Riv. Mat. Univ. Parma (2) 10 (1969), 39-48

GIACOMINO BATTIONI (*)

Su una generalizzazione delle funzioni iperboliche e delle funzioni circolari. (**)

1. – Le ben note espressioni delle funzioni iperboliche e delle funzioni circolari mediante la funzione esponenziale si possono scrivere nella forma

$$(1) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{1x}}{1^0} + \frac{e^{-1x}}{(-1)^0}\right), \qquad \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{1x}}{1^1} + \frac{e^{-1x}}{(-1)^1}\right);$$

$$(2) \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix}}{i^0} + \frac{e^{-ix}}{(-i)^0}\right), \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix}}{i^1} + \frac{e^{-ix}}{(-i)^1}\right),$$

dove sono messi in evidenza i numeri 1 e -1 (radici quadrate dell'unità positiva) e i numeri i e $-i$ (radici quadrate dell'unità negativa). La forma dei secondi membri delle (1), (2) suggerisce la seguente naturale generalizzazione delle funzioni iperboliche e delle funzioni circolari.

Essendo n un generico intero $\geqslant 2$, considero le radici n-esime dell'unità positiva e le radici n-esime dell'unità negativa, che indico rispettivamente coi simboli

$$(3) \qquad 1_{n,1}, \; 1_{n,2}, \; \ldots, \; 1_{n,n};$$

$$(4) \qquad \bar{1}_{n,1}, \; \bar{1}_{n,2}, \; \ldots, \; \bar{1}_{n,n},$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto: 15-XI-1969.

e pongo:

$$(5)\qquad \cosh_{n,k} x = \frac{1}{n}\left(\frac{e^{1_{n,1}x}}{1_{n,1}^k} + \frac{e^{1_{n,2}x}}{1_{n,2}^k} + \dots + \frac{e^{1_{n,n}x}}{1_{n,n}^k}\right) \equiv \frac{1}{n}\sum_1^n{}_p \frac{e^{1_{n,p}x}}{1_{n,p}^k},$$

$$(6)\qquad \cos_{n,k} x = \frac{1}{n}\left(\frac{e^{\bar{1}_{n,1}x}}{\bar{1}_{n,1}^k} + \frac{e^{\bar{1}_{n,2}x}}{\bar{1}_{n,2}^k} + \dots + \frac{e^{\bar{1}_{n,n}x}}{\bar{1}_{n,n}^k}\right) \equiv \frac{1}{n}\sum_1^n{}_p \frac{e^{\bar{1}_{n,p}x}}{\bar{1}_{n,p}^k},$$

essendo $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Chiamo poi le (5), (6) *funzioni iperboliche e funzioni circolari generalizzate*, e precisamente chiamo la (5) *coseno iperbolico, di classe n e di ordine k, di x*, e la (6) *coseno (circolare), di classe n e di ordine k, di x* [si vedrà in seguito (v. n. 4) che k è l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione stessa].

Risulta così, in particolare,

$$\cosh x = \cosh_{2,0} x, \qquad \operatorname{senh} x = \cosh_{2,1} x;$$

$$\cos x = \cos_{2,0} x, \qquad \operatorname{sen} x = \cos_{2,1} x.$$

Nel seguito di questo lavoro si vedrà che le formule notevoli, relative alle ordinarie funzioni iperboliche e funzioni circolari, si estendono, opportunamente, alle funzioni iperboliche e funzioni circolari generalizzate.

