Riv. Mat. Univ. Parma (2) **10** (1969), 1-7

MARIO A. PUGLISI (*)

Intorno ad una classe di spazi topologici localmente di Lindelöf. (**)

Introduzione.

Suppongasi che E sia uno spazio topologico localmente di LINDELÖF, cioè che esista un ricovrimento aperto $(U_j)_{j \in J}$ di E tale che per ogni $j \in J$ l'aderenza $\overline{U}_j$ di U_j, quale sottospazio di E, sia uno spazio di LINDELÖF. È stato dimostrato da K. MORITA in [5] che, se esiste un raffinamento aperto localmente finito di $(U_j)_{j \in J}$, E è una somma diretta topologica di spazi di LINDELÖF nel senso che esso gode della seguente

Proprietà (*). *E è riunione di una famiglia di insiemi aperti a due a due disgiunti, ciascuno dei quali come sottospazio di E è uno spazio di Lindelöf.*

Come è ovvio, ancora seguendo MORITA, da ciò si deduce che ogniqualvolta lo spazio localmente di LINDELÖF E è paracompatto, il ricovrimento aperto $(U_j)_{j \in J}$ di cui sopra, essendo dotato di un raffinamento aperto localmente finito in grazia alla paracompattezza, E verifica la Proprietà (*).

Se si lascia cadere l'ipotesi di paracompattezza ed anche, più in generale, quella che $(U_j)_{j \in J}$, di cui sopra, sia dotato di un raffinamento aperto localmente finito, nulla si può asserire circa la validità della Proprietà (*). Purtuttavia, se $(U_j)_{j \in J}$ è dotato di un raffinamento aperto localmente numerabile (cfr. la successiva Definizione 3, oppure [4]), si stabilisce, ed in ciò consiste lo scopo della presente Nota, che E risulta ancora somma diretta topologica di spazi di LINDELÖF nel senso sopra precisato, ciò che, se E è regolare, consente di riconoscere, *a posteriori*, che E è paracompatto.

(*) Indirizzo: Istituto di Analisi matematica, Università, 70100 Bari, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Contratti di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per il 1968-69. — Ricevuto il giorno: 3-XII-1969.

1. – In quanto segue E, F, G sono insiemi.

Se R è una relazione fra elementi di E ed elementi di F (cioè una parte di $E\times F$) ed S è una relazione fra elementi di F ed elementi di G, come è noto con $S\circ R$ si denota la relazione composta di R ed S cioè l'insieme degli $(x, z)\in E\times G$ tali che esista $y\in F$ per cui $(x, y)\in R$ e $(y, z)\in S$.

Se R è una relazione fra elementi di E ed elementi di F, con $\overset{-1}{R}$ si denota la relazione reciproca di R, cioè l'insieme degli $(y, x)\in F\times E$ tali che $(x, y)\in R$.

Osservazione 1. È immediato riconoscere che:

$$R\in \mathfrak{P}(E\times F) \quad\Longrightarrow\quad \overset{-1}{\widehat{\overset{-1}{R}}} = R\,, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} (R_i)_{i\in I}\in\big(\mathfrak{P}(E\times F)\big)^I \quad\Longrightarrow \\ \Longrightarrow \overset{-1}{\widehat{\bigcup_{i\in I} R_i}} = \bigcup_{i\in I}\overset{-1}{R_i}\,, \quad \overset{-1}{\widehat{\bigcap_{i\in I} R_i}} = \bigcap_{i\in I}\overset{-1}{R_i}\,, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$R\in \mathfrak{P}(E\times F),\ S\in\mathfrak{P}(F\times G) \quad\Longrightarrow\quad \overset{-1}{\widehat{S\circ R}} = \overset{-1}{R}\circ\overset{-1}{S}\,, \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} (R_i)_{i\in I}\in\big(\mathfrak{P}(E\times F)\big)^I, \quad (S_\lambda)_{\lambda\in L}\in\big(\mathfrak{P}(F\times G)\big)^L \quad\Longrightarrow \\ \Longrightarrow (\bigcup_{\lambda\in L} S_\lambda)\circ(\bigcup_{i\in I} R_i) = \bigcup_{(i,\lambda)\in I\times L}(S_\lambda\circ R_i)\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ciò premesso, sussiste la seguente

