Riv. Mat. Univ. Parma (2) 12 (1971), 119-135

CARLO MARCHINI (*)

Su gli Ω - gruppi in una categoria. (**)

1. – Nel presente lavoro si riprende lo studio delle funzioni H, E, Q, J, K e N definite in [2] (1) per approfondirne le mutue relazioni. Si è visto, tra l'altro, che (cfr. le (5) e (27) e la Osservazione 10 di [2])

$$H \circ E = 1\,, \qquad E \circ H = 1;$$

$$Q \circ J = 1\,, \qquad J \circ Q = 1;$$

$$K \circ N = 1\,, \qquad N \circ K = 1\,.$$

Come in [2], si consideri una categoria $\mathcal{C}$ con prodotti finiti (e con oggetto nullo $\mathbf{1}$). Siano poi A, A' e A'' degli Ω-gruppi; nel seguito $f\colon A \twoheadrightarrow A'$ e $g\colon A' \twoheadrightarrow A''$ indicheranno omomorfismi suriettivi di Ω-gruppi; $u\colon B \rightarrowtail A^2$ e $v\colon R \rightarrowtail A^2$ indicheranno monomorfismi e per ogni morfismo $m\colon \mathbf{1} \to A$ si porrà $G(m) = \{1_A, m\alpha\}\colon A \to A^2$. Inoltre si indicherà con $f^{\#}\colon F^{\#} \rightarrowtail A$ un rappresentante di $H(f)$, con $f_{\#}\colon F_{\#} \rightarrowtail A^2$ un rappresentante di $K(f)$ e con $u_*\colon B_* \rightarrowtail A^2$ un rappresentante di $Q(u)$; si porrà infine $\varphi^{\#}\colon F^{\#} \to \mathbf{1}$ e $\varphi_{\#}\colon F_{\#} \to \mathbf{1}$.

I seguenti tre lemmi chiariscono i legami esistenti tra le funzioni H, K e Q.

Lemma 1. *Se esistono $H(f)$ e $K(f)$, allora esiste $Q(H(f))$ ed è*

$$Q(H(f)) = K(f)\,.$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R. per l'anno 1969-1970. — Ricevuto: 22-XI-1970.
(1) Si riprendono qui notazioni e definizioni di tale lavoro.

D i m o s t r a z i o n e. Essendo la Figura 1

$$\begin{tikzcd} F_{\#} \arrow[r, tail, "f_{\#}"] \arrow[d, tail, "f_{\#}"'] & A^2 \arrow[d, "f\varepsilon_2"] \\ A^2 \arrow[r, "f\varepsilon_1"'] & A' \end{tikzcd}$$

Figura 1.

$$\begin{tikzcd} & A^2 \arrow[d, "f\varepsilon_2"] \\ A^2 \arrow[ur, equal] \arrow[r, "f\varepsilon_1"'] & A' \end{tikzcd}$$

Figura 2.

$$\begin{tikzcd} F^{\#} \arrow[r, "\varphi^{\#}"] \arrow[d, tail, "f^{\#}"'] & 1 \arrow[d, tail, "z'"] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & A' \end{tikzcd}$$

Figura 3.

un diagramma di pull-back, la famiglia

(1) $$(f_{\#}\colon F_{\#} \rightarrowtail A^2;\ f\varepsilon_1 f_{\#}\colon F_{\#} \to A')$$

è un limite del diagramma (²) dato dalla Figura 2.
Così pure, essendo la Figura 3 un diagramma di pull-back, si ha che la famiglia

(2) $$(f^{\#}\colon F^{\#} \rightarrowtail A;\ \varphi^{\#}\colon F^{\#} \to \mathbf{1})\,,$$

è un limite del diagramma

(3) $$A \overset{}{\underset{f}{\twoheadrightarrow}} A' \underset{z'}{\leftarrowtail} \mathbf{1}\,.$$

Si consideri il diagramma

(4) $$A \underset{G(z)}{\rightarrowtail} A^2 \underset{f_{\#}}{\leftarrowtail} F_{\#}\,.$$

La famiglia

(5) $$(G(x)f^{\#}\colon F^{\#} \rightarrowtail A^2;\ \ f\varepsilon_1 G(z) f^{\#}\colon F^{\#} \to A')$$

è chiaramente una famiglia compatibile per la Figura 2 (²). Ne consegue

(²) Per le definizioni di «limite di un diagramma» e di «famiglia compatibile» si confronti [3].

