Riv. Mat. Univ. Parma (2) 12 (1971), 73-81

M. DIVARI e M. PANDOLFI (*)

Sulle soluzioni di un sistema di equazioni funzionali relative ad una legge compositiva della informazione. (**)

§ 1. - Introduzione.

In una precedente Nota [1] abbiamo caratterizzato le misure d'informazione che godono di una proprietà che generalizza quella di località [2] nell'ambito generale della teoria assiomatica dell'informazione senza probabilità.

Siano Ω uno spazio di eventi elementari e $\mathcal{F}$ un'algebra di sottoinsiemi di Ω. Indichiamo con $\mathcal{E}$ una famiglia non vuota di partizioni appartenenti ad $\mathcal{F}$ e con K^* un insieme di classi K_a di partizioni algebricamente indipendenti in $\mathcal{E}$ tali che le algebre di BOOLE generate da due qualsiasi elementi di una classe K_a siano indipendenti in senso algebrico [2], ove a appartiene ad una classe di indici.

Nella Nota [1] abbiamo caratterizzato le funzioni Ψ che esprimono la legge compositiva della misura d'informazione nel caso

$$H(\pi_A \cup \pi_B) = \Psi(H(\pi_A \cup \{B\}),\ H(\{A\} \cup \pi_B),\ H(\{A\} \cup \{B\}))\,,$$

per ogni $\pi_A \in \mathcal{E}$, $\pi_B \in \mathcal{E}$, tali che $A \cap B = \varnothing$ e $\pi_A \cup \pi_B \in \mathcal{E}$, $\pi_A \cup \{B\} \in \mathcal{E}$, $\{A\} \cup \pi_B \in \mathcal{E}$, $\{A\} \cup \{B\} \in \mathcal{E}$. La funzione Ψ, posto $H(\pi_A \cup \{B\}) = u$, $H(\{A\} \cup \pi_B) = v$, $H(\{A\} \cup \{B\}) = w$, assume, nell'ipotesi che esprima un operatore univer-

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Pavia, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R. — Ricevuto: 12-I-1971.

sale [3], una delle seguenti forme:

$$\Psi(u,\ v,\ w) = u + v - w\ ,$$

$$\Psi(u,\ v,\ w) = \log_\alpha(\alpha^{u-w} + \alpha^{v-w} - 1) + w \qquad \text{con } \alpha > 1\ ,$$

$$\Psi(u,\ v,\ w) = \sup(u,\ v)\ .$$

Di conseguenza l'informazione H_n associata ad una partizione di un evento A in n eventi, una volta note le informazioni H_2 e H_3 relative alle partizioni di A in due e tre eventi disgiunti, si esprime per ricorrenza:

$$H_n = H_{n-1} + H_3 - H_2\ , \tag{1.1}$$

$$H_n = \log_\alpha(\alpha^{H_{n-1}-H_2} + \alpha^{H_3-H_2} - 1) + H_2 \qquad \text{con } \alpha > 1\ , \tag{1.2}$$

$$H_n = \sup(H_{n-1}\ ,\ H_3)\ , \tag{1.3}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned}
H_n &= H(A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots,\ A_n)\ ,\\
H_{n-1} &= H(A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots,\ A_{n-2}\ ,\ A_{n-1} \cup A_n)\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H_3 &= H(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-2}\ ,\ A_{n-1}\ ,\ A_n)\ ,\\
H_2 &= H(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-2}\ ,\ A_{n-1} \cup A_n)\ .
\end{aligned}$$

Ci chiediamo ora se, una volta date le misure di informazione H_2 e H_3, le $H_n(A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots,\ A_n)$ espresse nella forma (1.1), (1.2) e (1.3) siano funzioni di partizione, e si possano assumere come misure di informazione. Infatti non è detto a priori che le funzioni $H_n(A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots,\ A_n)$ ottenute considerando partizioni via via più fini, che da una partizione iniziale in 3 eventi portino ad una finale in n eventi, risultino indipendenti dal procedimento di raffinamento seguito e siano quindi di fatto funzioni di partizione.