Proposizione 1. *Sia R una relazione riflessiva e simmetrica sull'insieme E* (1), *sia $(R_n)_{n\in N}$ la successione di relazioni su E definita per ricorrenza ponendo $R_0=R$ e, per ogni $n\in \boldsymbol{N}$, $R_{n+1}=R_n\circ R$ e sia $G_R=\bigcup_{n\in N} R_n$. Allora, G_R è una relazione di equivalenza su E tale che $R\subset G_R$. Inoltre, se G è una relazione di equivalenza su E tale che $R\subset G$, risulta $G_R\subset G$ mentre, se x ed y sono elementi di E, risulta $(x, y)\in G_R$ se e soltanto se esiste una successione finita $(z_k)_{0\le k\le n}$ di elementi di E tale che $z_0=x$, $z_n=y$ e per ogni $k=0, 1, \ldots, n-1$ risulta $(z_k, z_{k+1})\in R$. Se, poi, $\widehat{\boldsymbol{w}}$ è un numero cardinale infinito tale che per ogni $x\in E$ si abbia* $\operatorname{card}(R(x))\leqslant\widehat{\boldsymbol{w}}$, *allora per ogni $x\in E$ si ha anche* $\operatorname{card}(G_R(x))\leqslant\widehat{\boldsymbol{w}}$ (2).

(1) Cioè la diagonale Δ_E di $E\times E$ è contenuta in R e $R=\overset{-1}{R}$.

(2) Se S è una relazione su E, per ogni $x\in E$, $S(x)$ denota l'insieme degli $y\in E$ tali che $(x, y)\in S$.

Dimostrazione. Essendo $\Delta_E \subset R = R_0 \subset G_R$, G_R è riflessiva. Per dimostrare che G_R è simmetrica, osserviamo preliminarmente che

$$\forall\,(p,\ q) \in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}: \qquad R_p \circ R_q = R_{p+q+1}\,, \tag{1.5}$$

come si riconosce facilmente ragionando per induzione completa su q.

Dopo ciò, per induzione completa su n e tenendo conto di (1.3) e (1.5), si riconosce che ciascuna R_n è simmetrica. Da qui, a causa di (1.2), consegue che

$$\overset{-1}{G_R} = \bigcup_{n\in N} \overset{-1}{R_n} = \bigcup_{n\in N} R_n = G_R$$

e, quindi, G_R è simmetrica. A causa di (1.4) e (1.5) si ha che

$$G_R \circ G_R = \bigcup_{(p,q)\in N\times N} R_{p+q+1} \subset G_R$$

risultando, con ciò, G_R transitiva e, quindi, una relazione di equivalenza. Che $R \subset G_R$ è del tutto ovvio. Inoltre, se G è una relazione di equivalenza su E tale che $R \subset G_R$, essendo, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, $R_n \subset G$, come si riconosce facilmente per induzione completa su n e tenendo conto della transitività di G, consegue anche $G_R \subset G$.

Proviamo, ora, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ risulta $(x, y) \in R_n$ se e solo se esiste una successione finita $(z_k)_{0\leq k\leq n}$ di elementi di E tale che $x = z_0$, $y = z_n$ e per ogni $k = 0$, $1, \ldots, n-1$ risulta $(z_k, z_{k+1}) \in R$. A tal fine, per un $n \in \boldsymbol{N}$ sia R_n^* l'insieme degli $(x, y) \in E\times E$ tali che esista una successione finita $(z_k)_{0\leq k\leq n}$ di elementi di E tali che $x = z_0$, $y = z_n$ e per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sia $(z_k, z_{k+1}) \in R$. Proviamo che per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ è $R_n = R_n^*$ riconoscendo, dapprima, per induzione completa su n, che per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ è $R_n \subset R_n^*$. È, ovviamente, $R_0 = R_0^*$. Supponiamo che per un certo $n \in \boldsymbol{N}$ sia $R_n \subset R_n^*$ e sia $(x, y) \in R_{n+1}$. Poichè, per (1.5), è $R_{n+1} = R \circ R_n$, esiste $z \in E$ tale che $(x, z) \in R_n$ e $(z, y) \in R$, e poichè $R_n \subset R_n^*$ esiste una successione finita $(z_k)_{0\leq k\leq n}$ di elementi di E tale che $x = z_0$, $y = z_n$ e, per ogni $k = 0$, $1, \ldots, n-1$, $(z_k, z_{k+1}) \in R$. Posto $z_{n+1} = y$, risulta $(z_n, z_{n+1}) \in R$ e, quindi, $(x, y) \in R_{n+1}^*$. Dunque $R_{n+1} \subset R_{n+1}^*$. Ancora per induzione completa proviamo che per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ è $R_n^* \subset R_n$. Ciò vale per $n = 0$. Sia, per un certo $n \in \boldsymbol{N}$, $R_n^* \subset R_n$ e sia $(x, y) \in R_{n+1}^*$. Esiste, allora, una successione finita $(z_k)_{0\leq k\leq n+1}$ di elementi di E tale che $x = z_0$, $y = z_{n+1}$ e, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$, $(z_k, z_{k+1}) \in R$. Risulta $(x, z_n) \in R_n$ e, quindi, $(x, y) \in R_n \circ R = R_{n+1}$. Dunque $R_{n+1}^* \subset R_{n+1}$.

