\sum_{\nu-n+1}^{\nu}{}_s\ \sum_{s}^{\nu}{}_\mu\,\tilde{a}_{\mu-s}\,A_s\Phi(x-\mu h;h)\,,$$

oppure, scambiando le sommatorie nella prima somma doppia del secondo membro,

$$F(x;h)=\sum_{0}^{\nu}{}_\mu\,\Big\{\sum_{0}^{\mu}{}_s\,\tilde{a}_{\mu-s}\,A_s\Big\}\,\Phi(x-\mu h;h)-\sum_{\nu-n+1}^{\nu}{}_s\Big\{\sum_{s}^{\nu}{}_\mu\,\tilde{a}_{\mu-s}\,\Phi(x-\mu h;h)\Big\}A_s\,. \tag{20}$$

Ma, avendosi [13]

$$\sum_{0}^{\mu}{}_s\,\tilde{a}_{\mu-s}\,A_s=\begin{cases}1 & \text{per } \mu=0\\ 0 & \text{per } \mu=1,\,2,\,\dots,\end{cases}$$

la (20) diventa più semplicemente:

$$F(x;h)=\Phi(x;h)-\sum_{\nu-n+1}^{\nu}{}_s\ \Big\{\sum_{s}^{\nu}{}_\mu\,\tilde{a}_{\mu-s}\Phi(x-\mu h;h)\Big\}A_s\,,$$

od anche, ponendo $s=\nu-m+1$, $\mu=\nu-m+r$,

$$F(x;h)=\Phi(x;h)-\sum_{1}^{n}{}_m\,\Big\{\sum_{1}^{m}{}_r\,\tilde{a}_{r-1}\,\Phi\big(x-(\nu-m+r)h;\,h\big)\Big\}\,A_{\nu-m+1}\,,$$

cioè proprio la (17) [tenendo presente la (18)]. La (18) è poi la particolare

---

[13] Su questo risultato cfr. [2], p. 18.

soluzione elementare dell'equazione omogenea $(E_n)_0$ che si ottiene da $U(x; h)$ [nella forma (13)'] sostituendo alle $\tilde{\omega}_m$ le particolari costanti, per l'incremento h,

$$\sum_1^m{}_r\, \tilde{a}_{r-1}\ \Phi(x-(\nu-m+r)h;\, h) \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

(si tenga presente che mutando x in $x+h$ la ν si muta in $\nu+1$).

Osservazione. In (17) la $F(x; h)$ è nulla [cfr. (12)] nell'intervallo $(x_0 \ldots (x_0+nh)-)$; d'altra parte in tale intervallo risulta pure nullo il secondo membro di (17) (come si può verificare).

§ 4. - Un esempio.

Risolvere l'equazione

$$u(x+nh)-u(x)=f(x) \qquad (x \geqslant 0,\ h>0)\,. \tag{21}$$

1°) Calcolo la soluzione elementare $F(x; h)$ [che si ottiene applicando la (12)]. Si ha ora, tenendo presente la (9) e la convenzione dell'annotazione [6],

$$A_s = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \sum_0^{r_1}{}_{r_2} \cdots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^{r+r_{n-1}} \cdot \tag{22}$$

$$\cdot \binom{r}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{n-2}}{r_{n-1}}\, \varepsilon_{r-r_1}\, \varepsilon_{r_1-r_2} \cdots \varepsilon_{r_{n-2}-r_{n-1}}\, \varepsilon_{s-\sigma}$$

$$(s=0, 1, 2, \ldots, \nu-n; \quad \sigma=r+r_1+r_2+\ldots+r_{n-1})\,.$$

Per il significato del simbolo ε_μ $(\mu=0, 1, 2, \ldots)$, nel secondo membro di (22) restano solo i termini per i quali è $r_1=r$, $r_2=r_1=r$, $\ldots$, $r_{n-1}=r_{n-2}=\ldots=r_1=r$, onde la (22) diventa:

$$A_s=\sum_0^s{}_r (-1)^{r+r}\binom{r}{r}\binom{r}{r}\cdots\binom{r}{r}\varepsilon_{s-nr}=\sum_0^s{}_r\, \varepsilon_{s-nr}\,;$$

da qui, sempre per il significato di ε_μ $(\mu=0, 1, 2, \ldots)$, si ottiene:

$$A_s=\begin{cases} 1 & \text{per } s=nr' \ (=\text{multiplo di } n) \\[2ex] 0 & \text{per } s=nr'+1,\ nr'+2, \ldots,\ nr'+(n-1) \end{cases}$$

$$(r'=0, 1, 2, \ldots, \nu'; \qquad \nu'=[(\nu-n)/n]=[\nu/n]-1,\ \ \nu=[x/h])\,.$$

