Riv. Mat. Univ. Parma (2) **10** (1969), 185-211

ANTONIO MAMBRIANI (*)

L'operazione inversa fondamentale del «Calcolo alle differenze finite» è un'operazione elementare.

Nota I: Caso della variabile indipendente, reale. (**)

§ 1. - Introduzione.

1.1. - Preambolo.

L'operazione inversa fondamentale del «Calcolo alle differenze finite» è l'operazione di risoluzione dell'equazione

$$\frac{u(z+h)-u(z)}{h}=f(z)\,, \tag{1.1.1}$$

dove: z è la variabile indipendente (reale o complessa);
h è un «passo» assegnato (reale o complesso), *non nullo*;
$f(z)$ è una funzione data (reale o complessa), *univoca* in un certo campo (limitato o illimitato);
$u(z)$ è una funzione incognita.

La risoluzione dell'equazione (1.1.1) ha fatto oggetto di studio da parte di molti Autori, in particolare da parte di N.-E. NÖRLUND ([**1**], [**2**]) (1) che è pervenuto a notevolissimi risultati. In questa Nota e in altra successiva mi propongo di ottenere il seguente risultato (che credo nuovo):

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) In questo lavoro faccio uso frequente di tre semplici abbreviazioni: n. = numero, v. = vedere, cfr. = confrontare. — Ricevuto: 10-XI-1969.

(1) I numeri in **neretto** e fra parentesi quadre richiamano i «Riferimenti» alla fine della Nota.

L'operazione inversa fondamentale del « Calcolo alle differenze finite » è sempre un'operazione elementare; precisamente:

La soluzione generale dell'equazione (1.1.1) *si può esprimere con una somma di un numero finito di termini, qualunque sia la data funzione univoca $f(z)$, definita soltanto su un segmento o su una semiretta del piano complesso* (2) (e, necessariamente: il segmento o la semiretta, deve essere parallelo al passo-vettore h; inoltre, il segmento deve avere lunghezza maggiore di $|h|$).

Penso che questo risultato (tenendo presente la Proprietà 4 alla fine di questa Introduzione) porterà luce alla risoluzione dei due problemi seguenti: 1°) Rendere completamente indipendente, dal procedimento di sommazione di serie divergenti, il fondamentale concetto del NÖRLUND di « soluzione principale dell'equazione (1.1.1) » ossia di « somma principale della funzione $f(z)$ ». 2°) Ampliare nel modo più vasto la classe delle funzioni $f(z)$ che hanno una somma principale.

Desidero, poi, notificare che il mio allievo dott. C. SCARAVELLI, dopo avere esteso il procedimento deduttivo della conclusione precedente, sta già ricavando importanti conseguenze in campo « alle differenze finite » e in campo differenziale.

In questa Nota I mi limito al caso in cui nella equazione (1.1.1) la variabile indipendente z è una x reale e il passo prefissato h è pure reale; in una Nota II completerò la trattazione considerando il caso in cui z e h sono in generale complessi.

1.2. - Una premessa su nomi e simboli utili (3).

Per la precedente equazione (1.1.1) in luogo dei vocaboli generali « risoluzione » e « soluzione » si usano spesso, com'è noto, rispettivamente i nomi « sommazione » e « somma ». Poichè questi nomi specifici (ormai antiquati) dànno luogo manifestamente ad equivoci, mi permetto qui di proporre altri nomi specifici più espressivi (che poi si possono trasportare anche a tutte le equazioni alle differenze finite).

A) Anzitutto, per stabilire successivamente degli utili parallelismi, richiamo che nell'Analisi infinitesimale la scrittura

$$D_z\, u(z)$$

(2) Il nominato « numero finito di termini » dipende univocamente dalla variabile indipendente z che si considera (come sarà precisato).

(3) Tali nomi e simboli (salvo lievi modifiche) sono quelli introdotti nelle mie lezioni di « Analisi superiore » presso l'Università di Parma, nell'anno accademico 1960-61.

si legge «la derivata (rispetto a z) di $u(z)$»; l'operatore D_z (di ARBOGAST e CAYCHY) si dice «il derivatore rispetto a z»; infine, l'operazione di esecuzione di D_z si chiama «la derivazione rispetto a z». Inoltre, dalla equazione

$$D_z\, u(z) = f(z)$$

[$u(z)$ funzione incognita, $f(z)$ funzione data] segue formalmente

$$u(z) = D_z^{-1} f(z)\,.$$

In questa eguaglianza, il secondo membro (supposto che abbia senso) si dirà «*l'antiderivata generale* (rispetto a z) di $f(z)$»; l'operatore D_z^{-1} si dirà «*l'antiderivatore generale* rispetto a z»; infine, l'operazione di esecuzione di D_z^{-1} si chiamerà «*l'antiderivazione generale* rispetto a z» (4).

B) Parallelamente, per il «Calcolo alle differenze finite» propongo quanto segue. Posto

$$D_{z;h}\, u(z) \equiv \frac{u(z+h) - u(z)}{h}\,,$$

il rapporto incrementale a secondo membro si dirà anche «*la prederivata* (rispetto a z e col passo h) di $u(z)$» [e ciò, anche se $u(z)$ non ha derivata]; l'operatore $D_{z;h}$ si dirà «*il prederivatore* rispetto a z e col passo h»; infine, l'operazione di esecuzione di $D_{z;h}$ si chiamerà «*la prederivazione* rispetto a z e col passo h». Inoltre, dalla precedente equazione (1.1.1), che ora si può scrivere brevemente

$$D_{z;h}\, u(z) = f(z)\,,$$

segue formalmente

$$u(z) = D_{z;h}^{-1} f(z)\,.$$

In questa eguaglianza, il secondo membro (supposto che abbia senso) si dirà «*l'antiprederivata generale* (rispetto a z e col passo h) di $f(z)$»; l'operatore $D_{z;h}^{-1}$ si dirà «*l'antiprederivatore generale* rispetto a z e col passo h»; infine, l'operazione di esecuzione di $D_{z;h}^{-1}$ si chiamerà «*l'antiprederivazione generale* rispetto a z e col passo h».

---

(4) Come si sa, «l'operazione inversa della derivazione rispetto a z» (cioè, l'antiderivazione generale rispetto a z) e «l'integrazione indefinita rispetto a z» non sono operazioni coincidenti.

1.3. - L'antiprederivata elementare, in campo reale.

In questa Nota I parto, dunque, dall'equazione

$$\mathrm{D}_{x;h}\, u(x) \equiv \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = f(x)\,, \tag{1.3.1}$$

dove: la variabile indipendente x è reale, il passo prefissato h è reale e non nullo, e la data funzione univoca $f(x)$ (reale o complessa) è *definita in modo qualsiasi* su un intervallo

$$I \equiv \{x:\quad x_0 \leqslant x < x_1\} \equiv (x_0 \ldots x_1 -)\,, \qquad x_1 \text{ finito, oppure } x_1 = +\infty\,.$$

Nel caso x_1 finito è necessario (come si capirà più avanti) che l'intervallo I contenga, quale parte propria, l'intervallo

$$J_0 \equiv \big(x_0 \ldots (x_0 + |\,h\,|) -\big)\,, \qquad \text{che dirò } \textit{intervallo iniziale};$$

sarà quindi

$$I \equiv J_0 + (x_0 + |\,h\,| \ldots x_1 -)\,, \qquad \text{con } x_0 + |\,h\,| < x_1 \text{ (}^5\text{)}\,.$$

Per risolvere l'equazione (1.3.1) ho applicato l'artificio di spezzare la variabile indipendente x [o più in generale l'espressione $(x - x_0)/|\,h\,|$] nella somma della sua «parte intera» e della sua «mantissa» (v. § 2): tale spezzamento trasforma l'equazione (1.3.1) in altra interpretabile come equazione ricorrente (del primo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea). Dalla risoluzione di questa semplice equazione ricorrente, discende agevolmente (v. § 3) il seguente

Teorema. *La soluzione generale dell'equazione* (1.3.1) *ha la forma*

$$u(x) = \mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x) + \tilde{c}(x;\,h)\,,$$

dove:

$\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x)$, $x \in I \equiv (x_0 \ldots x_1 -)$, *indica una determinata soluzione particolare, sempre nulla nell'intervallo iniziale* $J_0 \equiv \big(x_0 \ldots (x_0 + |\,h\,|) -\big)$, *sempre uguale*

---

[5] In modo completamente analogo si tratta poi il caso in cui, essendo invece $x_1 < x_0$, l'intervallo di definizione di $f(x)$ è $x_1 < x \leqslant x_0$, con x_1 finito oppure $x_1 = -\infty$.

alla somma di un numero f i n i t o *di termini nell'intervallo* $I - J_0 = I' \equiv$ $\equiv (x_0 + |h| \dots x_1 -)$ [*numero finito, di termini, dipendente univocamente da* x (v. n. **3.3**)];

$\tilde{c}(x;\, h)$ *indica un'arbitraria funzione (della* x*) periodica di periodo* h (6).

