Riv. Mat. Univ. Parma (2) 12 (1971), 21-28

DELFINA ROUX e PAOLO SOARDI (*)

Sui punti uniti di mappe continue di uno spazio topologico in sè. (**)

Introduzione.

Si consideri una mappa continua T di uno spazio metrico X in sè. La convergenza delle iterate di un punto x_0 di X implica evidentemente che il punto limite di tale successione sia un punto unito di T. La relativa compattezza dell'orbita di x_0 non è invece di per sè sufficiente a garantire che almeno uno dei punti limite della successione delle iterate di x_0 sia unito: è stato però dimostrato che essa è sufficiente per le mappe continue a diametri orbitali decrescenti, oppure f-contrattive.

In questa Nota si dimostra, tra l'altro (n. 3, Teor. II), che un analogo fatto si verifica per un'ampia classe di trasformazioni continue di uno spazio topologico in sè: tale classe contiene, in particolare, le mappe sopra ricordate.

Vengono inoltre assegnate altre condizioni sufficienti affinchè tutti i punti limite di $\{T^n(x_0)\}$ siano uniti.

1. - Considerazioni preliminari.

Siano (qui e nel seguito): X uno spazio topologico; T un'applicazione di X in sè; $O(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T^n(x)\}$ (1); $\overline{O(x)}$ la chiusura di $O(x)$; $L(x)$ l'insieme dei punti limite della successione $\{T^n(x)\}$ (2).

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico, Università (via C. Saldini 50), 20133 Milano, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Programmi di Ricerca Matematica del C.N.R. . Ricevuto: 26-III-1971.

(1) $T^0(x) = x, \quad T^n(x) = T(T^{n-1}(x)) \quad \forall n > 0$.

(2) Cioè: $z \in L(x) \iff \exists \{n_h\}: T^{n_h}(x) \to z$ per $h \to \infty$.

Ovviamente:

$$\overline{O(x)} \supseteq O(x) \cup L(x)\,. \tag{1.1}$$

L'insieme $L(x)$ può non essere chiuso e la relazione di inclusione (1.1) può valere in senso forte, anche se T è continua e se X e $L(x)$ sono quasi compatti, come mostra il seguente esempio.

Siano: N l'insieme degli interi positivi; R l'insieme dei razionali della forma $n+1/(n+m)$ $(n, m \in N)$; α, β arbitrari, non appartenenti a $N \cup R$; $X = N \cup R \cup \{\alpha, \beta\}$. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su N più fine del filtro di FRÉCHET. Diciamo $\mathcal{A}$ l'insieme delle parti di $N \cup R$ che sono unione di insiemi della forma $x_1 \leqslant x < x_2$ $(x_1, x_2 \in N \cup R,\ 1 \leqslant x_1 < x_2)$ e sia $\mathcal{A}'$ l'insieme degli elementi $A' \in \mathcal{A}$ tali che $A' \cap N \in \mathcal{U}$. Consideriamo l'insieme $\mathcal{B}$ costituito da X, dalle parti di X della forma $\{\beta\} \cup A'$ $(A' \in \mathcal{A}')$ e dagli elementi di $\mathcal{A}$; è facile verificare che $\mathcal{B}$ è base di una e una sola topologia su X, nella quale ogni insieme contenente α è quasi compatto.

Definiamo su X un'applicazione T nel modo seguente: sia $T(\alpha) = T(\beta) = \alpha$ e inoltre

$$T(n) = n+1\,, \qquad T\left(n + \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{n+2}\,, \qquad \forall n \in N\,,$$

$$T\left(n + \frac{1}{n+m}\right) = n + 1 + \frac{1}{n+m} \qquad \forall\, m \in N - \{1\} \wedge \forall n \in N\,.$$

T è continua su X e, se $x \neq \beta$, nessuna sottosuccessione di $\{T^n(x)\}$ può convergere a β (non esistendo in X alcuna successione di interi positivi convergente a β) (3). Ne segue, se $x \in R$, che $L(x) = N \cup \{\alpha\}$, mentre $\overline{L(x)} = N \cup \{\alpha, \beta\}$ (4).