2.1. – Le ben note identità che si possono scrivere nella forma

$$\cosh x + 1 \operatorname{senh} x = e^{1x}, \qquad \cosh x + (-1) \operatorname{senh} x = e^{-1x};$$

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix}, \qquad \cos x + (-i) \operatorname{sen} x = e^{-ix},$$

si generalizzano nel modo seguente:

$$(7)\qquad \cosh_{n,0} x + 1_{n,p} \cosh_{n,1} x + 1_{n,p}^2 \cosh_{n,2} x + \dots + 1_{n,p}^{n-1} \cosh_{n,n-1} x = e^{1_{n,p}x},$$

$$(8)\qquad \cos_{n,0} x + \bar{1}_{n,p} \cos_{n,1} x + \bar{1}_{n,p}^2 \cos_{n,2} x + \dots + \bar{1}_{n,p}^{n-1} \cos_{n,n-1} x = e^{\bar{1}_{n,p}x},$$

$$(p = 1, 2, \dots, n).$$

Dimostro la (7). Per la definizione (5), il primo membro della (7) ha l'espressione

$$\sum_0^{n-1}{}_k\, 1_{n,p}^k \cosh_{n,k} x = \sum_0^{n-1}{}_k\, 1_{n,p}^k \frac{1}{n}\sum_1^n{}_q \frac{e^{1_{n,q}x}}{1_{n,q}^k},$$

o anche, cambiando l'ordine delle sommazioni,

$$\sum_0^{n-1}{}_k\, 1_{n,p}^k \cosh_{n,k} x = \frac{1}{n} \sum_1^n{}_q\, e^{1_{n,q}x} \sum_0^{n-1}{}_k \left(\frac{1_{n,p}}{1_{n,q}}\right)^k .$$

Ma qui nel secondo membro la somma interna è diversa da 0 solo per $q = p$, e vale in tal caso n. Si ha quindi semplicemente

$$\sum_0^{n-1}{}_k\, 1_{n,p}^k \cosh_{n,k} x = e^{1_{n,p}x}, \tag{9}$$

che è proprio la (7) scritta in forma compatta.

Analogamente si dimostra la (8).

2.2. – Le ben note *identità fondamentali* che si possono scrivere nella forma

$$\begin{vmatrix} \cosh x & \operatorname{senh} x \\ \operatorname{senh} x & \cosh x \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1,$$

si generalizzano nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} \cosh_{n,0} x & \cosh_{n,1} x & \cosh_{n,2} x & \dots & \cosh_{n,n-1} x \\ \cosh_{n,n-1} x & \cosh_{n,0} x & \cosh_{n,1} x & \dots & \cosh_{n,n-2} x \\ \cosh_{n,n-2} x & \cosh_{n,n-1} x & \cosh_{n,0} x & \dots & \cosh_{n,n-3} x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cosh_{n,1} x & \cosh_{n,2} x & \cosh_{n,3} x & \dots & \cosh_{n,0} x \end{vmatrix} = 1, \tag{10}$$

$$\begin{vmatrix} \cos_{n,0} x & \cos_{n,1} x & \cos_{n,2} x & \dots & \cos_{n,n-1} x \\ -\cos_{n,n-1} x & \cos_{n,0} x & \cos_{n,1} x & \dots & \cos_{n,n-2} x \\ -\cos_{n,n-2} x & -\cos_{n,n-1} x & \cos_{n,0} x & \dots & \cos_{n,n-3} x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\cos_{n,1} x & -\cos_{n,2} x & -\cos_{n,3} x & \dots & \cos_{n,0} x \end{vmatrix} = 1, \tag{11}$$

dove i primi membri sono determinanti circolanti, rispettivamente di prima e di seconda specie.

Accenno alla dimostrazione della (10). Mediante la teoria dei determinanti circolanti si prova che la (10) è equivalente alla

$$\prod_{1}^{n}{}_q \sum_{0}^{n-1}{}_k 1_{n,q}^{k} \cosh_{n,k} x = 1 ,$$

la quale può ottenersi moltiplicando membro a membro le (7) e tenendo conto che è $\prod_{1}^{n}{}_q e^{1_{n,q}x} = e^{x\sum_{1}^{n}{}_q 1_{n,q}} = 1$.

Analogamente si dimostra la (11).