Dirò che la soluzione particolare $D_{x;\,h}^{-1_0} f(x)$ è

la soluzione elementare dell'equazione (1.3.1)

od anche [v. n. **1.2**, B)]

l'antiprederivata elementare (rispetto a x e col passo h) di $f(x)$,

e dirò che l'operatore $D_{x;\,h}^{-1_0}$ è

l'antiprederivatore elementare rispetto a x e col passo h.

1.4. - Cenno su l'antiprederivata principale (in campo reale), del Nörlund.

Ecco, in breve, come il NÖRLUND ([1], [2]), partendo da una equazione (1.3.1) con una funzione $f(x)$ conveniente, giunge al suo notevole concetto di « somma principale di $f(x)$ » che qui mi permetto di chiamare [in base al n. **1.2**, B)] «*l'antiprederivata principale* (rispetto a x e col passo h) di $f(x)$ ». Il NÖRLUND, anzitutto, considera una $f(x)$ definita in un intervallo illimitato $(x_0 \dots +\infty)$, per potere formare poi l'espressione

$$-h \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_n\, f(x + nh) \qquad (h > 0)\,, \tag{1.4.1}$$

che è una soluzione formale di (1.3.1). Nei pochi casi in cui nella (1.4.1) la serie è convergente, il prodotto di $-h$ per la somma di tale serie è l'antiprederivata principale di $f(x)$. Negli altri numerosissimi casi in cui nella (1.4.1) la serie non converge, il prodotto di $-h$ per la *somma generalizzata* di questa serie (secondo un conveniente metodo di sommazione, escogitato dallo stesso NÖRLUND) è l'antiprederivata principale di $f(x)$. Affinchè questa somma generalizzata esista, il NÖRLUND è costretto a fare su $f(x)$ diverse ipotesi ([2], p. 17, n. 12): esistenza, per $x \geqslant x_0$, di una derivata $f^{(m)}(x)$ (di un certo ordine m), continua, e infinitesima per $x \to +\infty$; inoltre, convergenza per $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ di un certo integrale generalizzato contenente $f^{(m)}$ nella funzione integranda.

---

(6) Sul simbolo $\tilde{c}(x;\, h)$, per indicare una funzione (della x) periodica di periodo h, cfr. C. SCARAVELLI [5].

Questa antiprederivata principale (rispetto a x e col passo h) di $f(x)$, quando esiste, si indicherà nel seguito con il simbolo

$$\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1*} f(x)\,, \tag{1.4.2}$$

mentre l'operatore $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1*}$ si dirà «*l'antiprederivatore principale* rispetto a x e col passo h».

1.5. - Alcune proprietà dell'antiprederivata elementare.

Per l'antiprederivata elementare $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1\circ} f(x)$ valgono svariate proprietà: mi limito ad enunciarne quattro.

Proprietà 1. *Detta $f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$, una qualsiasi funzione univoca, l'antiprederivata elementare (sempre esistente) $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1\circ} f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$, è l'unica antiprederivata particolare [di $f(x)$] che sia nulla in tutto l'intervallo iniziale $J_0 \equiv (x_0 \ldots (x_0 + |h|) -)$.*

Per la dimostrazione v. n. **4.1**.

Proprietà 2. *Detta $f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$, una qualsiasi funzione univoca, l'antiprederivata elementare (sempre esistente) $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1\circ} f(x)$, $x \in (x_0 + |h| \ldots x_1 -)$, è una delle possibili somme di Mengoli e Cauchy relative alla funzione $f(x)$ e all'intervallo $(x_0 \ldots x)$.*

Ne segue, se $f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$, è integrabile secondo Mengoli e Cauchy, che si ha:

$$\lim_{h \to \pm 0} \mathrm{D}_{x;\,h}^{-1\circ} f(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t \quad (7)\,. \tag{1.5.1}$$

Per la dimostrazione v. n. **4.2**.

Proprietà 3. *Detta $f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$, una qualsiasi funzione univoca, l'antiprederivata elementare (sempre esistente) $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1\circ} f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$, soddisfa l'identità*

$$\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1\circ} f(x) = \Phi(x;\, h) - \widetilde{\Phi}(x;\, h)\,, \qquad x \in (x_0 \ldots x_1 -)\,, \tag{1.5.2}$$

---

(7) Evidentemente, si suppone qui, pure, che $f(x)$ non dipenda da h. In generale, però, la data funzione f potrà anche dipendere da h, cioè aversi $f = f(x;\, h)$ (v., ad esempio, il n. **5.4**).

dove: $\Phi(x;\, h)$ *è una qualunque antiprederivata particolare di* $f(x)$, $\widetilde{\Phi}(x;\, h)$ *è la funzione (della* x*), periodica di periodo* h*, coincidente con* $\Phi(x;\, h)$ *nell'intervallo iniziale* $J_0 \equiv (x_0 \ldots (x_0 + |\, h \,|) -)$.

Per la dimostrazione v. n. **4.3**.

Proprietà 4. *Se, per una conveniente funzione univoca* $f(x)$, $x \in (x_0 \ldots + \infty)$, *esiste l'antiprederivata principale (del Nörlund)*

$$\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_*} f(x)\,, \qquad x \in (x_0 \ldots + \infty)\,,$$

tale antiprederivata principale si può fare discendere dalla antiprederivata elementare

$$\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x)\,, \qquad x \in (x_0 \ldots + \infty)\,.$$

Per chiarimenti v. n. **4.4**; per esempi effettivi di simile deduzione v. nn. **5.2**, **5.3**, **5.4**, **5.5**, **5.6**.

§ 2. – Sui noti concetti di «parte intera» e di «mantissa», e una loro generalizzazione.

2.1. - Sui noti concetti di «parte intera» e di «mantissa» di un numero reale.

La considerazione della successione di tutti i numeri interi (nel loro ordine crescente) $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ fa sentire chiaramente che ad ogni numero reale x corrispondono simultaneamente due numeri:

uno e un solo numero intero $\nu = \nu_x$ definito da

$$\nu \leqslant x < \nu + 1 \tag{2.1.1}$$

(ed è $\nu < 0$ se $x < 0$, $\nu = 0$ se $0 \leqslant x < 1$, $\nu > 0$ se $x \geqslant 1$);

uno e un solo numero reale $\theta = \theta_x$ definito da

$$\theta = x - \nu \tag{2.1.2}$$

(ed è $0 \leqslant \theta < 1$).

La (2.1.2) afferma che i tre numeri x, ν, θ sono così legati:

$$x = \nu + \theta = \nu_x + \theta_x\,. \tag{2.1.3}$$

Il numero intero $\nu = \nu_x$ si chiama «*la parte intera* di x» (8), il numero reale $\theta = \theta_x$ si chiama «*la mantissa* di x», e la (2.1.3) ci dice che un numero reale è sempre la somma della sua parte intera e della sua mantissa. Pertanto: *alla variabilità di x si possono sostituire le due variabilità di ν e θ, e per queste due variabilità avviene che, essendo n un intero qualsiasi e $x \in (n \dots (n+1)$ —), la ν è costante e uguale a n, e la θ varia con continuità da zero a 1 —.*

Valgono le proprietà:

$$\nu_{x+1} = \nu_x + 1\,, \qquad \nu_{x-1} = \nu_x - 1\,, \tag{2.1.4}$$

$$\theta_{x+1} = \theta_x\,, \qquad \theta_{x-1} = \theta_x\,. \tag{2.1.5}$$

Le (2.1.5), che discendono dalle (2.1.4) tenendo presente la definizione (2.1.2) di $\theta = \theta_x$, esprimono che *la mantissa θ_x è una funzione (della x) periodica di periodo* 1.