Osserviamo inoltre che anche la relazione di inclusione:

$$\overline{O(x)} \supseteq O(x) \cup \overline{L(x)}$$

vale, in generale, in senso forte.

Consideriamo infatti l'esempio precedente e sia X' il sottoinsieme di X: $X' = N \cup \{\alpha, \beta\}$ con la topologia indotta dalla topologia definita su X. Sia T' la restrizione di T a X'. X' è quasi compatto, T' è continua su X' e, per ogni x appartenente a N, $\beta \in \overline{O(x)}$, mentre risulta: $L(x) = \overline{L(x)} = \{\alpha\}$.

---

(3) Vedasi per esempio [1] (n. 2, p. 148).

(4) Denotiamo con $\overline{L(x)}$ la chiusura di $L(x)$.

Supponiamo ora che X soddisfi il seguente assioma di numerabilità:

(A) Per ogni punto di X esiste una base numerabile di intorni.

Allora $L(x)$ è chiuso, ma la relazione (1.1) può valere in senso forte.

Si consideri infatti il seguente esempio. Sia: $\boldsymbol{R}^+$ l'insieme dei numeri reali non negativi; α un elemento qualsiasi non appartenente a $\boldsymbol{R}^+$; $X = \boldsymbol{R}^+ \cup \{\alpha\}$. Sia $\mathcal{E}$ la famiglia dei sottoinsiemi di X formata da X e dalle parti di X della forma $0 \leqslant x < x_1$ $(x_1 \in X)$; $\mathcal{E}$ è una topologia su X nella quale X e $\{\alpha\}$ sono quasi compatti e l'assioma (A) risulta soddisfatto.

Sia T l'applicazione continua così definita: $T(x) = x + 1$ $\forall x \in \boldsymbol{R}^+$; $T(\alpha) = \alpha$. Risulta $L(0) = \overline{L(0)} = \{\alpha\}$ mentre $\overline{O(0)} = X \neq O(0) \cup L(0)$.

Se X soddisfa l'assioma (A) ed è inoltre uno spazio $\boldsymbol{T}_1$ (cioè ogni insieme costituito da un solo punto è chiuso), allora $L(x)$ è chiuso e vale in (1.1) il segno $=$.

Se T è continua su X, ovviamente:

$$z \in \overline{O(x)} \quad \Rightarrow \quad \overline{O(z)} \subseteq \overline{O(x)} \tag{1.2}$$

e inoltre è anche:

$$T(\overline{L(x)}) \subseteq \overline{L(x)} \ (^5)\,. \tag{1.3}$$

2. - Lemmi preliminari.

Siano (qui e nel seguito): $M \subseteq X$ un insieme tale che $T(M) \subseteq M$; $(Y, \leqslant)$ un insieme parzialmente ordinato; F: $M \to Y$ un'applicazione soddisfacente le condizioni seguenti:

$$\forall\, x \in M \wedge \forall\, n \geqslant 0 \qquad \text{risulti:} \qquad F(T^n(x)) \geqslant F(T^{n+1}(x))\,; \tag{2.1}$$

$$\forall\, x \in M: \quad F(T^n(x)) = F(x) \quad \forall\, n \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x = T(x)\,. \tag{2.2}$$

---

(5) Infatti, se $z = \lim_{h \to \infty} T^{n_h}(x)$, è $T(z) = \lim_{h \to \infty} T^{n_h+1}(x)$, cioè $T(L(z)) \subseteq L(z)$. Quindi vale anche (1.3).

Lemma I. *Esista* $z \in M$ *tale che*:

$$\forall x \in M: \quad F(x) \leq F(z) \ \Rightarrow F(x) = F(z) . \tag{2.3}$$

Allora $z = T(z)$.

Infatti $T^n(z)$ appartiene a M per ogni n e da (2.1) e (2.3) si ricava $F(T^n(z)) = F(z)$ per ogni n. Da (2.2) segue quindi l'asserto.