Nel presente lavoro ci proponiamo dunque, nell'ipotesi che siano assegnate le misure di informazione H_2 e H_3, di caratterizzare le condizioni necessarie e sufficienti, in termini di H_2 e H_3, perchè le corrispondenti H_n, espresse nelle forme (1.1), (1.2), (1.3), soddisfino agli assiomi che definiscono una misura di informazione senza probabilità.

§ 2. - Condizioni di compatibilità con i postulati che caratterizzano l'informazione [2].

Esaminiamo separatamente le forme (1.1), (1.2), (1.3).

I) La soluzione

$$(1.1)\quad H_n(A_1, \ldots, A_n) = H_{n-1}(A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n) + H_3(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) - H_2(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n)$$

può essere assunta quale misura d'informazione secondo quanto dimostrato da B. L. Forte e N. Pintacuda [4]. La soluzione (1.1) esprime il principio di località e le entropie corrispondenti sono quelle caratterizzate da B. L. Forte e N. Pintacuda [4].

II) Esaminiamo, ora, la soluzione

$$(1.2)\quad \begin{cases} H_n(A_1, \ldots, A_n) = \log_\alpha(\alpha^{H_{n-1}(A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n) - H_2(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n)} + \\ \qquad + \alpha^{H_3(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) - H_2(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n)} - 1) + \\ \qquad + H_2(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n) \end{cases}$$

con $\alpha > 1$.

Ponendo $\varphi_n(A_1, \ldots, A_n) = \alpha^{H_n(A_1, \ldots, A_n)}$ la (1.2) diventa

$$(2.1)\quad \begin{cases} \varphi_n(A_1, \ldots, A_n) = \varphi_{n-1}(A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n) + \varphi_3(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) \\ \qquad - \varphi_2(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n), \end{cases}$$

relazione che è identica a quella che esprime il principio di località per l'entropia.

L'applicazione $\varphi_n(A_1, \ldots, A_n) = \alpha^{H_n(A_1, \ldots, A_n)}$ può essere espressa nella forma

$$(2.2)\quad \begin{cases} \varphi_n(A_1, \ldots, A_n) = \\ = \alpha^{H_n(A_1, \ldots, A_n)} = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha^{H_3\left(\bigcup_1^{n-i-1} A_J, A_{n-i}, \bigcup_{n-i+1}^{n} A_h\right)} - \sum_{i=2}^{n-2} \alpha^{H_2\left(\bigcup_1^{n-i} A_J, \bigcup_{n-i+1}^{n} A_h\right)}. \end{cases}$$

Perchè la corrispondente $H_n(A_1, \ldots, A_n)$ risulti simmetrica negli argomenti, nel qual caso H_n risulta funzione di partizione, occorre e basta che tale sia la $\varphi_n(A_1, \ldots, A_n)$. Detta condizione di simmetria può essere dedotta con lo stesso procedimento seguito da B. L. FORTE e N. PINTACUDA [4], ed ha la forma

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \alpha^{H_3(C \cup D, A, B)} - \alpha^{H_2(C \cup D, A \cup B)} + \alpha^{H_3(D, A \cup B, C)} = \\ = \alpha^{H_3(B \cup D, A, C)} - \alpha^{H_2(B \cup D, A \cup C)} + \alpha^{H_3(D, A \cup C, B)} \end{cases}$$

per ogni $A, B, C, D \in \mathcal{E}$.

Perchè la funzione di partizione $H_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sia monotona non decrescente, occorre e basta che tale sia la funzione $\varphi_n(A_1, \ldots, A_n)$ $(\alpha > 1)$. Ciò, d'altra parte, risulta dal fatto che, essendo

$$H_3(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) \geqslant H_2(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n)$$

per l'ipotesi fatta su H_2 e H_3, si ha sempre $\varphi_3 \geqslant \varphi_2$ e quindi, tenendo conto della (2.1), risulta $\varphi_n \geqslant \varphi_{n-1}$ per ogni partizione di A in n e $n-1$ eventi disgiunti, rispettivamente.