2.2. - Una generalizzazione dei comuni concetti di «parte intera» e di «mantissa».

Fissati due numeri reali x_0, h (con $h \neq 0$), considero la successione (crescente)

$$\dots,\ x_0 - 2\,|\,h\,|,\ x_0 - |\,h\,|,\ x_0\,,\ x_0 + |\,h\,|,\ x_0 + 2\,|\,h\,|,\ \dots \tag{2.2.0}$$

(ossia: se è $h > 0$, la successione

$$\dots,\ x_0 - 2h,\ x_0 - h,\ x_0\,,\ x_0 + h,\ x_0 + 2h,\ \dots;$$

se è invece $h < 0$, onde $-h = |\,h\,|$, la successione

$$\dots,\ x_0 + 2h,\ x_0 + h,\ x_0\,,\ x_0 - h,\ x_0 - 2h,\ \dots)\,.$$

Dalla (2.2.0) si sente chiaramente che ad ogni numero reale x corrispondono simultaneamente due numeri:

uno e un solo numero intero $\nu = \nu_{x;\,x_0,\,|h|}$ definito da

$$x_0 + \nu \cdot |\,h\,| \leqslant x < x_0 + (\nu + 1)\,|\,h\,| \tag{2.2.1}$$

---

(8) L'intero ν_x si indica solitamente con uno dei simboli $[x]$, $E(x)$: non uso il primo simbolo perchè si sovrappone ad altri simboli utili, non uso il secondo simbolo perchè un poco ingombrante.

(ed è $\nu < 0$ se $x < x_0$, $\nu = 0$ se $x_0 \leqslant x < x_0 + |h|$, $\nu > 0$ se $x \geqslant x_0 + |h|$); uno e un solo numero reale $\theta = \theta_{x;\,x_0,\,|h|}$ definito da

$$\theta \cdot |h| = x - (x_0 + \nu \cdot |h|) \tag{2.2.2}$$

(ed è $0 \leqslant \theta < 1$).

La (2.2.2) afferma che i tre numeri x, $\nu \cdot |h|$, $\theta \cdot |h|$ sono così legati:

$$x = x_0 + \nu \cdot |h| + \theta \cdot |h|\,, \tag{2.2.3}$$

da cui

$$x - x_0 = \nu \cdot |h| + \theta \cdot |h| \tag{2.2.3$'$}$$

od anche

$$(x - x_0)/|h| = \nu + \theta\,. \tag{2.2.3$''$}$$

La (2.2.3)$''$, confrontata con (2.1.3), ci dice che risulta

$$\nu = \nu_{(x-x_0)/|h|}\,, \tag{2.2.4}$$

ossia *questo nuovo numero intero* ν *non è altro che la parte intera di* $(x - x_0)/|h|$ (nel senso del n. **2.1**), e ci dice ancora che si ha

$$\theta = \theta_{(x-x_0)/|h|}\,, \tag{2.2.5}$$

cioè *questo nuovo numero reale* θ *non è altro che la mantissa di* $(x - x_0)/|h|$ (nel senso del n. **2.1**).

Valgono le seguenti proprietà:

$$\nu_{(x+h-x_0)/|h|} = \nu_{(x-x_0)/|h|} + 1 \qquad \text{se è } h > 0\,, \tag{2.2.6}$$

$$\nu_{(x+h-x_0)/|h|} = \nu_{(x-x_0)/|h|} - 1 \qquad \text{se è } h < 0\,, \tag{2.2.6$'$}$$

$$\theta_{(x+h-x_0)/|h|} = \theta_{(x-x_0)/|h|} \qquad \text{per } h > 0 \text{ e } h < 0\,. \tag{2.2.7}$$

Per provare la (2.2.6), ove è $h > 0$, basta osservare che

$$(x + h - x_0)/|h| = \{(x - x_0)/|h|\} + h/|h| = \{(x - x_0)/|h|\} + 1\,,$$

indi si applica la prima delle (2.1.4). Per provare la (2.2.6)', ove è $h < 0$, basta osservare che

$$(x + h - x_0)/|h| = \{(x - x_0)/|h|\} + h/|h| = \{(x - x_0)/|h|\} - 1 ,$$

indi si applica la seconda delle (2.1.4). Infine, per provare la (2.2.7), basta partire dalla definizione (2.2.2) di $\theta = \theta_{(x-x_0)/|h|}$ e applicare la (2.2.6) oppure la (2.2.6)'. Questa (2.2.7) esprime che *la mantissa* $\theta = \theta_{(x-x_0)/|h|}$ *è una funzione (della* x*) periodica di periodo* h.

Interessano ancora, per il seguito, le seguenti relazioni limiti:

$$(2.2.8) \qquad \lim_{x \to \pm\infty} |\nu_{(x-x_0)/|h|}| = +\infty, \qquad \lim_{h \to \pm 0} |\nu_{(x-x_0)/|h|}| = +\infty \quad (x \neq x_0) ,$$

$$(2.2.9) \qquad \lim_{h \to \pm 0} (\nu_{(x-x_0)/|h|} \cdot |h|) = \lim_{h \to \pm 0} (\nu \cdot |h|) = x - x_0 ,$$

dove la (2.2.9) segue subito da (2.2.3)' ricordando che è $0 \leqslant \theta < 1$.

§ 3. - Antiprederivata generale e antiprederivata elementare, di una data funzione.

3.1. - Caso del passo $h > 0$.

A) Risolvo dapprima l'equazione (1.3.1), dell'Introduzione, nel caso del passo $h > 0$, cioè l'equazione

$$(3.1.1) \qquad \mathrm{D}_{x;h}\, u(x) \equiv \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = f(x) \qquad (h > 0) ,$$

dove la data funzione univoca $f(x)$ (reale o complessa) è *definita in modo qualsiasi* su un intervallo

$$I \equiv \{x: \ x_0 \leqslant x < x_1\} \equiv (x_0 \ldots x_1 -) ,$$

con x_1 finito oppure $x_1 = +\infty$, e nel caso x_1 finito è necessario (come si vedrà) che sia $x_1 - x_0 > h$ (ossia, è necessario che $x_0 + h$ sia interno ad I).

La (3.1.1) risolta rispetto a $u(x + h)$ si scrive

$$(3.1.1)' \qquad u(x+h) = h\, f(x) + u(x)$$

od anche, cambiando x in $x-h$,

$$u(x)=h\,f(x-h)+u(x-h)\,. \tag{3.1.1$''$}$$

B) Trasformo ora (3.1.1)$''$ in equazione ricorrente, e poi risolvo tale equazione ricorrente. In (3.1.1)$''$ il primo termine del secondo membro ha senso se e solo se è

$$x_0 \leqslant x-h < x_1\,, \qquad \text{ossia} \qquad x \in (x_0+h \ldots (x_1+h)-)\,.$$

Pongo questi x sotto la forma [v. (2.2.3)]

$$x = x_0+\nu\, h+\theta\, h \tag{3.1.2}$$

[dove $\nu=\nu_{(x-x_0)/h}$, $\theta=\theta_{(x-x_0)/h}=\{(x-x_0)/h\}-\nu_{(x-x_0)/x}$ sono, rispettivamente, la parte intera e la mantissa di $(x-x_0)/h$], e constato subito che in (3.1.2) è necessariamente $\nu \geqslant 1$. Fissato allora un qualsiasi $x=x_0+\nu\, h+\theta\, h \in \in (x_0+h \ldots (x_1+h)-)$, cioè fissati i corrispondenti ν e θ (con $\nu\geqslant 1$, $0\leqslant\theta<1$), pongo per brevità:

$$\left\{\begin{array}{rcll}
x &=& x_0+\nu\, h+\theta\, h & =\xi_\nu \\
 & & \text{da cui} & \\
x-h &=& x_0+(\nu-1)\, h+\theta\, h & =\xi_{\nu-1} \\
x-2\,h &=& x_0+(\nu-2)\, h+\theta\, h & =\xi_{\nu-2} \\
\cdots & & \cdots & \\
x-(\nu-1)\, h &=& x_0+h+\theta\, h & =\xi_1 \\
x-\nu\, h &=& x_0+\theta\, h & =\xi_0\,.
\end{array}\right. \tag{3.1.3}$$

A mezzo di queste (3.1.3) l'equazione (3.1.1)$''$ si scrive:

$$u(\xi_\nu)=h\,f(\xi_{\nu-1})+u(\xi_{\nu-1})\,, \tag{3.1.4}$$

la quale è manifestamente interpretabile come equazione ricorrente [ν variabile indipendente, $u(\xi_\nu)$ funzione incognita di ν], e tale equazione è del primo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea.