Se Y si riduce a un punto, dal Lemma I segue che T è l'identità su M. Si ottiene così il

Corollario. *Se F è costante in M, ogni punto di M è un punto unito di T.*

Lemma II. *Sia $M = X$, $Y = \overline{\mathbf{R}}$ e la restrizione di F a $O(x) \cup \overline{L(x)}$ sia semicontinua inferiormente. Allora*:

$$x \in \overline{L(x)} \quad \Rightarrow \quad x = T(x) .$$

Infatti, per la (2.1) e per la semicontinuità di F, abbiamo:

$$F(x) \geq \lim_{n \to \infty} F(T^n(x)) \geq F(z) \qquad \forall z \in L(x) . \tag{2.4}$$

D'altra parte, se $x \in \overline{L(x)}$, per ogni ε positivo esiste y appartenente a $\overline{L(x)}$ tale che $F(y) > F(x) + \varepsilon$. Da (2.4) si ricava allora $F(x) = F(T^n(x))$ per ogni $n \geq 0$ e da (2.2) segue la tesi.

Supponiamo ora che le restrizioni di T e F a $O(x) \cup \overline{L(x)}$ siano continue. Allora vale (1.3) e, per ogni z appartenente a $\overline{L(x)}$, risulta $F(z) = \lim_{n \to \infty} F(T^n(x)) =$ costante. Applicando a $\overline{L(x)}$ il Corollario del Lemma I, si ottiene il seguente

Lemma III. *Sia $M = X$, $Y = \overline{\mathbf{R}}$ e le restrizioni di T e di F a $O(x) \cup \cup \overline{L(x)}$ siano continue. Allora*:

$$z \in \overline{L(x)} \quad \Rightarrow \quad z = T(z) \quad (^6) .$$

---

(6) In modo del tutto analogo si ottiene anche il più generale Lemma seguente, che contiene le proposizioni di A. Zitarosa ([6], p. 408) e M. Furi - A. Vignoli ([4], Teor. I, p. 197): « Sia φ un'applicazione di X in uno spazio separato Y soddisfacente la (2.2). Se $\varphi(T^n(x))$ converge e le restrizioni di φ e T a $O(x) \cup \overline{L(x)}$ sono continue, ogni punto di $\overline{L(x)}$ è un punto unito di T. »

3. - I risultati.

Teorema I. *X sia quasi compatto; T sia continua su X e soddisfi la condizione seguente*:

$$(3.1) \qquad \forall\, x \in X\colon\ \overline{O(x)} = \overline{O(T^n(x))} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \Rightarrow \quad x = T(x)\,.$$

Allora, per ogni x appartenente a X, $\overline{O(x)}$ contiene almeno un punto unito di T.

Dimostrazione. Sia x un punto qualsiasi di X e poniamo $M = \overline{O(x)}$, $Y = \{\overline{O(y)}\}_{y \in M}$. M è quasi compatto e Y è parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione. L'applicazione $F\colon M \to Y$ definita da $y \to \overline{O(y)}$, per ogni y di M, soddisfa (2.1) e (2.2) in forza di (1.2) e (3.1).

Sia $\{F(y_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una catena di Y. La quasi compattezza di M implica che $\bigcap_{\alpha \in A} F(y_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} \overline{O(y_\alpha)} \neq \emptyset$. Esiste quindi almeno un punto z di M appartenente a $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{O(y_\alpha)}$, e quindi, per la (1.2), $F(z) \subseteq F(y_\alpha)$ per ogni α appartenente a A. Il lemma di ZORN assicura allora che esiste in Y un elemento minimale; sia esso $F(u)$. Per il Lemma I, u è unito e, poichè u appartiene a $M = \overline{O(x)}$, segue l'asserto.