Dalla monotonia della funzione $H_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ e dal fatto che, in base alle (2.2) e (2.3), $\varphi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)\colon\ \mathcal{E} \to \overline{R}^+$ consegue che H_n è una applicazione di $\mathcal{E}$ in $\overline{R}^+$.

Perchè la funzione $H_n(A_1, \ldots, A_n)$ sia addittiva, cioè

$$\begin{aligned} H_{mn}(A_1B_1, \ldots, A_1B_n, A_2B_1, \ldots, A_2B_n, \ldots, A_mB_1, \ldots, A_mB_n) = \\ = H_m(A_1, \ldots, A_m) + H_n(B_1, \ldots, B_n) \end{aligned}$$

per ogni partizione $\pi_A \equiv \{A_1, \ldots, A_n\}$ e $\pi_B \equiv \{B_1, \ldots, B_n\}$ appartenenti alla classe K^*, occorre e basta che sia, limitatamente al caso delle partizioni complete [4],

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{t=1 \\ [(t \neq i = 1) \wedge (t \neq n \wedge i \neq m)]}}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha^{H_3\left(\bigcup_0^{i-1} A_J \cup A_i\left(\bigcup_0^{t-1} B_s\right),\ A_i B_t,\ A_i\left(\bigcup_{t+1}^{n} B_s\right) \cup \left(\bigcup_{i+1}^{m} A_k\right)\right)} - \\ \qquad - \displaystyle\sum_{\substack{t=1 \\ [(t \neq i = 1) \wedge (t \neq 2 \wedge i \neq 1) \wedge (t \neq n \wedge i \neq m)]}}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha^{H_2\left(\bigcup_0^{i-1} A_J \cup A_i\left(\bigcup_0^{t-1} B_s\right),\ A_i\left(\bigcup_{t}^{n} B_s\right) \cup \left(\bigcup_{i+1}^{m} A_k\right)\right)} = \\ = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha^{H_3\left(\bigcup_1^{m-i-1} A_J,\ A_{m-i},\ \bigcup_{m-i+1}^{m} A_k\right)} - \sum_{i=2}^{m-2} \alpha^{H_2\left(\bigcup_1^{m-i} A_J,\ \bigcup_{m-i+1}^{m} A_k\right)}\right) \cdot \\ \qquad \cdot \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} \alpha^{H_3\left(\bigcup_1^{n-i-1} B_J,\ B_{n-i},\ \bigcup_{n-i+1}^{n} B_k\right)} - \sum_{i=2}^{n-2} \alpha^{H_2\left(\bigcup_1^{n-i} B_J,\ \bigcup_{n-i+1}^{n} B_k\right)}\right) \cdot \end{cases}$$

Concludendo, il $\log_\alpha$ della funzione $\varphi_n(A_1, \ldots, A_n)$ definisce una misura H_n d'informazione se e solo se sono verificate le condizioni:

$$
(2.3') \qquad \begin{cases} \varphi_3(C \cup D,\ A,\ B) - \varphi_2(C \cup D,\ A \cup B) + \varphi_3(D,\ A \cup B,\ C) = \\ = \varphi_3(B \cup D,\ A,\ C) - \varphi_2(B \cup D,\ A \cup C) + \varphi_3(D,\ A \cup C,\ B) \end{cases}
$$

per ogni $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{E}$;