Da quanto precede consegue, allora, che $(x, y) \in G_R$ se e solo se $(x, y) \in R_n^*$ per un opportuno $n \in \boldsymbol{N}$ cioè a dire se e solo se esiste $(z_k)_{0\leq k\leq n}$ tale che $z_0 = x$, $z_n = y$ e per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$ si ha $(z_k, z_{k+1}) \in R$.

Da ultimo, sia $\hat{w}$ un numero cardinale infinito e supponiamo che per ogni $x \in E$ sia $\operatorname{card}(R(x)) \leqslant \hat{w}$. Proviamo che per ogni $x \in E$ e per ogni $n \in N$ risulta $\operatorname{card}(R_n(x)) \leqslant \hat{w}$. Sia $x \in E$. È, allora, $\operatorname{card}(R_0(x)) = \operatorname{card}(R(x)) \leqslant \hat{w}$. Sia, ora, per un certo $n \in N$, $\operatorname{card}(R_n(x)) \leqslant \hat{w}$ quale che sia $x \in E$. Essendo

$$R_{n+1}(x) = \bigcup_{z \in R(x)} R_n(z) ,$$

risulta $\operatorname{card}(R_{n+1}(x)) \leqslant \hat{w}$. Infine, essendo (3)

$$G_R(x) = \bigcup_{n \in N} R_n(x) ,$$

risulta anche $G_R(x) \leqslant \hat{w}$.

Osservazione 2. Se, in particolare, per ogni $x \in E$, $R(x)$ è numerabile, risulta anche $G_R(x) \leqslant \hat{w}$ per ogni $x \in E$.

Il risultato precedente viene utilizzato, nella proposizione successiva, in una questione concernente famiglie di parti di un insieme. Richiamiamo, preliminarmente, la seguente definizione (cfr. [1], § 1: def. 3):

Definizione 1. Se $(X_i)_{i \in I}$ è una famiglia di parti dell'insieme E e X è una qualunque parte di E, chiamasi *stella di* X *in* I *per* $(X_i)_{i \in I}$ l'insieme I^*_X degli $i \in I$ tali che $X \cap X_i$ non sia vuoto.

Proposizione 2. *Se $(X_i)_{i \in I}$ è una famiglia di parti non vuote dell'insieme E, esiste una particolare $(I_\mu)_{\mu \in M}$ di I tale che se è $\mu' \in M$ e $\mu'' \in M$ con $\mu' \neq \mu''$, da $i' \in I_{\mu'}$ e $i'' \in I_{\mu''}$ consegue $X_{i'} \cap X_{i''}$ vuoto, mentre se è $\mu \in M$ e $i' \in I_\mu$ e $i'' \in {}_\mu I$, allora esiste una successione finita $(i_k)_{0 \leq k \leq n}$ di elementi di I tale che $i_0 = i'$, $i_n = i''$ e per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$ si ha $X_{i_k} \cap X_{i_{k+1}}$ non vuoto. Se, poi, $\hat{w}$ è un numero cardinale infinito tale che per ogni $\lambda \in I$ la stella $I^*_{X_\lambda}$ di X_n in I per $(X_i)_{i \in I}$* (Def. 1) *abbia numero cardinaleinferiore a $\hat{w}$, per ogni $\mu \in M$ risulta anche* $\operatorname{card}(I_\mu) \leqslant \hat{w}$.