che esiste un morfismo $f^{\#}_{\cdot\,\#}: F^{\#} \to F_{\#}$ tale che

$$f_{\#}\, f^{\#}_{\cdot\,\#} = G(z)\, f^{\#}\,, \tag{6}$$

vale a dire tale che

$$(f^{\#}: F^{\#} \rightarrowtail A;\ \ f^{\#}_{\cdot\,\#}: F^{\#} \to F_{\#}) \tag{7}$$

sia una famig ia compatibile per (4):

$$F^{\#} \to F_{\#} \to A^2 = F^{\#} \to A \to A^2. \tag{8}$$

Sia poi

$$(X \to A;\ \ X \to F_{\#})$$

un'altra famiglia compatibile per (4), vale a dire, tale che sia

$$X \to A \to A^2 = X \to F_{\#} \to A^2\ ; \tag{9}$$

ne segue che

$$(X \to A;\ \ X \to \mathbf{1})$$

è una famiglia compatibile per (3). Esiste perciò un morfismo $X \to F^{\#}$, tale che

$$X \to F^{\#} \to A = X \to A\ .$$

Ma usando (8), (9) ed il fatto che $f_{\#}$ è un monomorfismo si ha

$$X \to F^{\#} \to F_{\#} \rightarrowtail A^2 = X \to F^{\#} \to A \to A^2 = X \to A \to A^2 = X \to F_{\#} \rightarrowtail A^2\,,$$

da cui

$$X \to F^{\#} \to F_{\#} = X \to F_{\#}\ .$$

Resta così dimostrato che (7) è un limite di (4). Perciò $[f_{\#}]$ è una congruenza su A, che ammette l'ideale $[f^{\#}]$ come sistema di z; si può concludere che esiste $Q(H(f))$, ed è

$$Q(H(f)) = K(f)\ .$$

Lemma 2. *Se esistono $H(f)$ e $Q(H(f))$, allora esiste $K(f)$ ed è*

$$K(f) = Q(H(f)) .$$

Dimostrazione. Per le ipotesi del Lemma, (2) è un limite di (3) e

$$(f^{\#}: F^{\#} \rightarrowtail A;\ f^{\#}_{.*}: F^{\#} \to F^{\#}_{*})$$

è un limite del seguente diagramma

$$A \xrightarrowtail[G(z)]{} A^2 \xleftarrowtail[f^{\#}_{*}]{} F^{\#}_{*} . \tag{10}$$

Per dimostrare il Lemma sarà sufficiente trovare un morfismo $F^{\#}_{*} \to A'$ tale che

$$(f^{\#}_{*}: F^{\#}_{*} \rightarrowtail A^2;\ F^{\#}_{*} \to A')$$

sia un limite della Figura 2.

Si ha la seguente eguaglianza:

$$f\varepsilon_1 f^{\#}_{*} f^{\#}_{.*} = z'\varphi^{\#} = f\varepsilon_2 f^{\#}_{*} f^{\#}_{.*} . \tag{11}$$

Indicando con $\partial^{\#}_{*}: A \to F^{\#}_{*}$, il morfismo tale che

$$\Delta_A = f^{\#}_{*}\ \partial^{\#}_{*} ,$$

si ha che

$$(s(1_A \times \sigma) f^{\#}_{*}: F^{\#}_{*} \to A;\ s^{\#}_{*}\{1_{F^{\#}_{*}}, \sigma^{\#}_{*}\ \partial^{\#}_{*}\varepsilon_2 f^{\#}_{*}\}: F^{\#}_{*} \to F^{\#}_{*})$$

è una famiglia compatibile per (10) [3]. Esiste allora un morfismo $r^{\#}_{*}: F^{\#}_{*} \to F^{\#}$ tale che

$$f^{\#}_{.*}\, r^{\#}_{*} = s^{\#}_{*}\{1_{F^{\#}_{*}}, \sigma^{\#}_{*}\ \partial^{\#}_{*}\varepsilon_2 f^{\#}_{*}\} . \tag{12}$$

---

[3] La compatibilità di tale famiglia è data, previo cambiamento di notazioni, dal Lemma 3, i] di [2].

Dalla (11) si ricava

$$f\varepsilon_1 f_*^{\#} f_{\cdot *}^{\#} r_*^{\#} = z'\varphi^{\#} r_*^{\#},$$

da cui, per la (12), usando il fatto che $f\varepsilon_1 f_*^{\#}\colon F_*^{\#} \to A'$ è un omomorfismo di Ω-gruppi, si ha

$$s'\{f\varepsilon_1 f_*^{\#}, \sigma' f\varepsilon_2 f_*^{\#}\} = z'\varphi^{\#} r_*^{\#}.$$

Per il Lemma 2 di [2] si può concludere che

$$f\varepsilon_1 f_*^{\#} = f\varepsilon_2 f_*^{\#},$$

vale a dire che

$$(f_*^{\#}\colon F_*^{\#} \rightarrowtail A^2;\quad f\varepsilon_1 f_*^{\#}\colon F_*^{\#} \to A')$$

è una famiglia compatibile per la Figura 2.