Ad esempio, per $n=3$ si ha, sviluppando i determinanti,

$$\cosh_{3,0}^{3} x + \cosh_{3,1}^{3} x + \cosh_{3,2}^{3} x - 3 \cosh_{3,0} x \cosh_{3,1} x \cosh_{3,2} x = 1 ,$$

$$\cos_{3,0}^{3} x - \cos_{3,1}^{3} x + \cos_{3,2}^{3} x + 3 \cos_{3,0} x \cos_{3,1} x \cos_{3,2} x = 1 .$$

2.3. – Le ben note *formule di addizione* si generalizzano nel modo seguente:

$$\cosh_{n,k}(x+y) = \sum_{0}^{k}{}_l \cosh_{n,l} x \cosh_{n,k-l} y + \sum_{k+1}^{n-1}{}_l \cosh_{n,l} x \cosh_{n,n+k-l} y , \tag{12}$$

$$\cos_{n,k}(x+y) = \sum_{0}^{k}{}_l \cos_{n,l} x \cos_{n,k-l} y - \sum_{k+1}^{n-1}{}_l \cos_{n,l} x \cos_{n,n+k-l} y , \tag{13}$$

dove nei secondi membri va inteso che la seconda sommatoria sia priva di termini qualora si abbia $k+1 > n-1$.

Dimostro la (12). Per definizione si ha

$$\cosh_{n,k}(x+y) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_p \frac{e^{1_{n,p}(x+y)}}{1_{n,p}^{k}} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_p \frac{1}{1_{n,p}^{k}} e^{1_{n,p}x} e^{1_{n,p}y} .$$

Applicando la (7) segue

$$\cosh_{n,k}(x+y) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_p \frac{1}{1_{n,p}^{k}} \left(\sum_{0}^{n-1}{}_l 1_{n,p}^{l} \cosh_{n,l} x \cdot \sum_{0}^{n-1}{}_m 1_{n,p}^{m} \cosh_{n,m} y\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_p \frac{1}{1_{n,p}^{k}} \sum_{0}^{n-1}{}_{l,m} 1_{n,p}^{l+m} \cosh_{n,l} x \cosh_{n,m} y ,$$

o anche, cambiando l'ordine delle sommazioni,

$$\cosh_{n,k}(x+y) = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_{l,m} \cosh_{n,l} x \cosh_{n,m} y \sum_{1}^{n}{}_{p} 1_{n,p}^{l+m-k}.$$

Ma qui nel secondo membro la somma interna è diversa da 0 solo quando l'intero $l+m-k$ è un multiplo di n, e cioè per $l+m-k=0$, o $l+m-k=n$ (essendo questi i soli casi possibili), e vale in tali casi n. Segue allora facilmente la (12).

Analogamente si dimostra la (13).

Ad esempio, per $n=3$ si ha, scrivendo per esteso le sommatorie,

$$\begin{cases} \cosh_{3,0}(x+y) = \cosh_{3,0} x \cosh_{3,0} y + \cosh_{3,1} x \cosh_{3,2} y + \cosh_{3,2} x \cosh_{3,1} y \\ \cosh_{3,1}(x+y) = \cosh_{3,0} x \cosh_{3,1} y + \cosh_{3,1} x \cosh_{3,0} y + \cosh_{3,2} x \cosh_{3,2} y \\ \cosh_{3,2}(x+y) = \cosh_{3,0} x \cosh_{3,2} y + \cosh_{3,1} x \cosh_{3,1} y + \cosh_{3,2} x \cosh_{3,0} y\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos_{3,0}(x+y) = \cos_{3,0} x \cos_{3,0} y - \cos_{3,1} x \cos_{3,2} y - \cos_{3,2} x \cos_{3,1} y \\ \cos_{3,1}(x+y) = \cos_{3,0} x \cos_{3,1} y + \cos_{3,1} x \cos_{3,0} y - \cos_{2,2} x \cos_{3,2} y \\ \cos_{3,2}(x+y) = \cos_{3,0} x \cos_{3,2} y + \cos_{3,1} x \cos_{3,1} y + \cos_{3,2} x \cos_{3,0} y\,. \end{cases}$$

3.1. – Sussistono le seguenti *formule di derivazione*:

$$D_x \cosh_{n,0} x = \cosh_{n,n-1} x\,, \quad D_x \cosh_{n,k} x = \cosh_{n,k-1} x \qquad (k=1,2,\ldots,n-1),$$

$$D_x \cos_{n,0} x = -\cos_{n,n-1} x\,, \quad D_x \cos_{n,k} x = \cos_{n,k-1} x \qquad (k=1,2,\ldots,n-1).$$

Si stabiliscono poi facilmente le *formule di derivazione successiva* per le funzioni considerate.