Dimostrazione. Sia R l'insieme degli $(i', i'') \in I \times I$ tali che $X_{i'} \cap X_{i''}$ non sia vuoto. Evidentemente R è una relazione simmetrica e riflessiva su I. Se, allora, $(R_n)_{n \in N}$ è la successione di relazioni su I definita per ricorrenza ponendo $R_0 = R$ e, per ogni $n \in N$, $R_{n+1} = R_n \circ R$, posto $G_R = \bigcup_{n \in N} R_n$, in forza della Proposizione 1 G_R risulta una relazione di equivalenza su I.

---

(3) Se $(R_i)_{i \in I}$ è una famiglia di relazioni su E, posto $R = \bigcup_{i \in I} R_i$, per ogni $x \in E$, risulta $R(x) = \bigcup_{i \in I} R_i(x)$.

Dopo ciò, sia $M = I/G_R$ e sia φ la surgezione canonica di I su M. Posto, per ogni $\mu \in M$, $I_\mu = \overset{-1}{\varphi}(\mu)$, la $(I_\mu)_{\mu \in M}$, ancora a causa della Proposizione 1, risponde ai requisiti della tesi in quanto per ogni $\mu \in M$ e per ogni $i \in I_\mu$ risulta $\varphi(i) = \mu$ e $I_\mu = G_R(i)$ (4), mentre, da ultimo, per ogni $\lambda \in I$ si ha $R(\lambda) = I^*_{X_\lambda}$.

Osservazeone 3. Se, in particolare, $I^*_{X_\lambda}$ è numerabile per ogni $\lambda \in I$, allora I_μ è numerabile per ogni $\mu \in M$.

2. – I risultati precedenti vengono qui adoperati in una questione concernente spazi di LINDELÖF e spazi paracompatti.

Ricordiamo alcune definizioni:

Definizione 2. Se $(U_i)_{i \in I}$ e $(V_j)_{j \in J}$ sono ricovrimenti dell'insieme E, si dice che *$(U_i)_{i \in I}$ è un raffinamento di $(V_j)_{j \in J}$* se e solo se per ogni $i \in I$ esiste un $j \in J$ tale che $U_i \subset V_j$.

Definizione 3. Si dice che *una famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di parti di uno spazio topologico E è localmente numerabile* se esiste un ricovrimento aperto $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ di E tale che per ogni $\lambda \in L$ la stella $I^*_{U_\lambda}$ di U_λ in I per $(A_i)_{i \in I}$ è numerabile.

Sussiste il seguente

Lemma 1. *Se $(A_i)_{i \in I}$ è una famiglia localmente numerabile di parti di uno spazio di Lindelöf E, l'insieme I_0 degli $i \in I$ tali che A_i sia non vuoto è numerabile.*

Dimostrazione. Sia $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ un ricovrimento aperto di E tale che per ogni $\lambda \in L$ la stella $I^*_{U_\lambda}$ di U_λ in I per $(A_i)_{i \in I}$ sia numerabile. Poichè E è uno spazio di LINDELÖF, esiste una parte numerabile H di L tale che $E = \bigcup_{\lambda \in H} U_\lambda$. Sia $i \in I_0$ e, quindi, A_i non vuoto. Esiste, allora, $\lambda_0 \in H$ tale che $A_i \cap U_{\lambda_0}$ è non vuoto e, quindi, $i \in I^*_{U_{\lambda_0}}$. Pertanto risulta $I_0 \subset \bigcup_{\lambda \in H} I^*_{U_\lambda}$ donde, H al pari di ciascun $I^*_{U_\lambda}$ essendo numerabile, consegue che I_0 è numerabile.

Passiamo a riconoscere che

(4) Se f è un'applicazione dell'insieme E nell'insieme E', posto $R_f = \{(x, y) \in E \times E \mid f(x) = f(y)\}$, per ogni $X \in \mathfrak{P}(E)$ risulta $R_f(X) = \overset{-1}{f}(f(X))$.