$$
(2.4') \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{t=1 \\ [(t \neq i=1 \wedge (t \neq n \wedge i \neq m)]}}^{n} \sum_{i=1}^{m} \varphi_3\Big(\bigcup_0^{i-1} A_j \cup A_i\big(\bigcup_0^{t-1} B_s\big),\ A_i B_t,\ A_i\big(\bigcup_{t+1}^{n} B_s\big) \cup \big(\bigcup_{i+1}^{m} A_k\big)\Big) - \\ \qquad\qquad - \displaystyle\sum_{\substack{t=1 \\ [(t \neq i=1) \wedge (t \neq 2 \wedge i \neq 1) \wedge (t \neq n \wedge i \neq m)]}}^{n} \sum_{i=1}^{m} \varphi_2\Big(\bigcup_0^{i-1} A_j \cup A_i\big(\bigcup_0^{t-1} B_s\big),\ A_i\big(\bigcup_t^{n} B_s\big) \cup \big(\bigcup_{i+1}^{m} A_k\big)\Big) = \\ = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \varphi_3\Big(\bigcup_1^{m-i-1} A_j,\ A_{m-i},\ \bigcup_{m-i+1}^{m} A_k\Big) - \sum_{i=2}^{m-2} \varphi_2\Big(\bigcup_1^{m-i} A_j,\ \bigcup_{m-i+1}^{m} A_k\Big)\Big) \cdot \\ \qquad \cdot \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} \varphi_3\Big(\bigcup_1^{n-i-1} B_j,\ B_{n-i},\ \bigcup_{n-i+1}^{n} B_k\Big) - \sum_{i=2}^{n-2} \varphi_2\Big(\bigcup_1^{n-i} B_j,\ \bigcup_{n-i+1}^{n} B_h\Big)\Big). \end{cases}
$$

III) Esaminiamo, infine, la soluzione

$$
(1.3) \qquad \begin{cases} H_n(A_1, \ldots, A_n) = \\ = \sup\left\{H_{n-1}(A_1, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1} \cup A_n),\ H_3(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-2}, A_{n-1}, A_n)\right\}, \end{cases}
$$

che possiamo scrivere nella forma

$$
(2.5) \qquad H_n(A_1, \ldots, A_n) = \sup_{1 \leq i \leq n-2} \left\{H_3\Big(\bigcup_0^{i} A_k,\ A_{i+1},\ \bigcup_{i+2}^{n} A_h\Big)\right\}.
$$

La (2.5) mette in evidenza che la soluzione in esame è non negativa, essendo per l'ipotesi fatta $H_3\big(\bigcup_0^{i} A_k,\ A_{i+1},\ \bigcup_{i+2}^{n} A_h\big) \geqslant 0$. Per assicurare la simmetria della forma (1.3), nel qual caso $H_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ risulta funzione di partizione, basta imporre che sia soddisfatta la condizione di simmetria che si ottiene per il caso particolare di $n = 4$:

$$\left\{\begin{aligned} &\sup\{H_3(A,\ B,\ C \cup D)\ ,\ H_3(A \cup B,\ C,\ D)\} = \\ &= \sup\{H_3(A,\ C,\ B \cup D),\ H_3(A \cup C,\ B,\ D)\}\end{aligned}\right. \tag{2.6}$$

per ogni $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{E}$.

Infatti, permutando due eventi successivi A_r e A_{r+1} nell'espressione (2.5)

$$H_n(A_1\,,\ \ldots,\ A_n) = \sup_{1 \leq i \leq n-2} \{H_3(\bigcup_0^i A_k\,,\ A_{i+1}\,,\ \bigcup_{i+2}^n A_h)\},$$

cambiano soltanto i due termini corrispondenti a $i = r - 1$ e $i = r$, cioè:

$$H_3(\bigcup_0^{r-1} A_k\,,\ A_r\,,\ \bigcup_{r+1}^n A_h)\,, \qquad H_3(\bigcup_0^r A_k\,,\ A_{r+1}\,,\ \bigcup_{r+2}^n A_h)\,,$$

i quali si trasformano nei seguenti:

$$H_3(\bigcup_0^{r-1} A_k\,,\ A_{r+1}\,,\ A_r \cup [\bigcup_{r+2}^n A_k])\,, \qquad H_3(A_{r+1} \cup [\bigcup_0^{r-1} A_k]\,,\ A_r\,,\ \bigcup_{r+2}^n A_h)\,,$$

ma in virtù della condizione (2.6) non cambia il loro valore più grande, poichè:

$$\sup\{H_3(\bigcup_0^{r-1} A_k\,,\ A_r\,,\ \bigcup_{r+1}^n A_h)\,,\ H_3(\bigcup_0^r A_k\,,\ A_{r+1}\,,\ \bigcup_{r+2}^n A_h)\} =$$

$$= \sup\{H_3(\bigcup_0^{r-1} A_k\,,\ A_{r+1}\,,\ A_r \cup [\bigcup_{r+2}^n A_h])\,,\ H_3(A_{r+1} \cup [\bigcup_0^{r-1} A_k]\,,\ A_r\,,\ \bigcup_{r+2}^n A_h)\}$$

con

$$\bigcup_0^{r-1} A_k = A\,, \qquad A_r = B\,, \qquad A_{r+1} = C\,, \qquad \bigcup_{r+2}^n A_h = D\,.$$

La soluzione (1.3) è monotona non decrescente. Infatti,

$$H_{n+1}(A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots,\ A_n\,,\ A_{n+1}) = \sup_{1 \leq i \leq n-1} \{H_3(\bigcup_0^i A_k\,,\ A_{i+1}\,,\ \bigcup_{i+2}^{n+1} A_h)\} =$$

$$= \sup_{2 \leq i \leq n-1} \{H_3(A_1\,,\ A_2\,,\ A_3 \cup \ldots \cup A_{n+1})\,,\ H_3(\bigcup_0^i A_k\,,\ A_{i+1}\,,\ \bigcup_{i+2}^{n+1} A_h)\}$$

e

$$H_n(A_1 \cup A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}) = \sup_{2 \leq i \leq n-1} \left\{ H_3(A_1 \cup A_2 \cup (\bigcup_3^i A_k), A_{i+1}, \bigcup_{i+2}^{n+1} A_h) \right\}. \tag{2.7}$$

Osserviamo che H_{n+1} può essere scritto nella forma seguente:

$$\begin{cases} H_{n+1}(A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}) = \\ = \sup\limits_{2 \leq i \leq n-1} \left\{ H_3(A_1, A_2, A_3 \cup \ldots \cup A_{n+1}), H_3(A_1 \cup A_2 \cup (\bigcup_3^i A_k), A_{i+1}, \bigcup_{i+2}^{n+1} A_h) \right\}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Confrontando le (2.7) e (2.8) si deduce che $H_{n+1} \geqslant H_n$ per ogni partizione di A in $n+1$ ed n eventi disgiunti. Siano, ora, $\pi_A \equiv \{A_1, \ldots, A_n\}$ e $\pi_B \equiv \{B_1, \ldots, B_n\}$ due partizioni appartenenti alla classe K^*, limitatamente al caso di partizioni complete [4]. La condizione, sotto la quale la soluzione (1.3) verifica l'assioma di additività:

$$H_{mn}(A_1 B_1, \ldots, A_1 B_n, A_2 B_1, \ldots, A_2 B_n, \ldots, A_m B_1, \ldots, A_m B_n) =$$

$$= H_m(A_1, \ldots, A_m) + H_n(B_1, \ldots, B_n),$$

è

$$\begin{cases} \sup\limits_{\substack{1 \leq t \leq n \\ 1 \leq i \leq m \\ [(t \neq i = 1) \wedge (t \neq n \wedge i \neq m)]}} H_3(\bigcup_0^{i-1} A_J \cup A_i(\bigcup_0^{t-1} B_s), A_i B_t, A_i(\bigcup_{t+1}^n B_s) \cup (\bigcup_{i+1}^m A_k)) = \\ = \sup\limits_{1 \leq i \leq m-2} H_3(\bigcup_0^i A_k, A_{i+1}, \bigcup_{i+2}^m A_h) + \sup\limits_{1 \leq i \leq n-2} H_3(\bigcup_0^i B_k, B_{i+1}, \bigcup_{i+2}^n B_h). \end{cases} \tag{2.9}$$

Concludendo: *la soluzione* $H_n = \sup(H_{n-1}, H_3)$ *è una misura dell'informazione di esperienza se e solo se* H_3 *soddisfa alle precedenti condizioni* (2.6) *e* (2.9).