3.2. – Dal n. precedente seguono le *relazioni differenziali*

$$D_x^n \cosh_{\imath,k} x = \cosh_{n,k} x \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1).$$

Le funzioni iperboliche di classe n sono dunque soluzioni dell'equazione differenziale

$$y^{(n)}(x) - y(x) = 0\,, \tag{14}$$

ed anzi ne sono un sistema fondamentale di integrali, dato che il loro wronskiano è il determinante figurante a primo membro della (10). L'integrale generale della (14) si può allora scrivere

$$y(x) = \sum_{0}^{n-1}{}_k \, c_k \cosh_{n,k} x \,,$$

essendo c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1} delle costanti arbitrarie.

Partendo invece dalle *relazioni differenziali*

$$D_x^n \cos_{n,k} x = -\cos_{n,k} x \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n-1),$$

si ragiona analogamente per le funzioni circolari di classe n in relazione all'equazione differenziale

$$y^{(n)}(x) + y(x) = 0 \,.$$

4. – Sussistono i seguenti *sviluppi in serie di Mac Laurin*:

$$\cosh_{n,k} x = \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+n}}{(k+n)!} + \frac{x^{k+2n}}{(k+2n)!} + ... + \frac{x^{k+hn}}{(k+hn)!} + ..., \tag{15}$$

$$\cos_{n,k} x = \frac{x^k}{k!} - \frac{x^{k+n}}{(k+n)!} + \frac{x^{k+2n}}{(k+2n)!} - ... + (-1)^h \frac{x^{k+hn}}{(k+hn)!} + ... \,. \tag{16}$$

Dimostro la (15). Per l'espressione di e^x come somma della serie esponenziale, dalla definizione (5) si ha:

$$\cosh_{n,k} x = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_p \frac{1}{1_{n,p}^k} \sum_{0}^{+\infty}{}_\nu \frac{(1_{n,p}\, x)^\nu}{\nu!} \,,$$

o anche, cambiando l'ordine delle sommazioni,

$$\cosh_{n,k} x = \frac{1}{n} \sum_{0}^{+\infty}{}_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \sum_{1}^{n}{}_p \, 1_{n,p}^{\nu-k} \,.$$

Ma qui la somma interna è diversa da zero solo per $\nu - k = hn$ con $h = 0, 1, 2, ...$ e vale in tal caso n. Si ha quindi semplicemente

$$\cosh_{n,k} x = \sum_{0}^{+\infty}{}_h \frac{x^{k+hn}}{(k+hn)!} \,,$$

che è proprio la (15) scritta in forma compatta.

Analogamente si dimostra la (16).

Ad esempio, per $n = 3$ si ha:

$$\begin{cases} \cosh_{3,0} x = 1 + (x^3/3\,!) + (x^6/6\,!) + \ldots + \left(x^{3h}/(3h)\,!\right) + \ldots \\ \cosh_{3,1} x = (x/1\,!) + (x^4/4\,!) + (x^7/7\,!) + \ldots + \left(x^{1+3h}/(1+3h)\,!\right) + \ldots \\ \cosh_{3,2} x = (x^2/2\,!) + (x^5/5\,!) + (x^8/8\,!) + \ldots + \left(x^{2+3h}/(2+3h)\,!\right) + \ldots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos_{3,0} x = 1 - (x^3/3\,!) + (x^6/6\,!) - \ldots + (-1)^h \left(x^{3h}/(3h)\,!\right) + \ldots \\ \cos_{3,1} x = (x/1\,!) - (x^4/4\,!) + (x^7/7\,!) - \ldots + (-1)^h \left(x^{1+3h}/(1+3h)\,!\right) + \ldots \\ \cos_{3,2} x = (x^2/2\,!) - (x^5/5\,!) + (x^8/8\,!) - \ldots + (-1)^h \left(x^{2+3h}/(2+3h)\,!\right) + \ldots . \end{cases}$$

Dalle (15), (16) si vede chiaramente che le funzioni $\cosh_{n,k} x$ e $\cos_{n,k} x$ per x reale assumono valori reali, e che per $x \to 0$ sono infinitesime di ordine k.