La soluzione elementare, applicando la (12) e per $x \in (nh \ldots + \infty)$, è quindi

$$F(x;h) = \sum_0^{\nu'}{}_{r'} 1 \cdot f(x-(n+nr')h) = \sum_0^{\nu'}{}_{r'} f(x-n(r'+1)h) ,$$

ossia

$$F(x;h) = \begin{cases} 0 , & x \in (0 \ldots nh-) \\ \sum_0^{\nu'}{}_{r'} f(x-n(r'+1)h) , \quad \nu' = [\nu/n]-1, \quad \nu = [x/h], & x \in (nh \ldots + \infty) . \end{cases}$$

Per la eventuale verifica occorre tener presente che mutando x in $x+nh$ la ν si muta in $\nu+n$ e la ν' si muta in $\nu'+1$.

2°) Calcolo la soluzione generale elementare $U(x;h)$ dell'equazione omogenea corrispondente all'equazione data [soluzione che si ottiene applicando la (13)]. Abbiamo:

$$\{(-1)^n \tilde{a}_n/\tilde{a}_0\}^{x/h} = (-1)^{(n+1)x/h} = (-1)^{(n+1)(\nu h+\theta h)/h} = (-1)^{(n+1)(\nu+\theta)} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\nu+\theta} & \text{per } n \text{ pari} \\ 1^\theta & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

[dove $(-1)^\theta$ e 1^θ sono, come θ, delle funzioni periodiche di periodo h];

$$A_\nu^* = \begin{cases} (-1)^\nu A_\nu & \text{per } n \text{ pari} \\ A_\nu & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

[in virtù della (9)']. Onde dalla (13) segue, sia per n pari che per n dispari,

$$U(x;h) = \sum_1^n{}_m \tilde{c}_m \, A_{\nu-m+1} , \qquad \nu = [x/h], \; x \in (0 \ldots + \infty) ,$$

essendo $\tilde{c}_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ arbitrarie costanti per l'incremento h.

3°) Osservo ora che da tale $U(x;h)$ si può ricavare l'espressione usuale della soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente alla (21), in quanto qui si sa risolvere l'equazione caratteristica [le cui radici sono $1_{n,k} =$

$= \cos(2k\pi/n) + i \operatorname{sen}(2k\pi/n)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)]$. Infatti, essendo, per quanto già detto a 1°),

$$A_\nu = 1 \text{ per } \nu = n\nu', \quad A_\nu = 0 \text{ per } \nu = n\nu' + 1,\ n\nu' + 2,\ \ldots,\ n\nu' + (n-1),$$

si ha, com'è facile provare [14],

$$A_\nu = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k\, 1^\nu_{n,k} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ne segue che: per n pari, posto $n' = \{$parte intera di $(n-1)/2\}$, risulta

$$A_\nu = \frac{1}{n}\left\{1^\nu + (-1)^\nu + \sum_{1}^{n'}{}_k \exp(i2k\pi\nu/n) + \sum_{1}^{n'}{}_k \exp(-i2k\pi\nu/n)\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{1 + (-1)^\nu + \sum_{1}^{n'}{}_k \left(\cos(2k\pi\nu/n) + i \operatorname{sen}(2k\pi\nu/n)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{1}^{n'}{}_k \left(\cos(2k\pi\nu/n) - i \operatorname{sen}(2k\pi\nu/n)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{1 + (-1)^\nu + 2\sum_{1}^{n'}{}_k \cos\frac{2k\pi\nu}{n}\right\} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{(x/h)-\theta}}{n} + \frac{2}{n}\sum_{1}^{n'}{}_k \cos\left\{\frac{2k\pi}{n}\left(\frac{x}{h} - \theta\right)\right\};$$

per n dispari, posto $n' = (n-1)/2$, risulta

$$A_\nu = \frac{1}{n}\left\{1^\nu + \sum_{1}^{n'}{}_k \exp(i2k\pi\nu/n) + \sum_{1}^{n'}{}_k \exp(-i2k\pi\nu/n)\right\} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{1}^{n'}{}_k \cos\left\{\frac{2k\pi}{n}\left(\frac{x}{h} - \theta\right)\right\}.$$

Espressioni analoghe si hanno per $A_{\nu-1}, A_{\nu-2}, \ldots, A_{\nu-n+1}$.