Per ogni famiglia

$$(x\colon X \to A^2;\quad f\varepsilon_1\, x\colon X \to A')$$

compatibile per la Figura 2, si ha che

$$(s(1_A \times \sigma)\, x\colon X \to A;\quad X \to \mathbf{1})$$

è una famiglia compatibile per (3). Esiste quindi un morfismo $x_1\colon X \to F^{\#}$ tale che

$$s(1_A \times \sigma)x = f^{\#}\, x_1.$$

Applicando il Lemma 4 di [2] si trova che

$$x = f_*^{\#}\, s_*^{\#}\{f_{\cdot *}^{\#}\, x_1,\ \partial_*^{\#}\, \varepsilon_2\, x\},$$

quindi $f_*^{\#}\colon F_*^{\#} \rightarrowtail A^2$ è l'egualizzatore di $f\varepsilon_1$ e $f\varepsilon_2$ e la famiglia

$$(f_*^{\#}\colon F_*^{\#} \rightarrowtail A^2;\quad f\varepsilon_1 f_*^{\#}\colon F_*^{\#} \rightarrowtail A')$$

è un limite per la Figura 2.

Si ha infine il seguente

Lemma 3. *Se esiste $K(f)$, e $[u]$ è un ideale di A, tale che esista $Q(u)$ e sia*

$$Q(u) = K(f)\,,$$

allora esiste anche $H(f)$ ed è

$$H(f) = [u]\,.$$

Dimostrazione. Sia (1) un limite della Figura 2 e la famiglia

$$(u\colon B \rightarrowtail A\,;\quad u._{*}\colon B \rightarrow B_{*})$$

sia un limite del seguente diagramma

(13) $$A \xrightarrowtail[G(z)]{} A^2 \xleftarrowtail[u_*]{} B_{*}\,.$$

Il Lemma sarà provato se si riesce a dimostrare che la famiglia

(14) $$(u\colon B \rightarrowtail A\,;\quad \beta\colon B \rightarrow \mathbf{1})$$

è un limite di (3). Sfruttando l'ipotesi che $Q(u) = K(f)$ si ha che (14) è una famiglia compatibile per (3).

Sia

$$(X \rightarrow A\,;\ X \rightarrow \mathbf{1})$$

una famiglia compatibile per (3), è chiaro che

$$X \rightarrow A \xrightarrow{G(z)} A^2 \xrightarrow{f\varepsilon_1} A' = X \rightarrow A \xrightarrow{G(z)} A^2 \xrightarrow{f\varepsilon_2} A'.$$

Esiste quindi un morfismo $X \rightarrow B_{*}$, tale che

$$X \rightarrow B_{*} \rightarrow A^2 = X \rightarrow A \rightarrow A^2;$$

si può quindi affermare che

$$(X \to A;\ X \to B_*)$$

è una famiglia compatibile per (13). Esiste quindi un morfismo $X \to B$ tale che

$$X \to B \to A = X \to A; \qquad X \to B \to B_* = X \to B_*.$$

Si ha poi ovviamente

$$X \to B \to \mathbf{1} = X \to \mathbf{1}.$$

È pertanto chiaro che (14) è un limite per (3) e che

$$H(f) = [u].$$

I Lemmi precedenti si possono riassumere nel seguente

Teorema 1. *Siano* $(A, s, \sigma, z, \Omega_A)$ *e* $(A', s', \sigma', z', \Omega_{A'})$ *due* Ω*-gruppi;* $f\colon A \twoheadrightarrow A'$ *un omomorfismo suriettivo,* $u\colon B \rightarrowtail A$ *un monomorfismo tale che* $[u]$ *sia un ideale di* A.

I) *Se esistono* $H(f)$ *e* $K(f)$, *esiste anche* $Q(H(f))$ *ed è*

$$Q(H(f)) = K(f).$$

II) *Se esistono* $H(f)$ *e* $Q(H(f))$, *esiste anche* $K(f)$ *ed è*

$$K(f) = Q(H(f)).$$

III) *Se esistono* $K(f)$ *e* $Q(u)$ *e sono eguali, allora esiste* $H(f)$ *ed è*

$$H(f) = [u].$$

Il Teorema 1 mette in luce i legami esistenti tra le funzioni K, H e Q. Inoltre permette di dimostrare, con l'aiuto delle Osservazioni 5, 9 e 10 di [2], alcuni corollari, dagli enunciati analoghi a quello del Teorema 1 e che evidenziano i legami esistenti tra le funzioni K, H e J; E, Q e K; J, N e E; Q, E e N; N, J e H, rispettivamente. Data l'analogia esistente, si dimostra solo il seguente