Osservazioni. 1) Il Teorema I vale anche nella più generale forma seguente:

Sia X topologico; $K_1 \subseteq X$ quasi compatto; $K \subseteq X$ chiuso; $T\colon K \to K$ continua e tale che, per ogni x appartenente a K, valga (3.1) *e inoltre sia $\overline{O(x)} \cap K_1 \neq \emptyset$. Allora, per ogni x di K, $\overline{O(x)} \cap K_1$ contiene almeno un punto unito di T.*

Basta infatti ripetere la dimostrazione del Teorema I assumendo x appartenente a K e tenendo presente che (in luogo di $\overline{O(x)}$) l'insieme $\overline{O(x)} \cap K_1$ è quasi compatto.

2) Se X non è quasi compatto, la (3.1) non è sufficiente a garantire l'esistenza di un punto unito di T, anche se esistono punti di accumulazione per $O(x)$ (7).

3) È evidente che:

$$(3.2) \qquad \overline{O(x)} = \overline{O(T^n(x))} \quad \forall\, n \in N \quad \Leftrightarrow \quad O(x) \subseteq \overline{O(T^n(x))} \quad \forall\, n \in N\,.$$

(7) Si possono costruire facilmente esempi in proposito.

Quindi, affinchè $\overline{O(x)} = \overline{O(T^n(x))}$ per ogni n intero positivo, occorre e basta che si verifichi uno dei casi seguenti:

a) $x = T(x)$;

b) x genera una successione periodica (cioè esiste un $m > 1$ tale che $x = T^m(x)$);

c) per ogni intero n non negativo, $T^n(x)$ è punto di accumulazione di punti di $O(x)$.

La condizione (3.1) esclude quindi la possibilità che si verifichino b) o c).

Se X è uno spazio $\boldsymbol{T}_1$ soddisfacente l'assioma (A), allora, per ogni x appartenente a X, è $L(x) = \overline{L(x)}$ e $\overline{O(x)} = O(x) \cup L(x)$. Da (3.2) e (1.3) si deduce allora che:

$$\overline{O(x)} = \overline{O(T^n(x))} \ \forall n \in N \quad \Leftrightarrow \quad x \in L(x) \,,$$

e dal Teorema I si ricava il

Teorema II. *Sia X uno spazio $\boldsymbol{T}_1$ quasi compatto soddisfacente l'assioma* (A); *T sia continua su X e verifichi la condizione seguente:*

(3.3) $$\forall x \in X: \quad x \in L(x) \Rightarrow x = T(x) \,.$$

Allora, qualunque sia x appartenente a X, la successione $\{T^n(x)\}$ contiene una sottosuccessione convergente a un punto unito di T.

4. - Alcuni casi particolari.

T soddisfi la condizione seguente: esista f: $X^2 \to \overline{\boldsymbol{R}}$ tale che, per ogni x di X, la restrizione di $f(y, T(y))$ a $O(x) \cup \overline{L(x)}$ sia semicontinua inferiormente e inoltre la successione $\{f(T^n(y), T^{n+1}(y))\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sia monotona non crescente e non costante (8). In tal caso diremo che T è *sequenzialmente f-contrattiva*. In particolare, se X è metrico e $f(x, y) = d(x, y)$ $\forall (x, y) \in X^2$, diremo che T è *sequenzialmente contrattiva*.

Poniamo $F(x) = f(x, T(x))$; le condizioni del Lemma II sono evidentemente soddisfatte e quindi dal Teorema II si ricava il

Teorema III. *Siano: X uno spazio $\boldsymbol{T}_1$ quasi compatto soddisfacente l'assioma* (A); *T: $X \to X$ continua e sequenzialmente f-contrattiva. Allora, per ogni x di X, la successione $\{T^n(x)\}$ contiene una sottosuccessione convergente ad un punto unito di T* (9).

---

(8) Cioè: $\lim\limits_{n \to \infty} f(T^n(y), T^{n+1}(y)) < f(y, T(y))$.

(9) Questo Teorema generalizza un risultato di M. Furi e A. Vignoli ([3], p. 506) valido per spazi metrici completi.