Passando ora alla risoluzione della (3.1.4), sostituisco nella (3.1.4) alla ν successivamente i valori 1, 2, 3, ..., ν ed ottengo ordinatamente (in modo concatenato):

$$
(3.1.5)\quad \begin{cases} u(\xi_1) = h\,f(\xi_0) + u(\xi_0) \\ u(\xi_2) = h\,f(\xi_1) + u(\xi_1) = h\,f(\xi_1) + h\,f(\xi_0) + u(\xi_0) \\ u(\xi_3) = h\,f(\xi_2) + u(\xi_2) = h\,f(\xi_2) + h\,f(\xi_1) + h\,f(\xi_0) + u(\xi_0) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u(\xi_\nu) = h\,f(\xi_{\nu-1}) + u(\xi_{\nu-1}) \\ \qquad = h\,f(\xi_{\nu-1}) + h\,f(\xi_{\nu-2}) + \ldots + h\,f(\xi_1) + h\,f(\xi_0) + u(\xi_0). \end{cases}
$$

Si ha dunque:

La soluzione generale dell'equazione ricorrente (3.1.4) *è*

$$
(3.1.5)'\qquad u(\xi_\nu) = h\left\{f(\xi_{\nu-1}) + f(\xi_{\nu-2}) + \ldots + f(\xi_1) + f(\xi_0)\right\} + u(\xi_0)\,,
$$

dove $u(\xi_0)$ *va preso ad arbitrio. Ad ogni scelta di* $u(\xi_0)$, *la* (3.1.5)' *dà in corrispondenza, sostituendo* ν *via via con* 1, 2, 3, ..., ν [*ciò che riconduce a considerare le* (3.1.5)], *uno e un solo sistema di valori per* $u(\xi_1)$, $u(\xi_2)$, $u(\xi_3)$, ..., $u(\xi_\nu)$ (*comunque grande possa essere* ν).

C) Deduco ora da (3.1.5)' la soluzione generale dell'equazione alle differenze (3.1.1). In virtù delle (3.1.3), la (3.1.5)' si può scrivere:

$$
(3.1.6)\quad \begin{cases} u(x_0 + \nu h + \theta h) = h\left\{f(x_0 + (\nu-1)h + \theta h) + f(x_0 + (\nu-2)h + \theta h) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \ldots + f(x_0 + h + \theta h) + f(x_0 + \theta h)\right\} + u(x_0 + \theta h)\,. \end{cases}
$$

Più estesamente, per fissare le idee, se l'intervallo $I \equiv (x_0 \ldots x_1 -)$ si considera suddiviso nei successivi intervalli

$$
J_0 \equiv \left(x_0 \ldots (x_0 + h) -\right) \qquad \text{(intervallo iniziale)}\,,
$$
$$
J_1 \equiv \left(x_0 + h \ldots (x_0 + 2h) -\right), \qquad J_2 \equiv \left(x_0 + 2h \ldots (x_0 + 3h) -\right),
$$
$$
J_3 \equiv \left(x_0 + 3h \ldots (x_0 + 4h) -\right), \ \ldots,
$$

nei quali le variabili sono rispettivamente (essendo $0 \leqslant \theta < 1$):

$$
x_0 + \theta h\,,
$$
$$
x_0 + h + \theta h\,, \qquad x_0 + 2h + \theta h\,, \qquad x_0 + 3h + \theta h\,, \qquad \ldots,
$$

si constata facilmente che la (3.1.6) equivale alle successive uguaglianze seguenti:

$$
(3.1.6)' \quad \begin{cases} u(x_0 + h \quad + \theta h) = h\, f(x_0 + \theta h) + u(x_0 + \theta h) \\ u(x_0 + 2h + \theta h) = h\, \{f(x_0 + h + \theta h) + f(x_0 + \theta h)\} + u(x_0 + \theta h) \\ u(x_0 + 3h + \theta h) = h\, \{f(x_0 + 2h + \theta h) + f(x_0 + h + \theta h) + \\ \qquad\qquad + f(x_0 + \theta h)\} + u(x_0 + \theta h) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}
$$

Da queste (3.1.6)' risulta chiaramente che, *presi ad arbitrio* i valori

$$
(3.1.7) \qquad u(x_0 + \theta h)\,, \qquad 0 \leqslant \theta < 1\,,
$$

cioè *i valori di* $u(x)$ *nell'intervallo iniziale* J_0, risultano determinati univocamente i valori di $u(x)$ in tutti gli altri intervalli J_1, J_2, J_3, ... *appartenenti* a I. In particolare, posso fare la semplice scelta seguente:

$$
u(x) = 0\,, \qquad x \in J_0\,,
$$

ed allora ottengo la soluzione $u(x)$ così definita:

$$
\begin{cases} u(x) = 0\,, \quad x \in J_0 \\ u(x) = h\, f(x - h)\,, \quad x \in J_1 \\ u(x) = h\, \{f(x - h) + f(x - 2h)\}, \quad x \in J_2 \\ u(x) = h\, \{f(x - h) + f(x - 2h) + f(x - 3h\}, \quad x \in J_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(x) = h\, \{f(x - h) + f(x - 2h) + \dots + f(x - \nu h)\}, \quad x \in J_\nu\,. \end{cases}
$$

Indicherò con $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x)$ simile soluzione particolare.

Infine, osservo che in (3.1.7) compare $\theta = \theta_{(x-x_0)/h}$ che è una funzione (della x) periodica di periodo h [v. (2.2.7)], perciò la (3.1.7) va, precisamente, ritenuta arbitraria nell'insieme delle funzioni (di x) periodiche di periodo h: ossia *la* (3.1.7) *è un'arbitraria funzione* (*della* x) *periodica di periodo* h; nel seguito la indicherò con $\tilde{c}(x;\, h)$ (9).

(9) Cfr. l'annotazione (6).

Concludo quindi:

L'equazione alle differenze

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=f(x) \qquad (h>0), \tag{3.1.1}$$

nella quale il secondo membro è una qualsiasi funzione univoca

$f(x)$, $x \in (x_0 \dots x_1 -)$ (x_1 *finito, con* $x_1 - x_0 > h$; *oppure* $x_1 = +\infty$),

ha la soluzione generale della forma

$$u(x) = \mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x) + \tilde{c}(x;\,h), \qquad x \in (x_0 \dots x_1 -), \tag{3.1.8}$$

dove:

$\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x)$ *è la soluzione particolare definita da*

$$\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \big(x_0 \dots (x_0+h) -\big) \\ h \cdot \big\{f(x-h) + f(x-2h) + \dots + f(x-\nu h)\big\}, & \nu = \nu_{(x-x_0)/h}, \\ & x \in (x_0 + h \dots x_1 -); \end{cases} \tag{3.1.9}$$

$\tilde{c}(x;\,h)$ *è un'arbitraria funzione (della* x*) periodica di periodo* h.

La soluzione generale (3.1.8) è dunque [cfr. n. **1.2**, B)] «*l'antiprederivata generale* della $f(x)$» nel caso $h>0$, da indicarsi con il simbolo $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1} f(x)$. La soluzione particolare $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x)$, data da (3.1.9), si dirà «*la soluzione elementare* della equazione (3.1.1)» od anche «*l'antiprederivata elementare della* $f(x)$» nel caso $h>0$ (10).

---

(10) Volendo verificare che per la funzione $\mathrm{D}_{x;\,h}^{-1_0} f(x) \equiv \mathscr{F}(x;\,h)$ risulta effettivamente

$$\mathscr{F}(x+h;\,h) - \mathscr{F}(x;\,h) = h\,f(x), \qquad x \in (x_0 \dots x_1 -), \tag{a}$$

conviene distinguere due casi.