Corollario 1. *Siano A, A' e f come nel Teorema 1, e sia $v\colon R \rightarrowtail A^2$ un monomorfismo tale che $[v]$ sia una congruenza su A.*

I') *Se esistono $K(f)$ e $H(f)$, esiste anche $J(K(f))$ ed è*

$$J(K(f)) = H(f).$$

II') *Se esistono $K(f)$ e $J(K(f))$, esiste anche $H(f)$ ed è*

$$H(f) = J(K(f)).$$

III') *Se esistono $K(f)$ e $J(v)$ e sono eguali, allora esiste $K(f)$ ed è*

$$K(f) = [v].$$

Dimostrazione. I') Per I) del Teorema 1 esiste $Q(H(f))$, ed è

$$Q(H(f)) = K(f);$$

ma per l'Osservazione 9 di [2]

$$J(K(f)) = H(f).$$

II') Per l'Osservazione 9 di [2] esiste $Q\big(J(K(f))\big)$ e quindi si ha pure, per III) del Teorema 1, che esiste $H(f)$ ed è

$$H(f) = J(K(f)).$$

III') Sfruttando la già citata Osservazione 9 e II) del Teorema 1, si ha ovviamente

$$K(f) = [v].$$

In modo simile si dimostrano i seguenti corollari:

Corollario 2. *Enunciato analogo a quello del Corollario 1 con le funzioni E, Q e K in luogo di K, H e J, rispettivamente.*

Corollario 3. *Enunciato analogo a quello del Corollario 1 con le funzioni J, N e E in luogo di K, H e J, rispettivamente.*

Corollario 4. *Enunciato analogo a quello del Corollario 1 con le funzioni Q, E e N in luogo di K, H e J, rispettivamente.*

Corollario 5. *Enunciato analogo a quello del Corollario 1 con le funzioni N, J e H in luogo di K, H e J, rispettivamente.*

Osservazione 1. Il Teorema 1 afferma che H subordina una corrispondenza biunivoca fra $\mathrm{D}H \cap \mathrm{D}K$ e $\mathrm{D}Q \cap \mathrm{C}H$ e Q ne subordina una tra quest'ultimo insieme e $\mathrm{C}Q \cap \mathrm{C}K$, inoltre la loro composizione è la corrispondenza biunivoca fra $\mathrm{D}H \cap \mathrm{D}K$ e $\mathrm{C}Q \cap \mathrm{C}K$, subordinata da K. I Corollari successivi stabiliscono relazioni analoghe tra domini e codomini delle funzioni cui si riferiscono.

Vale poi la seguente

Osservazione 2. Si ha

$$\mathrm{D}H \cap \mathrm{D}K \neq \emptyset .$$

Infatti $[1_A] \in \mathrm{D}H \cap \mathrm{D}K$; inoltre in virtù dell'Osservazione 1 non sono vuoti neppure gli insiemi $\mathrm{D}Q \cap \mathrm{C}H$ e $\mathrm{C}Q \cap \mathrm{C}K$.

2. – Tra gli omomorfismi suriettivi, si diranno regolari quelli che ammettono nucleo (come definito in [4]). Si può dimostrare il seguente

Teorema 2. *Sia* $f\colon A \twoheadrightarrow A'$ *un omomorfismo suriettivo; esiste* $H(f)$ *se e solo se esiste la controimmagine, in* f, *di ogni sottoggetto* $[u']$ *di* A'.

Dimostrazione. Ovviamente, se esiste la controimmagine, in f, di ogni sottoggetto di A', esiste in particolare un limite del diagramma (3), in quanto esso è dato dalla controimmagine, in f, del sottoggetto $[z']$ di A', che per definizione della funzione H, è $H(f)$.

Viceversa, si supponga che esista $H(f)$, e sia $u'\colon B' \rightarrowtail A'$ un monomorfismo. Si vuole provare che il diagramma

$$A \xrightarrow[f]{\quad\quad} \!\!\!\!\rightarrow A' \xleftarrow[u']{\quad\quad}\!\!\!\!\prec B' \tag{15}$$

ammette limite. Si supponga ora che (2) sia un limite di (3) e si indichi con $f'\colon A' \rightarrowtail A$ un inverso destro di f. La famiglia

$$(s(f^{\#} \times f'u')\colon F^{\#} \times B' \to A;\ \ \varepsilon_2\colon F^{\#} \times B' \to B') \tag{16}$$

