Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 281-301

GIACOMINO BATTIONI (*)

Saggio di risoluzione di un problema a derivate parziali col metodo delle differenze finite. (**)

§ 1. - Introduzione.

1.1. – Per la risoluzione di problemi a derivate parziali si è iniziato ad usare, da non molto tempo, il cosiddetto « metodo delle differenze finite » (v. i « Riferimenti »). Nel presente lavoro intendo dare un saggio di tale metodo risolutivo, applicandolo nella forma che mi sembra più semplice.

Il metodo delle differenze finite consiste, sostanzialmente, nel trasformare il dato problema (a derivate parziali) in un nuovo problema, del tipo « a differenze finite », sostituendo le derivate con dei rapporti incrementali secondo certi « schemi ». Se il dato problema è di natura conveniente e se lo schema usato è ben scelto, il nuovo problema risulta più facilmente risolubile, e la sua soluzione tende a quella funzione che è proprio la soluzione unica del problema dato (in tal guisa, per questa soluzione risultano provati i teoremi di esistenza, di unicità e di approssimazione).

Il procedimento risolutivo descritto, quando sia condotto con tutto rigore, ha purtroppo l'inconveniente di essere alquanto laborioso. Questo inconveniente, però, mi sembra assai compensato dai due fatti seguenti: il procedimento è elementare nelle sue linee generali, inoltre è costruttivo per la cercata soluzione.

1.2. – Fissate cinque costanti reali a, b, c, α, β, con $a < b$, $c > 0$, $\alpha < \beta$,

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1967-68. — Ricevuto: 22-VI-1968.

nello spazio cartesiano (x, t, u) considero i campi seguenti (v. Figura 1):

l'intervallo (chiuso) $(a \dots b) = \{a \leqslant x \leqslant b\}$,

il rettangolo » $\mathscr{R} = ABCD = \{a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant t \leqslant c\}$,

il parallelepipedo » $\mathscr{P} = \{a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant t \leqslant c, \ \alpha \leqslant u \leqslant \beta\}$.

Ciò premesso, mi propongo il seguente

Problema a derivate parziali (del primo ordine e quasilineare):

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} u^{(0,1)}(x, t) = \lambda(x, t)\, u^{(1,0)}(x, t) + f(x, t, u(x, t)), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \qquad x \in (a \dots b), \end{cases}$$

dove:

$u(x, t)$ *è una funzione incognita, e si è posto brevemente*

$$u^{(1,0)}(x, t) = \frac{\partial\, u(x, t)}{\partial x}, \qquad u^{(0,1)}(x, t) = \frac{\partial\, u(x, t)}{\partial t};$$

inoltre

$$\varphi(x), \ x \in (a \dots b), \qquad \lambda(x, t), \ (x, t) \in \mathscr{R}, \qquad f(x, t, u), \ (x, t, u) \in \mathscr{P}$$

sono date funzioni reali (univoche), continue, aventi equiliminati i rapporti incrementali primi e secondi rispetto ad x *e ad* u, *ed è*

$$\text{(2)} \qquad \alpha < \varphi(x) < \beta .$$

Da questo Problema (1) conviene staccare i *due problemi particolari* ottenuti supponendo, ulteriormente,

$$\lambda(x, t) \geqslant 0, \qquad \text{oppure} \qquad \lambda(x, t) \leqslant 0 .$$

Tali problemi particolari si chiameranno nel seguito, rispettivamente, il *Problema* (1^+) e il *Problema* (1^-).

1.3. – Pongo ora

$$m_\varphi = \min_{x \in (a \dots b)} \varphi(x), \qquad M_\varphi = \max_{x \in (a \dots b)} \varphi(x),$$

$$\Lambda = \max_{(x, t) \in \mathscr{R}} |\lambda(x, t)|, \qquad F = \max_{(x, t, u) \in \mathscr{P}} |f(x, t, u)|,$$

e sia $c' > 0$ il numero cosí definito [cfr. la (2)]:

$$c' = \min\left[c,\ (b-a)/A,\ (m_\varphi - \alpha)/F,\ (\beta - M_\varphi)/F\right] \quad (^1). \tag{3}$$

Considero poi, in corrispondenza a c', i punti C', D', E' (v. Figura 1).

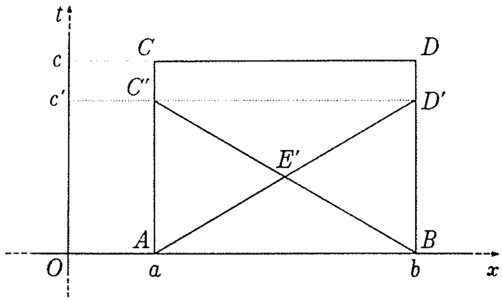

Figura 1.