Proposizione 3. *Se E è uno spazio topologico avente un ricovrimento chiuso $(F_j)_{j\in J}$ di insiemi tali che ogni F_j sia un sottospazio di Lindelöf di E e se $(F_j)_{j\in J}$ ha un raffinamento aperto localmente numerabile $(U_i)_{i\in I}$, allora E è somma diretta topologica di spazi di Lindelöf.*

Dimostrazione. Essendo ciascun U_i contenuto in un opportuno F_j che è chiuso, si ha $\overline{U}_i \subset F_j$, e, quindi, $\overline{U}_i$ è un sottospazio di LINDELÖF.

Per ogni $\lambda \in I$ la famiglia $(U_\lambda \cap U_i)_{i\in I}$ essendo localmente numerabile, la stella $I^*_{U_\lambda}$ di U_λ in I per $(U_i)_{i\in I}$ risulta numerabile a causa del Lemma precedente. Pertanto, in forza della Proposizione 2 e per quanto notato nell'Osservazione 3 del n. **1**, esiste una partizione $(I_\mu)_{\mu\in M}$ di I tale che se μ' e μ'' sono elementi distinti di M e $i' \in I_{\mu'}$, $i'' \in I_{\mu''}$, risulta $U_{i'} \cap U_{i''}$ vuoto e ogni I_μ è numerabile. Inoltre, se $\mu \in M$ e $i' \in I_\mu$ e $i'' \in I_\mu$, esiste una successione finita $(i_k)_{0\leq k\leq n}$ di indici tali che $i_0 = i'$, $i_n = i''$ e per ogni $k = 0, 1, \ldots, n-1$ risulta $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}}$ non vuoto.

Dopo ciò, sia, per ogni $\mu \in M$,

$$V_\mu = \bigcup_{i\in I_\mu} U_i .$$

Evidentemente, i V_μ sono insiemi aperti, a due a due disgiunti e la $(V_\mu)_{\mu\in M}$ è un ricovrimento aperto di E. Essendo, di conseguenza, ogni V_μ anche chiuso, si ha $\overline{U}_i \subset V_\mu$ per ogni $i \in I_\mu$. Da ciò consegue che

$$\overline{V}_\mu = \bigcup_{i\in I_\mu} \overline{U}_i$$

e quindi, I_μ essendo numerabile ed ogni $\overline{U}_i$ un sottospazio di LINDELÖF, che V_μ è un sottospazio di LINDELÖF.

Dopo ciò è di ovvia dimostrazione il seguente

Corollario. *Se E è uno spazio topologico regolare avente un ricovrimento chiuso $(F_j)_{j\in J}$ di insiemi tali che ogni F_j sia un sottospazio di Lindelöf di E e se $(F_j)_{j\in J}$ ha un raffinamento aperto localmente numerabile, E è paracompatto.*

Dimostrazione. Invero, ogni sottospazio di uno spazio regolare è regolare e ogni spazio di LINDELÖF regolare è paracompatto. Pertanto E è somma diretta topologica di spazi paracompatti e, quindi, è paracompatto.

Osservazione 4. Il Lettore non mancherà di osservare che gli enunciati della Proposizione 3 e del Corollario precedente non sono in disaccordo con quanto esposto nella Introduzione, in quanto, considerata la famiglia $(U_j)_{j\in J}$ ivi prevista, basta assumere $F_j = \overline{U}_j$ per ogni $j \in J$.

Bibliografia.

[1] G. Aquaro: *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **47** (1959), 319-390.

[2] N. Bourbaki: *Théorie des Ensembles* (*Fasc. des Resultats*), Livre I (4.me éd.), Hermann, Paris 1958.

[3] N. Bourbaki: *Topologie Générale* (Chap. 1 et 2), Livre III (4.me éd.), Hermann, Paris 1966.

[4] N. Bourbaki: *Intégration* (Chap. 5), Livre VI, Hermann, Paris 1967.

[5] K. Morita: *Star-finite coverings and the star-finite property*, Math. Japon. (Kobe) **1** (1948) (n. 2 di agosto).

Summary.

If $(U_j)_{j\in J}$ *is an open covering of a topological space* E *such that every* $\overline{U}_j$ *is a Lindelöf space and if morever the cover* $(U_j)_{j\in J}$ *possesses a locally countable refinement, then* E *is the union of a family of two by two disjoint open sets each one, as a subspace, being Lindelöf.*

* * *