§ 3. - Esempi di misure di informazione esprimibili nelle forme (1.2) e (1.3).

I) La misura di informazione

$$H_n(A_1, \ldots, A_n) = \log_e n$$

per ogni $\pi_A \equiv \{A_1, \ldots, A_n\} \in K^*$ è esprimibile con la forma (1.2) per $\alpha = e$.

Infatti:

$$H_n(A_1\,,\,\ldots,\,A_n) = \log_e(e^{\log_e(n-1)-\log_e 2} + e^{\log_e 3-\log_e 2} - 1) + \log_e 2 =$$

$$= \log_e\left(\frac{n-1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right) + \log_e 2 = \log_e n\,.$$

II) La misura di informazione

$$H_n(A_1\,,\,\ldots,\,A_n) = \log_e n + J(A)$$

per ogni $\pi_A \equiv (A_1\,,\,\ldots,\,A_n) \in K^*$ [ove $J(A)$ è una misura di informazione di evento] è esprimibile con la forma (1.2) per $\alpha = e$, come è immediato verificare.

Osserviamo inoltre che il guadagno di informazione, cioè la differenza tra $\varphi_n = e^{H_n}$ e $\varphi_{n-1} = e^{H_{n-1}}$, risulta costante. Infatti:

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = e^{\log_e n + J(A)} - e^{\log_e(n-1)+J(A)} = n\,e^{J(A)} - (n-1)e^{J(A)} = e^{J(A)} = \text{cost.}\,.$$

III) La misura di informazione

$$H_n(A_1\,,\,\ldots,\,A_n) = \sup_{1\leq i\leq n} J(A_i)$$

per ogni $\pi_A \equiv \{A_1\,,\,\ldots,\,A_n\} \in K^*$ [ove $J(A_i)$ è una misura di informazione dell'evento A_i] è esprimibile con la forma (1.3). Infatti:

$$H_n(A_1\,,\,\ldots,\,A_n) =$$

$$= \sup\{H_{n-1}(A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}\cup A_n), H_3(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-2}, A_{n-1}, A_n)\} =$$

$$= \sup\{\sup\,[J(A_1)\,,\,J(A_2)\,,\,\ldots,\,J(A_{n-2})\,,\,J(A_{n-1}\cup A_n)]\,,$$

$$\sup\,[J(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-2})\,,\,J(A_{n-1})\,,\,J(A_n)]\} =$$

$$= \sup\{J(A_1)\,,\,J(A_2)\,,\,\ldots,\,J(A_n)\} = \sup_{1\leq i\leq n} J(A_i)\,.$$

Questi esempi di misure di informazione hanno un carattere universale in quanto sono compatibili con una scelta arbitraria del supporto $(\Omega,\,\mathscr{F},\,K^*)$ e dei valori dell'informazione sugli eventi indipendenti.

Ringraziamo i professori B. L. Forte e P. Benvenuti per averci indirizzato e seguito.

Bibliografia.

[1] M. DIVARI e M. PANDOLFI, *Su una legge compositiva dell'informazione*, Rend. Mat. Roma (6) **3** (1970), 805-817.

[2] B. L. FORTE, *Measures of information: the general axiomatic theory*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationelle, 3^e année R-2 (1969), 63-89.

[3] B. L. FORTE e P. BENVENUTI, *Sur un classe d'entropies universelles*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A-B, **268** (1969), 1628-1631.

[4] B. L. FORTE e N. PINTACUDA, *Sull'informazione associata alle esperienze incomplete*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **80** (1968), 215-234.

Riassunto.

Vengono date le condizioni necessarie e sufficienti perchè le soluzioni di un sistema di equazioni funzionali relative ad una legge compositiva della informazione, soddisfino agli assiomi che definiscono una misura di informazione senza probabilità.

Summary.

Necessary and sufficient conditions are given in order the solutions of a system of functional equations concerning an information compositive law, to satisfy the axioms defining an information measure without probability.

* * *