1°) Caso in cui $x \in (x_0 \dots (x_0+h) -)$. Allora da (3.1.9) si ha:

$$\mathscr{F}(x;\,h) = 0, \tag{b}$$

$$\mathscr{F}(x+h;\,h) = h\,f(x+h-h) = h\,f(x), \tag{c}$$

e sottraendo (membro a membro) da (c) la (b) si trova che una parte di (a) è verificata.

2°) Caso in cui $x \in (x_0 + h \dots x_1 -)$. Allora da (3.1.9) si ha:

$$\mathscr{F}(x;\,h) = h \cdot \big\{f(x-h) + f(x-2h) + \dots + f(x-\nu h)\big\}, \quad \nu = \nu_{(x-x_0)/h}. \tag{b)'}$$

Ne segue

$$\mathscr{F}(x+h;\,h) = h\big\{f(x+h-h) + f(x+h-2h) + \dots + f(x+h-\nu' h)\big\}, \quad \nu' = \nu_{(x+h-x_0)/h},$$

onde s'ottiene, per essere $\nu' = \nu + 1$ in virtù di (2.2.6),

$$\mathscr{F}(x+h;\,h) = h\big\{f(x) + f(x-h) + \dots + f(x-\nu h)\big\}, \quad \nu = \nu_{(x-x_0)/h}. \tag{c)'}$$

Sottraendo poi (membro a membro) da (c)' la (b)', si vede subito che è verificata anche l'altra parte di (a).

3.2. - Caso del passo $h < 0$.

Risolvo ora l'equazione (1.3.1), dell'Introduzione, nel caso del passo $h < 0$, cioè l'equazione

$$(3.2.1) \qquad \mathrm{D}_{x;h}\, u(x) \equiv \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = f(x) \qquad (h<0)\,,$$

dove la data funzione univoca $f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$, è qualsiasi, ed x_1 è finito oppure $+\infty$, e se x_1 è finito è necessario che sia $x_1 - x_0 > |\,h\,|$.

Avendosi al presente $h = -|\,h\,|$, la (3.2.1) si scrive anche

$$u(x - |\,h\,|) - u(x) = -|\,h\,|\, f(x)\,,$$

oppure, risolvendo rispetto a $u(x)$,

$$(3.2.1)' \qquad u(x) = |\,h\,|\, f(x) + u(x - |\,h\,|)\,.$$

Questa equazione è proprio *dello stesso tipo* della (3.1.1)'': va osservato, però, che nella (3.1.1)'' il termine noto è $h\, f(x-h)$ che (essendo qui $h>0$) si può anche scrivere $|\,h\,|\, f(x - |\,h\,|)$, mentre nella (3.2.1)' il termine noto è $|\,h\,|\, f(x)$. Quindi, in analogia con la (3.1.9), si ottiene che l'equazione (3.2.1)', e anche la (3.2.1), ha la soluzione particolare:

$$(3.2.2) \quad \mathrm{D}^{-1_0}_{x;h} f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \big(x_0 \ldots (x_0 + |\,h\,|) -\big) \\ |h\,|\big\{f(x) + f(x - |\,h\,|) + \ldots + f(x - (\nu - 1)\,|\,h\,|)\big\}, & \\ \qquad \nu = \nu_{(x-x_0)/|h|}\,, & x \in (x_0 + |\,h\,| \ldots x_1 -)\,. \end{cases}$$

Pertanto, tenendo presente che è $-|\,h\,| = h$, la (3.2.2) porta a concludere:

$$(3.2.2)' \quad \mathrm{D}^{-1_0}_{x;h} f(x) = \begin{cases} 0\,, & x = \big(x_0 \ldots (x_0 + |\,h\,|) -\big) \\ -h\big\{f(x) + f(x+h) + \ldots + f\big(x + (\nu-1)h\big)\big\}, & \\ \qquad \nu = \nu_{(x-x_0)/|h|}\,, & x = (x_0 + |\,h\,| \ldots x_1 -) \end{cases}$$

[dove entro le piccole parentisi graffe figura lo stesso numero ν di termini che si ha nella (3.1.9) pure entro le piccole parentisi graffe].

3.3. - Riassunto delle conclusioni dei nn. 3.1, 3.2.

Riassumendo le conclusioni ottenute per l'equazione alle differenze (1.3.1), dell'Introduzione, possiamo dire:

L'antiprederivata generale di una qualsiasi funzione univoca $f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$ $(x_1$ *finito, con* $x_1 - x_0 > |h|$; *oppure* $x_1 = +\infty)$, *esiste sempre ed è data da*

$$\mathrm{D}_{x;h}^{-1} f(x) = \mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x) + \tilde{c}(x;\, h)\,, \qquad x \in (x_0 \ldots x_1 -)\,, \tag{3.3.1}$$

dove: $\mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x)$, $x \in (x_0 \ldots x_1 -)$, *è l'antiprederivata elementare della* $f(x)$, *ed è così definita*:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x) = 0\,, & x \in \big(x_0 \ldots (x_0 + |h|) -\big) \\ \mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x) = \left\{\begin{array}{ll} h \cdot \sum_{1}^{\nu}{}_s\, f(x - sh)\,, & h > 0\,, \\ & \nu = \nu_{(x-x_0)/|h|}\,, \\ -h \cdot \sum_{0}^{\nu-1}{}_s\, f(x + sh)\,, & h < 0\,, \end{array}\right. & x \in (x_0 + |h| \ldots x_1 -); \end{array}\right. \tag{3.3.2}$$

$\tilde{c}(x;\, h)$ *è un'arbitraria funzione (della* x*) periodica di periodo* h.

È così provato, e completamente precisato, il Teorema enunciato succintamente al n. **1.3** dell'Introduzione.

Osservazione. È bene notare che nelle due sommatorie figuranti in (3.3.2) risulta $\nu = 1$ quando, e sol quando, è

$$x_0 + |h| \leqslant x < x_0 + 2\,|h|.$$

Allora, tali sommatorie si riducono ad un solo termine e, in realtà, non sono più delle somme: però, anche in tale caso, è bene continuare a sentire delle somme (ridotte a un solo termine).

§ 4. - Dimostrazioni delle proprietà (enunciate al n. 1.5) dell'antiprederivata elementare.

4.1. - Dimostrazione della Proprietà 1 (v. n. 1.5).

Abbiamo visto [v. (3.3.2)] che l'antiprederivata elementare

$$D_{x;h}^{-1_0} f(x) , \qquad x \in (x_0 \dots x_1 -) \equiv (x_0 \dots (x_0 + |h|) -) + (x_0 + |h| \dots x_1 -),$$

è nulla in tutto l'intervallo iniziale $(x_0 \dots (x_0 + |h|) -)$. Non vi sono altre antiprederivate particolari che godono di tale proprietà, semplicemente per il fatto che la conoscenza di un'antiprederivata nell'intervallo iniziale determina *univocamente* l'antiprederivata stessa: questa determinazione viene data dall'equazione alle differenze (1.3.1) alla quale l'antiprederivata soddisfa [ciò, sia nel caso $h > 0$ (come si è visto al n. 3.1, C)) che nel caso $h < 0$ (v. n. 3.2)].

4.2. - Dimostrazione della Proprietà 2 (v. n. 1.5).