è ovviamente una famiglia compatibile per (15). Posto

$$y = s\{1_A, \sigma f'f\}\colon A \to A ,$$

dalla compatibilità di

$$(y\colon A \to A;\ \ \alpha\colon A \to \mathbf{1})$$

per (3) segue che esiste un morfismo $\theta\colon A \longrightarrow F^{\#}$ con

$$f^{\#}\theta = y\,.$$

Per ogni famiglia

$$(x_1\colon X \longrightarrow A\,;\quad x_2\colon X \longrightarrow B')$$

compatibile per (15), il morfismo

$$\theta_1 = \{\theta x_1, x_2\}\colon X \longrightarrow F^{\#} \times B'$$

è tale che

$$\text{(17)}\qquad \begin{cases} \varepsilon_2\theta_1 = x_2 \\ s(f^{\#} \times f'u')\theta_1 = x_1\,. \end{cases}$$

Viceversa, sia $\theta_1\colon X \longrightarrow F^{\#} \times B'$ un morfismo soddisfacente le (17), si mostra che $\theta_1 = \{\theta x_1, x_2\}$. Sarà sufficiente provare che

$$\varepsilon_1\theta_1 = \theta x_1\,.$$

Allo scopo si consideri che si ha

$$s\{f^{\#}\varepsilon_1\,\theta_1, \sigma f^{\#}\theta x_1\} \leqslant z\,,$$

e, per il Lemma 2 di [2] e per il fatto che $f^{\#}$ è un monomorfismo, si conclude che $\theta_1 = \{\theta x_1, x_2\}$. Pertanto (15) ammette limite, dato da (16); quindi esiste la controimmagine di ogni sottoggetto di A' se esiste $H(f)$.

Corollario 6. *Siano* $f\colon A \twoheadrightarrow A'$ *e* $g\colon A' \twoheadrightarrow A''$ *due omomorfismi suriettivi tali che esistano* $H(f)$ *e* $H(g)$. *Allora esiste pure* $H(gf)$.

Teorema 3. *Siano* $f\colon A \twoheadrightarrow A'$ *e* $f_1\colon A_1 \twoheadrightarrow A_1'$ *due omomorfismi suriettivi tali che esistano* $H(f)$ *e* $H(f_1)$. *Allora esiste pure* $H(f \times f_1)$ *ed è*

$$H(f \times f_1) = [f^{\#} \times f_1^{\#}]\,.$$

Dimostrazione. Segue come ovvio corollario dalla seguente

Osservazione 3. Siano dati i seguenti diagrammi:

(i) $$A \xrightarrow{f} A' \xleftarrow{u'} B',$$

(ii) $$A_1 \xrightarrow{f_1} A_1' \xleftarrow{u_1'} B_1',$$

(iii) $$A \times A_1 \xrightarrow{f \times f_1} A' \times A_1' \xleftarrow{u' \times u_1'} B' \times B_1'.$$

Se (i) e (ii) ammettono limite, anche (iii) ammette limite, dato dal prodotto dei limiti.

Dimostrazione. Siano

(i') $$(u\colon B \rightarrowtail A;\quad w\colon B \to B'),$$

(ii') $$(u_1\colon B_1 \rightarrowtail A_1;\quad w_1\colon B_1 \to B'),$$

rispettivamente, limiti di (i) e (ii). Si consideri la famiglia

(iii') $$(u \times u_1\colon B \times B_1 \rightarrowtail A \times A_1;\ w \times w_1\colon B \times B_1 \to B' \times B_1');$$

è facile provare che tale famiglia è compatibile per (iii) ed anzi è un limite di tale diagramma.

Corollario 7. *Sia* $f\colon A \twoheadrightarrow A'$ *un omomorfismo suriettivo tale che esista* $H(f)$; *allora esiste* $H(f^2)$.

In virtù del Corollario 7 si può dimostrare che se esiste $H(f)$, allora f è regolare. Si premette la seguente

Osservazione 4. L'egualizzatore di $f\varepsilon_1$, $f\varepsilon_2$, se esiste, è la controimmagine di $\Delta_{A'}$ in f^2 e viceversa.

Esista $K(f)$, vale a dire, sia (1) un limite della Figura 2; si ha allora, in modo ovvio, che (1) è una famiglia compatibile per il seguente diagramma:

(18) $$A^2 \xrightarrow{f^2} A'^2 \xleftarrow{\Delta_{A'}} A'.$$

Sia poi

(19) $$(X \to A^2;\quad X \to A')$$

una famiglia compatibile per (18); è facile constatare che

$$X \to A^2 \xrightarrow{f\varepsilon_1} A' = X \to A^2 \xrightarrow{f\varepsilon_2} A'$$

e cioè che (19) è una famiglia compatibile per la Figura 2. Esiste allora un morfismo $X \to F_{\#}$, tale che

$$X \to F_{\#} \to A^2 = X \to A^2; \qquad X \to F_{\#} \to A' = X \to A'.$$

Essendo inoltre $f_{\#}$ un monomorfismo, da quanto finora osservato si può concludere che (1) è un limite di (18).