5. – Le ben note relazioni

$$\cos x = \cosh ix\,, \qquad \operatorname{sen} x = i^{-1} \operatorname{senh} ix\,,$$

si generalizzano nel modo seguente:

$$\cos_{n,k} x = (\bar{1}_{n,p})^{-k} \cosh_{n,k}(\bar{1}_{n,p}\, x) \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{17}$$

Dimostro la (17). Fissata una radice $\bar{1}_{n,p}$, le (3), (4) possono pensarsi ordinate in modo tale da aversi

$$\bar{1}_{n,q} = \bar{1}_{n,p} \cdot 1_{n,q} \qquad (q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Si ha allora, per la definizione (6),

$$\cos_{n,k} x = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_q \frac{e^{\bar{1}_{n,p}\, 1_{n,q}\, x}}{(\bar{1}_{n,p}\, 1_{n,q})^k} = (\bar{1}_{n,p})^{-k} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_q \frac{e^{1_{n,q}(\bar{1}_{n,p} x)}}{1_{n,q}^k}\,,$$

e di qui si ha proprio la (17).

In particolare, qualora n sia dispari si può prendere $\bar{1}_{n,p} = -1$, e si ha allora

$$\cos_{n,k} x = (-1)^k \cosh_{n,k}(-x) .$$

6. – Le funzioni iperboliche di classe 3 si possono anche esprimere nel seguente modo:

$$\cosh_{3,0} x = (1/3) \left[e^x + 2e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x\right)\right] ,$$

$$\cosh_{3,1} x = (1/3) \left[e^x + 2e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x - (2\pi/3)\right)\right] ,$$

$$\cosh_{3,2} x = (1/3) \left[e^x + 2e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x - (4\pi/3)\right)\right] .$$

Le funzioni circolari di classe 3 si esprimono in modo simile.

Per le funzioni iperboliche e le funzioni circolari di classe 4 si ha:

$$\cosh_{4,0} x = \tfrac{1}{2} (\cosh x + \cos x) , \qquad \cosh_{4,1} x = \tfrac{1}{2} (\operatorname{senh} x + \operatorname{sen} x) ,$$

$$\cosh_{4,2} x = \tfrac{1}{2} (\cosh x - \cos x) , \qquad \cosh_{4,3} x = \tfrac{1}{2} (\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x) ,$$

$$\cos_{4,0} x = \cosh (x/\sqrt{2}) \cos (x/\sqrt{2}) ,$$

$$\cos_{4,1} x = (1/\sqrt{2}) \left[\cosh (x/\sqrt{2}) \operatorname{sen} (x/\sqrt{2}) + \operatorname{senh} (x/\sqrt{2}) \cos (x/\sqrt{2})\right] ,$$