Inoltre dal Lemma III si ottiene il

Teorema IV. *Sia X topologico; T: $X \to X$ continua e sequenzialmente f-contrattiva; la restrizione di $f(y, T(y))$ a $O(x) \cup \overline{L(x)}$ sia continua. Allora:*

$$z \in \overline{L(x)} \quad \Rightarrow \quad z = T(z)\ (^{10})\,.$$

Corollario. *Sia T un'applicazione continua sequenzialmente contrattiva di uno spazio metrico X in sè. Allora ogni punto limite della successione $\{T^n(x)\}$ è un punto unito di T* (11).

Sia X uno spazio metrico e sia $\delta(x)$ il diametro di $O(x)$. Se, per ogni x appartenente a X, $x \neq T(x)$, risulta definitivamente $\delta(x) > \delta(T^n(x))$, T viene detta *a diametri orbitali decrescenti*. Per una tale applicazione, $x \in L(x)$ implica evidentemente $x = T(x)$. Dal Teorema II si ottiene così il teorema di W. A. Kirk (12), affermante che, se T è un'applicazione continua a diametri orbitali decrescenti di uno spazio metrico compatto in sè, ogni successione $\{T^n(x)\}$ contiene una sottosuccessione convergente a un punto unito di T.

Supponiamo ora che la restrizione di δ a $\overline{O(x)}$ sia continua e che $L(x) \neq \emptyset$. Per il Lemma III ogni punto z appartenente a $L(x)$ è unito e quindi $\delta(z) = 0$ su $L(x)$. Ma allora $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(T^n(x)) = 0$ e quindi $T^n(x) \to z$. Vale pertanto il

Teorema V. *T sia un'applicazione continua a diametri orbitali decrescenti di uno spazio metrico X in sè e la restrizione di δ a $\overline{O(x)}$ sia continua. Allora, se $L(x)$ non è vuoto, la successione $\{T^n(x)\}$ converge a un punto unito di T* (13).

Bibliografia.

[1] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, Part. I: *Les structures fondamentales de l'Analyse*; Livre III: *Topologie générale*, Chap. I et Chap. II. Actualités Scientifiques et Industrielles **1142**, Hermann, Paris 1965.

[2] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc. 37 (1962), 74-79.

(10) Questo Teorema contiene risultati noti; vedasi ad esempio: [4], teor. 3.

(11) Viene così esteso alle applicazioni sequenzialmente contrattive l'ormai classico teorema di Edelstein ([2], Teor. 2) sulle applicazioni contrattive di uno spazio metrico in sè. Si noti che, nel caso più generale di applicazioni sequenzialmente contrattive, $\{T^n(x)\}$ può avere più di un punto limite; è facile costruire esempi in proposito.

(12) Vedasi: [5], teor. II.

(13) Vedasi ad esempio: [4], p. 199.

[3] M. Furi and A. Vignoli, *A fixed point theorem in complete metric spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **2** (1969), 505-509.

[4] M. Furi and A. Vignoli, *A remark about some fixed point theorems*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **3** (1970), 197-200.

[5] W. A. Kirk, *On mappings with diminishing orbital diameters*, J. London Math. Soc. **44** (1969), 107-111.

[6] A. Zitarosa, *Sul metodo delle iterate per la ricerca dei punti uniti di una trasformazione continua di uno spazio di Hausdorff in sè*, Le Matematiche (Catania) **23** (1968), 408-416.

Summary.

Let T be a mapping of a topological space X into itself. Let $O(x)=\{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$, and denote by $\mathcal{C}$ the class of the mappings satisfying the condition:

$$O(x)\subseteq \overline{O(T^n(x))}\ \forall n \quad \Rightarrow \quad x=T(x)\,.$$

The main result of this paper is as follows. «Let $T\in\mathcal{C}$; if $\overline{O(x)}$ is a quasi-compact set and $T/\overline{O(x)}$ is a continuous mapping, then in $\overline{O(x)}$ there exists a fixed point of T.» This theorem generalizes to topological spaces some results of the same sort, so far known only for metric spaces.

The paper contains also some other conditions in order that a limit point (or every limit point) of $\{T^n(x)\}$ be a fixed point of T.

* * *