Viceversa, si supponga che esista un limite di (18), dato da una famiglia

$$(d\colon D \to A^2;\ d'\colon D \to A');$$

tale famiglia è compatibile per la Figura 2. Per ogni famiglia

$$(t\colon T \to A^2;\ t'\colon T \to A') \tag{20}$$

compatibile per la Figura 2, vale a dire che sia

$$f\varepsilon_1 t = t' = f\varepsilon_2 t\,,$$

si ha

$$f^2 t = \Delta_{A'} t'.$$

Perciò (20) è una famiglia compatibile per (18). Esiste quindi un morfismo $t_1\colon T \to D$ tale che

$$dt_1 = t\,; \qquad d' t_1 = t' = f\varepsilon_1 t\,.$$

Corollario 8. *Se esiste $H(f)$, f è regolare.*

Per il Corollario 7 esiste $H(f^2)$ e per il Teorema 2, applicato all'omomorfismo suriettivo f^2, esiste la controimmagine, appunto in f^2, di ogni sottoggetto di A'^2. In particolare esiste la controimmagine di $[\Delta_{A'}]$ che è, per l'Osservazione 4, $K(f)$.

Si ha poi il seguente

Lemma 4. *Sia $f\colon A \twoheadrightarrow A'$ un omomorfismo suriettivo regolare. Se esiste $H(f)$, esiste* $\mathrm{IM}(s(1_A \times \sigma) f_{\#})$ (4) *ed è*

$$\mathrm{IM}(s(1_A \times \sigma) f_{\#}) = H(f)\,.$$

(4) Con IM si vuole indicare l'« immagine forte » per la cui definizione si confronti [4].

D i m o s t r a z i o n e. Si ha ovviamente

$$fs(1_A \times \sigma) f_{\#} = z' \varphi_{\#}\,, \tag{21}$$

vale a dire, la famiglia

$$(s(1_A \times \sigma) f_{\#} \colon F_{\#} \to A\,;\ \ \varphi_{\#} \colon F_{\#} \to \mathbf{1})$$

è compatibile per (3). Poichè esiste $H(f)$, esiste uno ed un solo morfismo $f_{\#}^{\cdot\#} \colon F_{\#} \to F^{\#}$ tale che

$$f^{\#} f_{\#}^{\cdot\#} = s(1_A \times \sigma) f_{\#}\,.$$

Per provare l'asserto sarà quindi sufficiente dimostrare che $f_{\#}^{\cdot\#}$ è una ritrazione. Dalla (6) si ha:

$$f^{\#} f^{\cdot\#} f^{\#}_{\cdot\#} = s(1_A \times \sigma) f_{\#} f^{\#}_{\cdot\#} = s(1_A \times \sigma) G(z) f^{\#} = f^{\#}\,,$$

e quindi:

$$f_{\#}^{\cdot\#} f^{\#}_{\cdot\#} = 1_{F\#}\,,$$

giacchè $f^{\#}$ è un monomorfismo.

Il Lemma 4 si può invertire, anche indebolendo le ipotesi, grazie al seguente

T e o r e m a 4. *Sia $f \colon A \twoheadrightarrow A'$ un omomorfismo suriettivo regolare e sia verificata la seguente ipotesi*:

$$(\mathrm{J}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{esistono un epimorfismo } k_{\#} \colon F_{\#} \to B \textit{ e un monomorfismo } u \colon B \rightarrowtail A \\ \textit{tali che } s(1_A \times \sigma) f_{\#} = u\, k_{\#}\,, \end{array} \right.$$

allora esiste $H(f)$ ed è $H(f) = [u]$.

D i m o s t r a z i o n e. Per l'ipotesi (J) e dalla (21), posto $\beta \colon B \to \mathbf{1}$, si ha

$$f\, u\, k_{\#} = z' \beta\, k_{\#}$$

e quindi

$$fu = z' \beta\,.$$

Pertanto

$$(u \colon B \rightarrowtail A\,;\ \ \beta \colon B \to \mathbf{1}) \tag{22}$$

è una famiglia compatibile per (3). Sia poi $(x \colon X \to A\,;\ \chi \colon X \to \mathbf{1})$ una famiglia compatibile per (3). Indicato con f' un inverso destro di f e posto

$$y' = \{s\{1_A, f'f\}, f'f\}\colon A \to A^2,$$

si ha

$$f^2 y' x = \Delta_{A'}\, z'\chi\,,$$

cioè

$$(y'x\colon X \to A^2;\ z'\chi\colon X \to A')$$

è compatibile per (18). Esiste perciò un morfismo $x'\colon X \to F_{\#}$, tale che

$$f_{\#} x' = y' x; \qquad f\varepsilon_1 f_{\#} x' = z'\chi\,.$$

Ma allora

$$s(1_A \times \sigma) f_{\#} x' = s(1_A \times \sigma) y' x = x\,,$$

perciò

$$u k_{\#} x' = x; \qquad \beta k_{\#} x' = \chi\,.$$

Quindi (22) è un limite di (3) ed allora $H(f) = [u]$.