Mi limito a supporre $h > 0$ (un analogo ragionamento vale per $h < 0$). Allora è [v. (3.1.9)]

$$(4.2.1) \begin{cases} D_{x;h}^{-1_0} f(x) = h \cdot \{f(x-h) + f(x-2h) + \dots + f(x-\nu h)\} = h \cdot \sum_{s=1}^{\nu} f(x-sh) \\ \qquad h > 0 , \qquad \nu = \nu_{(x-x_0)/h} , \qquad x \in (x_0 + h \dots x_1 -) . \end{cases}$$

Nell'intervallo $(x_0 \dots x_1 -)$ considero gli intervalli consecutivi

$$(x_0 \dots x_0 + h), \quad (x_0 + h \dots x_0 + 2h), \quad \dots,$$
$$(x_0 + (\nu - 2)h \dots x_0 + (\nu - 1)h), \quad (x_0 + (\nu - 1)h \dots x_0 + \nu h)$$

in numero di ν e tutti della stessa lunghezza h. Noto poi che si ha [v. (2.2.9)]:

$$\lim_{h \to +0} (x_0 + \nu h) = x_0 + \lim_{h \to +0} (\nu h) = x_0 + (x - x_0) = x .$$

Perciò, volendo scrivere una delle possibili somme di MENGOLI e CAUCHY relative alla funzione $f(x)$ e all'intervallo $(x_0 \dots x)$, può bastare la considerazione dei ν intervallini precedenti. In ciascuno di questi intervallini scelgo poi, ordinatamente, i valori $x - \nu h$, $x - (\nu - 1)h$, ..., $x - 2h$, $x - h$, e formo la somma di MENGOLI e CAUCHY

$$S_h = f(x - \nu h)\cdot h + f\big(x - (\nu - 1)h\big)\cdot h + \dots + f(x - 2h)\cdot h + f(x - h)\cdot h .$$

Si vede che S_h è proprio la somma figurante in (4.2.1). D'altra parte, essendo ora, per ipotesi, $f(x)$ integrabile secondo MENGOLI e CAUCHY nell'intervallo $(x_0 \dots x_1 -)$, si conclude che la precedente somma S_h, cioè $\mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x)$, quando $h \to 0$ tende al secondo membro della eguaglianza (1.5.1) dell'Introduzione.

La Proprietà 2 è così provata.

4.3. - Dimostrazione della Proprietà 3 (v. n. 1.5).

Provo, dunque, l'identità (1.5.2) dell'Introduzione. Tale identità è manifestamente vera nell'intervallo iniziale $J_0 \equiv \big(x_0 \dots (x_0 + |h|) -\big)$, poichè in J_0 il primo membro di (1.5.2) è nullo, come afferma la prima delle (3.3.2), e il secondo membro è pure nullo per la definizione stessa di $\tilde{\Phi}(x;\, h)$.

Resta dunque da provare la (1.5.2) per $x \in (x_0 + |h| \dots x_1 -)$. A tale scopo tengo presente che è

$$\Phi(x + h;\; h) - \Phi(x;\; h) = h\, f(x)\,, \qquad x \in (x_0 \dots x_1 -)\,. \tag{4.3.1}$$

A) Suppongo dapprima $h > 0$. Essendo ora $x \in (x_0 + h \dots x_1 -)$, risulta $\nu = \nu_{(x-x_0)/h} \geqslant 1$, onde nella (4.3.1) posso mutare x via via in $x - h$, $x - 2h$, ..., $x - \nu h$, ed ottengo successivamente:

$$\begin{aligned}
\Phi(x;\; h) - \Phi(x - h;\; h) &= h\, f(x - h)\,,\\
\Phi(x - h;\; h) - \Phi(x - 2h;\; h) &= h\, f(x - 2h)\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\Phi\big(x - (\nu - 1)h;\; h\big) - \Phi(x - \nu h;\; h) &= h\, f(x - \nu h)\,.
\end{aligned}$$

In queste uguaglianze la somma dei secondi membri dà esattamente [v. (3.1.9)] $\mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x)$ per $h > 0$ e $x \in (x_0 + h \dots x_1 -)$; invece la somma dei primi membri, dopo le semplici riduzioni, dà la differenza $\Phi(x;\, h) - \Phi(x - \nu h;\, h)$. Si ha dunque:

$$\mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x) = \Phi(x;\; h) - \Phi(x - \nu h;\; h)\,, \qquad x \in (x_0 + h \dots x_1 -), \tag{4.3.2}$$

dove $\Phi(x - \nu h;\ h)$ è una funzione (della x) periodica di periodo h, in quanto è tale $x - \nu h = x_0 + \theta h$ [cfr. (2.2.7)]: precisamente è $\Phi(x - \nu h;\ h) \equiv \widetilde{\Phi}(x;\ h)$. La (1.5.2) è dunque provata per $h > 0$.

B) Suppongo invece $h < 0$. Essendo $x \in (x_0 + |h| \ldots x_1 -)$, risulta $\nu = \nu_{(x-x_0)/|h|} \geqslant 1$, e dalla (4.3.1) segue successivamente:

$$\Phi(x;\ h) - \Phi(x + h;\ h) = -h\, f(x)\,,$$

$$\Phi(x + h;\ h) - \Phi(x + 2h;\ h) = -h\, f(x + h)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi(x + (\nu - 1)h;\ h) - \Phi(x + \nu h;\ h) = -h\, f(x + (\nu - 1)h)\,.$$

Sommando (membro a membro) queste uguaglianze (e scambiando i due membri nel risultato ottenuto), s'ottiene [v. (3.2.2)']:

$$\mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x) = \Phi(x;\ h) - \Phi(x + \nu h;\ h), \qquad x \in (x_0 + |h| \ldots x_1 -), \tag{4.3.3}$$

dove $\Phi(x + \nu h;\ h)$ è una funzione (della x) periodica di periodo h, in quanto è tale $x + \nu h = x_0 - \theta h = x_0 + \theta\, |h|$ [cfr. (2.2.7)]: precisamente è $\Phi(x + \nu h;\ h) \equiv \widetilde{\Phi}(x;\ h)$. La (1.5.2) è dunque provata anche per $h < 0$.

C) Desidero ora indicare che la (1.5.2) si può anche provare rapidamente come segue. La (1.5.2) afferma che la differenza

$$\Phi(x; h) - \mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x) \tag{4.3.4}$$

è esattamente $\widetilde{\Phi}(x; h)$. Ciò è vero, perchè: 1°) la (4.3.4), come differenza di due soluzioni particolari di (1.3.1), è una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente a (1.3.1), ossia è una particolare funzione periodica di periodo h; 2°) la (4.3.4) nell'intervallo iniziale $J_0 \equiv (x_0 \ldots (x_0 + |h|) -)$ (di lunghezza h) coincide con $\Phi(x; h)$ in quanto è $\mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x) = 0$ per $x \in J_0$. Dunque, la (4.3.4) è esattamente $\widetilde{\Phi}(x; h)$.

4.4. - Chiarimenti su la Proprietà 4 (v. n. 1.5).

Mi limito al caso del passo $h > 0$ (analogamente per $h < 0$). Osservo dapprima che l'eguaglianza (4.3.2) vale anche per $x \in (x_0 \ldots (x_0 + h) -)$, poichè allora, essendo $\nu = 0$, il secondo membro è nullo ed è pure nullo il primo membro; onde si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{D}_{x;h}^{-1_0} f(x) = \Phi(x;\ h) - \Phi(x - \nu h;\ h) \quad [= \Phi(x;\ h) - \widetilde{\Phi}(x;\ h)] \\ & \qquad h > 0, \qquad \nu = \nu_{(x-x_0),h}\,, \qquad x \in (x_0 \ldots x_1 -)\,. \end{aligned} \right. \tag{4.4.1}$$

In particolare, supposto che per la funzione $f(x)$, $x \in (x_0 \dots +\infty)$, esista l'antiprederivata principale (del NÖRLUND), che ora indicherò con $F(x;\, h)$, si ha:

$$\text{(4.4.2)} \quad \begin{cases} D_{x;\,h}^{-1_0} f(x) = F(x;\, h) - F(x - \nu h;\, h) \quad [= F(x;\, h) - \tilde{F}(x;\, h)] \\ h > 0\,, \qquad \nu = \nu_{(x-x_0).h}\,, \qquad x \in (x_0 \dots +\infty)\,. \end{cases}$$

Resta ora da stabilire quando uno spezzamento di $D_{x;\,h}^{-1_0} f(x)$ nella forma (4.4.1) coincide con il caso particolare (4.4.2). Non sono riuscito a puntualizzare ciò, ma spero che altri potranno contribuire. Su ciò possono giovare le due osservazioni seguenti:

1°) Nel caso particolare in cui l'espressione (1.4.1), dell'Introduzione, dà proprio la soluzione principale perchè la serie figurante in (1.4.1) è convergente [11], ossia quando è

$$F(x;\, h) = -h \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_n f(x + nh) \qquad (h > 0)\,,$$

segue (essendo $\nu = \nu_{(x-x_0)/h}$):

$$F(x - \nu h;\, h) = -h \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_n f(x + (n - \nu)h) =$$

$$= -h \cdot \{f(x - \nu h) + f(x - (\nu - 1)h) + \dots + f(x - 2h) + f(x - h\} - h \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_n f(x + nh),$$

onde:

$$F(x;\, h) - F(x - \nu h;\, h) =$$
$$= h\{f(x - \nu h) + f(x - (\nu - 1)h + \dots + f(x - 2h) + f(x - h)\},$$

dove il secondo membro è esattamente $D_{x;\,h}^{-1_0} f(x)$. Cioè, la prederivata elementare si spezza proprio come indica la (4.4.2).