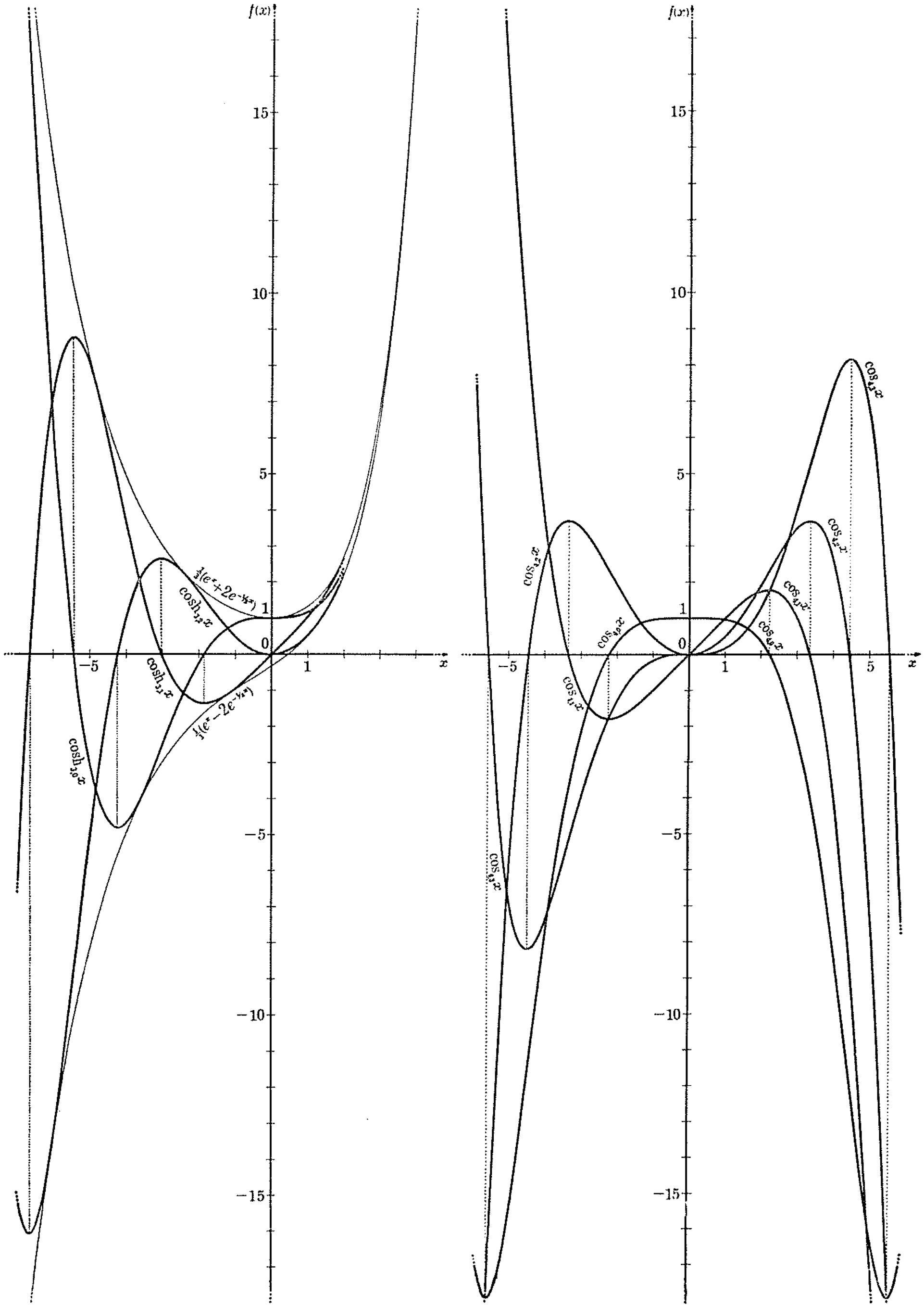
$$\cos_{4,2} x = \operatorname{senh} (x/\sqrt{2}) \operatorname{sen} (x/\sqrt{2}) ,$$

$$\cos_{4,3} x = (1/\sqrt{2}) \left[\cosh (x/\sqrt{2}) \operatorname{sen} (x/\sqrt{2}) - \operatorname{senh} (x/\sqrt{2}) \cos (x/\sqrt{2})\right] .$$

Le Figure della pagina seguente contengono i diagrammi di alcune delle funzioni ora considerate [1].

---

[1] I calcoli necessari per il disegno di tali diagrammi sono stati eseguiti dal « Centro Calcolo » dell'Istituto di Matematica dell'Università di Parma.


f(x)
15
10
5
1
0
−5
1
x
−5
−10
−15

Summary.

The expressions of the hyperbolic functions and circular functions by means of the exponential function suggest a natural generalization of themselves. Such new generalized hyperbolic functions and circular functions then are studied.

* * *