La ipotesi ($\mathfrak{J}$) permette di dimostrare il seguente

Corollario 9. *Se $f\colon A \twoheadrightarrow A'$ è un omomorfismo suriettivo regolare ed è verificata l'ipotesi* ($\mathfrak{J}$), *allora esiste la controimmagine, in f^2, di ogni sottoggetto di A'^2.*

Dimostrazione. Se esiste $K(f)$, per ($\mathfrak{J}$) esiste $H(f)$, per il Teorema 4, e quindi pure $H(f^2)$, per il Corollario 7, e perciò, grazie al Teorema 2, esiste la controimmagine di ogni sottoggetto di A'^2 in f^2.

Dai risultati precedenti si ha ovviamente $\mathrm{D}H \subset \mathrm{D}K$ e $\mathfrak{A}K \subset \mathfrak{A}Q$. Se inoltre vale l'ipotesi ($\mathfrak{J}$) per ogni omomorfismo suriettivo regolare, allora $\mathrm{D}H = \mathrm{D}K$ e $\mathfrak{A}K \subset \mathfrak{A}Q$.

3. – È ben noto che nel caso « concreto », dato il nucleo [5] di un omomorfismo, è individuato altresì l'ideale che funziona da controimmagine dello zero e viceversa. Nel caso « astratto » il Corollario 8 assicura che dato l'ideale è possibile individuare la congruenza che è nucleo dell'omomorfismo, mentre il Lemma 4 e il Teorema 4 stabiliscono che si può passare dalla congruenza all'ideale se è verificata una condizione aggiuntiva, l'ipotesi ($\mathfrak{J}$). Il controesempio che è dato qui di seguito mostra inoltre che tale ipotesi non è superflua.

Sia $\mathcal{S}$ la categoria degli insiemi finiti e delle funzioni; sia $\mathfrak{D}$ la classe degli insiemi (finiti) aventi cardinalità 2^n con $n \geq 1$. Nel seguito con $\mathcal{S}'$ si intenderà la sottocategoria piena di $\mathcal{S}$ tale che

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}' = \mathrm{Ob}\,\mathcal{S} - \mathfrak{D}\,.$$

---

[5] Si intende parlare di « nucleo » come definito in [1].

Osservazione 5. La classe Ob $\mathcal{S}'$ è chiusa rispetto ai prodotti finiti.

Invero, $\mathcal{S}'$ contiene l'oggetto nullo in quanto esso è dato da un insieme di cardinalità 1 ed inoltre, contenendo due oggetti A e B, ne contiene anche i loro prodotti, in quanto tutti equipotenti al prodotto cartesiano dei due, la cui cardinalità è data dal prodotto delle cardinalità di A e di B. Quindi ogni prodotto ha cardinalità che non è potenza di 2, vale a dire, è un elemento di $\mathcal{S}'$.

Osservazione 6. La categoria $\mathcal{S}'$ è dotata di prodotti finiti. La dimostrazione di questo fatto è banale conseguenza della Osservazione 5 e della seguente

Osservazione 7. Sia $\mathcal{K}$ una categoria con prodotti finiti, sia $\mathcal{K}'$ una sua sottocategoria piena tale che Ob $\mathcal{K}'$ sia una classe chiusa rispetto ai prodotti finiti; allora $\mathcal{K}'$ è dotata di prodotti finiti.

Per ogni numero $n \geqslant 1$, presi comunque n oggetti $K_1, K_2, \ldots, K_n$ di $\mathcal{K}'$, si consideri un loro prodotto, in $\mathcal{K}$, dato dalla famiglia

$$(\varepsilon_i\colon P \longrightarrow K_i)_{i=1,2,\ldots,n} . \tag{23}$$

Poichè Ob $\mathcal{K}'$ è chiusa rispetto ai prodotti e $\mathcal{K}'$ è sottocategoria piena, si ha che (23) è una famiglia di $\mathcal{K}'$ ed inoltre per ogni famiglia (in $\mathcal{K}'$)

$$(x_i\colon X \longrightarrow K_i)_{i=1,2,\ldots,n} ,$$

esiste uno ed uno solo morfismo (in $\mathcal{K}$) $x\colon X \longrightarrow P$ tale che per ogni indice i compreso tra 1 e n si abbia

$$\varepsilon_i\, x = x_i .$$

Ma X e P sono oggetti di $\mathcal{K}'$ che è sottocategoria piena; quindi x è un morfismo di $\mathcal{K}'$.