2°) Nelle esemplificazioni del seguente § **5** (nn. **5.2**, **5.3**, **5.4**, **5.5**, **5.6**) si riesce sempre ad ottenere per l'antiprederivata elementare lo spezzamento (4.4.2).

---

(11) Nel caso generale, basterà, seguendo la maniera del NÖRLUND, sostituire $f(x)$ con $f(x)\, e^{-\eta x}$ $(\eta > 0)$ e l'equazione (1.3.1) con la seguente

$$u(x + h) - u(x) = h\, f(x)\, e^{-\eta x}\,,$$

ecc. ecc. ecc..

§ 5. - Esempi di antiprederivate elementari, e varie deduzioni di antiprederivate principali.

5.1. - I simboli di antiprederivazione.

In precedenza ho introdotto [v. n. **1.2**, B)] ed usato il simbolo $D^{-1}_{x;h} f(x)$ per indicare «l'antiprederivata *generale* (rispetto a x e col passo h) di $f(x)$». Nelle esemplificazioni di questo § **5** faccio uso sistematico dei due simboli, già precedentemente introdotti [v. n. **1.3** e (1.4.2)] ed usati,

$$D^{-1_0}_{x;h} f(x) , \qquad D^{-1_*}_{x;h} f(x)$$

per indicare rispettivamente:

l'antiprederivata *elementare* (rispetto a x e col passo h) di $f(x)$,

l'antiprederivata *principale* (rispetto a x e col passo h) di $f(x)$.

5.2. - Antiprederivazione (rispetto a x e col passo h) di e^{ax}.

Essendo a una costante non nulla, dalla (3.3.2) si ha subito:

$$(5.2.1) \quad \begin{cases} D^{-1_0}_{x;h} e^{ax} = h \cdot \left\{ e^{a\cdot(x-h)} + e^{a\cdot(x-2h)} + \ldots + e^{a\cdot(x-\nu h)} \right\} \\ h > 0 , \qquad \nu = \nu_{x/h} , \qquad x \in (h \ldots + \infty) . \end{cases}$$

Applicando la formula per la somma di termini in progressione geometrica, abbiamo:

$$e^{a\cdot(x-h)} + e^{a\cdot(x-2h)} + \ldots + e^{a\cdot(x-\nu h)} = \frac{e^{a\cdot(x-h)} - e^{a\cdot(x-\nu h)}\, e^{-ah}}{1 - e^{-ah}} = \frac{e^{ax} - e^{a\cdot(x-\nu h)}}{e^{ah} - 1} .$$

La (5.2.1) si può quindi scrivere:

$$(5.2.1)' \qquad D^{-1_0}_{x;h} e^{ax} = \frac{h\, e^{ax}}{e^{ah} - 1} - \frac{h\, e^{a\cdot(x-\nu h)}}{e^{ah} - 1} ,$$

dove il secondo membro ha proprio la forma (4.4.2) ([12]). Infatti è

$$(5.2.2) \qquad D^{-1_*}_{x;h} e^{ax} = \frac{h\, e^{ax}}{e^{ah} - 1}$$

(cfr. [1], p. 73).

([12]) Passiamo al limite, per $h \to 0+$, nella (5.2.1)': il primo membro, in virtù della (1.5.1) ed essendo $x_0 = 0$, dà $\int_0^x e^{at}\, dt = (e^{ax}/a) - (1/a)$; il secondo membro dà lo stesso risultato, in quanto è $\lim_{h\to 0+} \{h/(e^{ah} - 1)\} = 1/a$, e inoltre [v. (2.2.9)] è $\lim_{h\to 0+} (\nu h) = x - x_0 = x - 0 = x$.

5.3. - Antiprederivazione (rispetto a x e col passo h) di cos x, sin x.

A) Dalla (3.3.2) si ha subito:

$$(5.3.1)\quad \begin{cases} D_{x;h}^{-1_0} \cos x = h\cdot\{\cos(x-h)+\cos(x-2h)+\ldots+\cos(x-\nu h)\} \\ h>0\,, \quad \nu=\nu_{x/h}\,, \quad x\in(h\ldots+\infty)\,. \end{cases}$$

D'altra parte, applicando una nota somma trigonometrica (cfr. [4], p. 36, (5)), abbiamo:

$$\cos(x-h)+\cos(x-2h)+\ldots+\cos(x-\nu h) =$$

$$= \frac{1}{2\sin(h/2)}\left\{\sin\left(x-\frac{h}{2}\right)-\sin\left(x-\nu h-\frac{h}{2}\right)\right\}.$$

La (5.3.1) si può quindi scrivere:

$$(5.3.1)'\quad D_{x;h}^{-1_0}\cos x = \frac{h/2}{\sin(h/2)}\sin\left(x-\frac{h}{2}\right)-\frac{h/2}{\sin(h/2)}\sin\left(x-\nu h-\frac{h}{2}\right),$$

dove il secondo membro è della forma (4.4.2) ([13]). Infatti è:

$$(5.3.2)\quad D_{x;h}^{-1*}\cos x = \frac{h/2}{\sin(h/2)}\sin\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

(cfr. [1], p. 73).

B) In modo analogo, da

$$(5.3.3)\quad \begin{cases} D_{x;h}^{-1_0}\sin x = h\cdot\{\sin(x-h)+\sin(x-2h)+\ldots+\sin(x-\nu h)\} \\ h>0\,, \quad \nu=\nu_{x/h}\,, \quad x\in(h\ldots+\infty)\,, \end{cases}$$

([13]) Alla formula (5.3.1)′ si può giungere anche così: in (5.3.1) i coseni si sostituiscono con le loro espressioni mediante l'esponenziale, poi si applica la (5.2.1)′, e infine si ritorna (con alcuni semplici artifici) dagli esponenziali alle funzioni trigonometriche.

si ricava

$$(5.3.3)' \qquad D_{x;h}^{-1_0} \sin x = -\frac{h/2}{\sin(h/2)}\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)+\frac{h/2}{\sin(h/2)}\cos\left(x-\nu h-\frac{h}{2}\right),$$

ed è

$$(5.3.4) \qquad D_{x;h}^{-1_*} \sin x = -\frac{h/2}{\sin(h/2)}\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

(cfr. [1], p. 73).

5.4. - Antiprederivazione (rispetto a x e col passo h) di $x^{n;h}$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Avverto subito che è

$$x^{n;h} = x(x-h)(x-2h)\ldots\big(x-(n-1)h\big),$$

e risulta:

$$(5.4.1) \qquad \lim_{h\to\pm 0} x^{n;h} = [x^{n;h}]_{h=0} = x^n, \qquad D_{x;h}\, x^{n;h} = n\, x^{(n-1);h},$$

come si controlla facilmente.

Dalla (3.3.2) si ha subito:

$$(5.4.2) \quad \begin{cases} D_{x;h}^{-1_0}\, x^{n;h} = h\cdot\{(x-h)^{n;h}+(x-2h)^{n;h}+\ldots+(x-\nu h)^{n;h}\} \\ h>0, \qquad \nu=\nu_{x/h}, \qquad x\in(h\ldots+\infty). \end{cases}$$

D'altra parte si trova (facendo uso, ad esempio, di [5]):

$$(x-h)^{n;h}+(x-2h)^{n;h}+\ldots+(x-\nu h)^{n;h}=\frac{x^{(n+1);h}-(x-\nu h)^{(n+1);h}}{(n+1)h}.$$

La (5.4.2) si può quindi scrivere:

$$(5.4.2)' \qquad D_{x;h}^{-1_0}\, x^{n;h} = \frac{x^{(n+1);h}}{n+1}-\frac{(x-\nu h)^{(n+1);h}}{n+1},$$

dove il secondo membro è della forma (4.4.2). Infatti è:

$$(5.4.3) \qquad D_{x;h}^{-1_*}\, x^{n;h} = \frac{x^{(n+1);h}}{n+1}.$$

5.5. - Antiprederivazione (rispetto a x e col passo $h = 1$) di x^n ($n = 1, 2, \ldots$).