Procedendo orac ome nei nn. **6.2** e **6.3**, 2°) di [6], si conclude che: quando n è pari si ha

$$U(x;h) = \tilde{\omega}_1(x;h) + \tilde{\omega}_2(x;h)(-1)^{x/h} + \sum_{1}^{n'}{}_k \tilde{\omega}_{k+2}(x;h)\cos\frac{2k\pi x}{nh} +$$

$$+ \sum_{1}^{n'}{}_k \tilde{\omega}_{k+n'+2}(x;h) \operatorname{sen}\frac{2k\pi x}{nh}, \qquad n' = [(n-1)/2],$$

[14] Si noti che, se η è una radice n-esima primitiva dell'unità, risulta:

$$\sum_{1}^{n-1}{}_k\, 1^\nu_{n,k} = 1^\nu + \eta^\nu + (\eta^2)^\nu + \ldots + (\eta^{n-1})^\nu = 1 + \eta^\nu + (\eta^\nu)^2 + \ldots + (\eta^\nu)^{n-1},$$

che è uguale ad n per $\nu = n\nu'$, ed è uguale a $\{1 - (\eta^\nu)^n\}/(1 - \eta^\nu) = 0$ per $\nu = n\nu' + 1$, $n\nu' + 2, \ldots, n\nu' + (n-1)$.

quando n è dispari si ha

$$U(x;h) = \tilde{\omega}_1(x;h) + \sum_1^{n'}{}_k \tilde{\omega}_{k+1}(x;h) \cos \frac{2k\pi x}{nh} +$$

$$+ \sum_1^{n'}{}_k \tilde{\omega}_{k+n'+1}(x;h) \operatorname{sen} \frac{2k\pi x}{nh}, \qquad n' = (n-1)/2,$$

dove le $\tilde{\omega}_r$ sono arbitrarie costanti per l'incremento h.

Riferimenti.

[1] N.-E. Nörlund, *Leçons sur les équations linéaires aux différences finies*, Gauthier-Villars, Paris 1929.

[2] A. Mambriani, *Sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti lineari, d'ordine finito e a coefficienti costanti*, Acad. Naz. Lincei, Rend. Sci. Fis. Mat. Nat. (1) **19** (1934), 16-21.

[3] A. Mambriani, *L'operazione inversa fondamentale del « Calcolo alle differenze finite » è un'operazione elementare* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **10** (1969), 185-211.

[4] L. M. Milne-Thomson, *The Calculus of Finite Differences*, Macmillan, London 1931.

[5] C. Scaravelli, *Polinomi di Appell nel senso del Calcolo delle differenze finite*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 355-366.

[6] C. Scaravelli, *Risoluzione, razionale nelle funzioni date, delle equazioni alle differenze (con un passo $h \neq 0$), d'ordine finito, lineari e a coefficienti periodici di periodo h* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 17-43.

Sommario.

Si propone un nuovo metodo di risoluzione effettiva delle equazioni alle differenze [in una variabile indipendente e con un passo h ($\neq 0$)] lineari e a coefficienti periodici di periodo h. Tale metodo è sempre possibile e del tutto elementare: la soluzione generale si esprime (in termini finiti) razionalmente mediante i coefficienti dell'equazione. In questa Parte II *si suppone che la variabile indipendente sia reale e si studia l'equazione di ordine n. Si dimostra, inoltre, una proprietà fondamentale della soluzione elementare $F(x;h)$.*

Summary.

We propose a new method for solving in an effective way linear difference equations [of an indipendent variable and with a step h $(\neq 0)$*] having periodical coefficients with period* h*. Such a method is always possible and completely elementary: the general solution of an equation can be expressed as a rational function (with a finite number of terms) of the coefficients. In this second paper we suppose the independent variable is real and we study the equation of* n*-th order. We, moreover, show a fundamental property for the elementary solution* $F(x; h)$*.*

* * *