Se infine $n = 0$, un prodotto di nessun oggetto è dato dall'oggetto nullo che appartiene a $\mathcal{K}'$.

È immediato poi constatare che ogni ritrazione di $\mathcal{K}'$ è pure una ritrazione di $\mathcal{K}$ e se un morfismo di $\mathcal{K}'$ è una ritrazione in $\mathcal{K}$ lo è pure in $\mathcal{K}'$, in quanto quest'ultima è piena. Così pure ogni morfismo di $\mathcal{K}'$ che è monomorfismo in $\mathcal{K}$ lo è pure in $\mathcal{K}'$. In generale il viceversa è falso; si ha però la seguente

Osservazione 8. Sia $w\colon A \longrightarrow A'$ un monomorfismo di $\mathcal{S}'$, allora w è un monomorfismo di $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. Sarà sufficiente osservare che ogni monomorfismo di S' è una funzione iniettiva. Se w non fosse iniettiva, esisterebbero due elementi a e a_1 di $\mathrm{Hom}_S(\mathbf{1}, A)$, distinti, tali che

$$w\,a = w\,a_1\,,$$

ma $\mathrm{Hom}_S(\mathbf{1}, A) = \mathrm{Hom}_{S'}(\mathbf{1}, A)$ e quindi si avrebbe $a = a_1$.

Le considerazioni sopra sviluppate si possono poi dualizzare per ottenere proposizioni analoghe per le coritrazioni e gli epimorfismi.

Si considerino ora i gruppi additivi $\mathbf{Z}_6$ e $\mathbf{Z}_3$ delle classi di resti modulo 6 e modulo 3, rispettivamente. Gli insiemi sottogiacenti sono ovviamente elementi di $\mathrm{Ob}\,S'$. Si consideri poi la ritrazione di S', $f\colon \mathbf{Z}_6 \twoheadrightarrow \mathbf{Z}_3$ definita da

$$f([x]_6) = [x]_3\,.$$

È evidente che si tratta di un omomorfismo suriettivo. Si consideri poi il sottoinsieme di $\mathbf{Z}_6^2$ dato da

$$F_{\#} = \{([x]_6, [y]_6) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge x - y \equiv 0 \pmod 3\}\,.$$

L'insieme $F_{\#}$ ha cardinalità 12 e pertanto è un oggetto di S' ed è facile vedere che si tratta di una congruenza su $\mathbf{Z}_6$; inoltre l'inclusione $f_{\#}\colon F_{\#} \rightarrowtail \mathbf{Z}_6^2$ è l'egualizzatore dei morfismi $f\varepsilon_1$ e $f\varepsilon_2$ di $\mathrm{Hom}_{S'}(\mathbf{Z}_6^2, \mathbf{Z}_3)$.

La controimmagine dello «zero» in f sarebbe data, in S, dall'insieme $H = \{[0]_6, [3]_6\}$, che per costruzione è escluso da S'. Questo però non deve stupire in quanto non esiste in S' l'immagine forte del morfismo

$$s(1_A \times \sigma) f_{\#}\colon F_{\#} \to \mathbf{Z}_6,$$

definito, per ogni elemento di $F_{\#}$, da

$$s(1_A \times \sigma) f_{\#}([x]_6, [y]_6) = [x - y]_6\,.$$

Se infatti esistesse, per quanto sopra osservato, sarebbe anche immagine forte, in S, dello stesso morfismo e questa è data appunto dall'insieme H.

Esiste perciò, in S', $K(f)$ ma non $H(f)$.

Bibliografia.

[1] P. M. COHN, *Universal Algebra*, Harper and Row, New York 1965.

[2] C. MARCHINI, *Sugli ideali, le congruenze e i quozienti di Ω-gruppi in una categoria astratta*, Ann. Univ. Ferrara (VII) **16** (1971), 1-28.

[3] B. MITCHELL, *Theory of Categories*, Academic Press, New York 1965.

[4] M. SERVI, *Questioni di algebra universale in una categoria astratta* (I), Ann. Univ. Ferrara (VII) **13** (1968), 91-116.

Sommario.

Si studiano alcune proprietà delle funzioni H, K e Q, definite in un precedente lavoro (cfr. [2]*), che legano omomorfismi, congruenze ed ideali di Ω-gruppi in una categoria con prodotti finiti.*

Summary.

We study some properties of the previously defined functions (see [2]*), H, K and Q, relating homomorphisms, congruences and ideals of Ω-groups in a category with finite products.*

* * *