Dalla (3.3.2), per $h = 1$, si ha subito:

$$(5.5.1) \qquad \begin{cases} D_{x;\,1}^{-1_0}\, x^n = (x-1)^n + (x-2)^n + \ldots + (x-\nu)^n \\ \nu = \nu_x\,, \qquad x \in (1 \ldots +\infty)\,. \end{cases}$$

D'altra parte si trova (cfr. [2], p. 4, n. 2; oppure, applicando [5]):

$$(x-1)^n + (x-2)^n + \ldots + (x-\nu)^n = \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(x-\nu)}{n+1}\,,$$

dove $B_n(x)$ è il noto polinomio di BERNOULLI di indice n. La (5.5.1) si può quindi scrivere:

$$(5.5.1)' \qquad D_{x;\,1}^{-1_0}\, x^n = \frac{B_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{B_{n+1}(x-\nu)}{n+1}\,,$$

dove il secondo membro è della forma (4.4.2) (con $h = 1$). Infatti è:

$$(5.5.2) \qquad D_{x;\,1}^{-1_*}\, x^n = \frac{B_{n+1}(x)}{n+1}$$

(cfr. [2], p. 20, fine del n. 12).

5.6. - Antiprederivazione (rispetto a x e col passo $h = 1$) di $1/x$, $\log x$.

A) Dalla (3.3.2), per $h = 1$, si ha subito:

$$(5.6.1) \qquad \begin{cases} D_{x;\,1}^{-1_0}\, \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \ldots + \dfrac{1}{x-\nu} \\ \nu = \nu_x\,, \qquad x \begin{cases} \in (1 \ldots +\infty) \\ \neq 1,\ 2,\ 3, \ldots\,. \end{cases} \end{cases}$$

D'altra parte risulta:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-\nu} = \frac{\{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)\}'}{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)} \ (^{14})\,,$$

(14) Ho posto $' = D_x = d/dx$.

dalla quale, essendo

$$(5.6.2) \qquad (x-1)(x-2)\ldots(x-\nu) = \Gamma(x)/\Gamma(x-\nu)\,,$$

dopo semplici riduzioni,

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\ldots+\frac{1}{x-\nu}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\frac{\Gamma'(x-\nu)}{\Gamma(x-\nu)}\,.$$

La (5.6.1) si può quindi scrivere:

$$(5.6.1)' \qquad \mathrm{D}_{x;1}^{-1_0}\frac{1}{x}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\frac{\Gamma'(x-\nu)}{\Gamma(x-\nu)}\,,$$

dove il secondo membro è della forma (4.4.2) (con $h=1$). Infatti è:

$$(5.6.3) \qquad \mathrm{D}_{x;1}^{-1_*}\frac{1}{x}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\Psi(x)$$

(cfr. [2], p. 24, (22), e la prima eguaglianza di p. 29).

B) Dalla (3.3.2), per $h=1$, si ha subito:

$$(5.6.4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}_{x;1}^{-1_0}\log x = \log(x-1)+\log(x-2)+\ldots+\log(x-\nu) \\ \qquad \nu=\nu_x\,, \qquad x\left\{\begin{array}{l}\in(1\ldots+\infty)\\ \neq 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

D'altra parte risulta:

$$\log(x-1)+\log(x-2)+\ldots+\log(x-\nu)=\log\{(x-1(x-2)\ldots(x-\nu)\}\,,$$

ossia, per la (5.6.2),

$$\log(x-1)+\log(x-2)+\ldots+\log(x-\nu)=\log\Gamma(x)-\log\Gamma(x-\nu)\,.$$

La (5.6.4) si può quindi scrivere:

$$(5.6.4)' \qquad \mathrm{D}_{x;1}^{-1_0}\log x=\log\Gamma(x)-\log\Gamma(x-\nu)\,,$$

dove il secondo membro è della forma (4.4.2) (con $h = 1$). Infatti è:

(5.6.5) $$D_{x;\,1}^{-1_*} \log x = \log \Gamma(x)$$

(cfr. [2], p. 27, n. 18).

5.7. - Antiprederivazione (rispetto a x e col passo $h = 1$) di alcune funzioni discontinue.

A) Considero la funzione discontinua $\nu = \nu_x$, detta « parte intera di x », trattata specificatamente al n. **2.1.** Dalla (3.3.2), per $h = 1$, si ha subito:

(5.7.1) $$D_{x;\,1}^{-1_0} \nu_x = \nu_{x-1} + \nu_{x-2} + \dots + \nu_{x-\nu_x}, \qquad x \in (1 \dots + \infty).$$

D'altra parte risulta [v. (2.1.4)]:

$$\nu_{x-1} + \nu_{x-2} + \dots + \nu_{x-\nu_x} = (\nu_x - 1) + (\nu_x - 2) + \dots + (\nu_x - \nu_x)$$

$$= (\nu_x - 1) + (\nu_x - 2) + \dots + 2 + 1 + 0 = 1 + 2 + \dots + (\nu_x - 2) + (\nu_x - 1),$$

onde

(5.7.1)′ $$D_{x;\,1}^{-1_0} \nu_x = \frac{\nu_x(\nu_x - 1)}{2} = \frac{\nu_x \, \nu_{x-1}}{2}.$$

B) Considero la funzione discontinua $\theta = \theta_x$, detta « mantissa di x », trattata specificatamente al n. **2.1.** Dalla (3.3.2), per $h = 1$, si ha subito:

(5.7.2) $$D_{x;\,1}^{-1_0} \theta_x = \theta_{x-1} + \theta_{x-2} + \dots + \theta_{x-\nu_x}, \qquad x \in (1 \dots + \infty).$$

D'altra parte risulta [v. (2.1.5)]:

$$\theta_x = \theta_{x-1} = \theta_{x-2} = \dots = \theta_{x-\nu_x},$$

onde

(5.7.2)′ $$D_{x;\,1}^{-1_0} \theta_x = \nu_x \, \theta_x.$$

C) Considero, infine, la funzione $\mathscr{D}(x)$ di DIRICHLET così definita:

$$\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ è irrazionale}. \end{cases}$$

Dalla (3.3.2), per $h = 1$, si ha subito:

(5.7.3) $$\mathrm{D}_{x;\,1}^{-1_0}\,\mathscr{D}(x) = \mathscr{D}(x-1) + \mathscr{D}(x-2) + \ldots + \mathscr{D}(x-\nu_x)\,,$$

$$x \in (1 \ldots + \infty)\,.$$

Poichè risulta:

$$\mathscr{D}(x) = \mathscr{D}(x-1) = \mathscr{D}(x-2) = \ldots = \mathscr{D}(x-\nu_x)\,,$$

si conclude:

(5.7.3)' $$\mathrm{D}_{x;\,1}^{-1_0}\,\mathscr{D}(x) = \nu_x\,\mathscr{D}(x)\,.$$

Riferimenti.

[1] N. - E. NÖRLUND, *Differenzenrechnung*, Grundlehren Math. Wissensch., Bd. **13**, J. Springer, Berlin 1924.

[2] N. - E. NÖRLUND, *Sur la « Somme » d'une Fonction*, Mémorial Sci. Math., fasc. **24**, Gauthier-Villars, Paris 1927.

[3] L. M. MILNE-THOMSON, *The Calculus of Finite Differences*, Macmillan, London 1931.

[4] L. TONELLI, *Serie Trigonometriche*, N. Zanichelli, Bologna 1928.

[5] C. SCARAVELLI, *Polinomi di Appell nel senso del Calcolo alle differenze finite*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 355-366.

[6] A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle successioni* (I-II), Ann. Mat. Pura Appl.: (4) **8** (1930), 103-139; (4) **9** (1931), 25-56.

Riassunto.

Si prova che l'operazione inversa fondamentale del « Calcolo alle differenze finite » è un'operazione elementare, e si studia tale operazione.

Résumé.

On prouve que l'opération inverse fondamentale du « Calcul aux différences finies » est une opération élémentaire, et on étudie une semblable opération.

* * *