Ciò premesso, valgono i seguenti teoremi:

T e o r e m a I. *Il Problema* (1^+) [*con* $\lambda(x, t) \geqslant 0$] *ha una ed una sola soluzione* $u(x, t)$ (*continua, con derivate continue*) *nel triangolo* ABC' (²).

T e o r e m a II. *Il Problema* (1^-) [*con* $\lambda(x, t) \leqslant 0$] *ha una ed una sola soluzione* $u(x, t)$ (*continua, con derivate continue*) *nel triangolo* ABD' (³).

T e o r e m a III. *Il Problema* (1) *ha una ed una sola soluzione* $u(x, t)$ (*continua, con derivate continue*) *nel triangolo* ABE' (⁴).

Nel § **2** eseguo la dimostrazione del Teorema I, nei §§ **3**, **4** accenno alle analoghe dimostrazioni dei Teoremi II e III. Infine, nel § **5** indico una generalizzazione.

(¹) Quando uno dei numeri A, F è nullo, nella (3) la frazione o le frazioni corrispondenti si intendono uguali a $+\infty$.

(²) Precisamente, la derivabilità di $u(x, t)$ si ha solo in $ABC' - BC'$ (cioè in ABC' privato del lato BC'). Naturalmente, le derivate parziali $u^{(1,0)}(x, t)$ e $u^{(0,1)}(x, t)$ nei punti di $AC' - C'$ e di $AB - B$, rispettivamente, sono solo derivate destre.

(³) Precisamente, la derivabilità di $u(x, t)$ si ha solo in $ABD' - AD'$.

(⁴) Precisamente, la derivabilità di $u(x, t)$ si ha solo in $ABE' - (AE' + BE')$.

§ 2. - Dimostrazione del Teorema I.

2.1. - Alcune utili notazioni.

In corrispondenza ad ogni numero naturale n, pongo:

$$h_n = (b - a)/2^n, \qquad k_n = c'/2^n, \tag{4}$$

essendo c' dato dalla (3). Nel seguito tali numeri h_n e k_n saranno indicati brevemente con h e k.

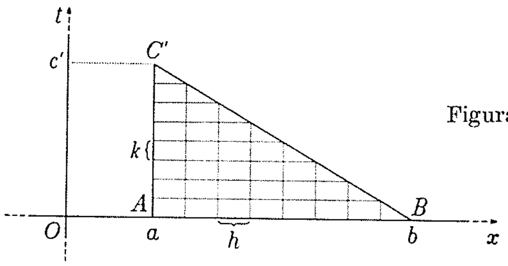

Figura 2 (caso $n = 3$).

Introduco poi i seguenti simboli (v. Figura 2):

1°) $(a \ldots b)_n =$ [insieme dei numeri $x = a + ph$ (con p intero $\geqslant 0$) appartenenti ad $(a \ldots b)$],

$\mathscr{T} = ABC'$,

$\mathscr{T}_n =$ [insieme dei punti $(x, t) = (a + ph, qk)$ (con p, q interi $\geqslant 0$) appartenenti a $\mathscr{T}$].

2°) Essendo δ un qualsiasi numero con $0 < \delta < b - a$, pongo:
$(a \ldots b - \delta)_n = (a \ldots b - \delta) \cap (a \ldots b)_n$,

$\mathscr{T}^{(\delta)} =$ [triangolo (chiuso) simile a $\mathscr{T}$, disposto come $\mathscr{T}$, avente il lato $(a \ldots b - \delta)$],

$\mathscr{T}_n^{(\delta)} = \mathscr{T}^{(\delta)} \cap \mathscr{T}_n$.

3°) Essendo $P \equiv (x, t)$ un punto qualsiasi di $\mathscr{T}$, pongo:
$P_n \equiv (x_n, t_n) =$ [punto (unico) di $\mathscr{T}_n$ piú prossimo a P e avente coordinate minori o uguali alle rispettive coordinate omonime di P] (5).

---

(5) La corrispondenza, così fissata, fra i punti di $\mathscr{T}$ e i punti di $\mathscr{T}_n$ è univoca da $\mathscr{T}$ a $\mathscr{T}_n$, manifestamente però non è tale la corrispondenza inversa.

4°) Essendo $g(x)$, $\gamma(x,\ t)$ due qualsiasi funzioni, pongo:

$$g^{[1]}(x) = \frac{g(x+h)-g(x)}{h}, \qquad x \in (a \dots b-h)_n,$$

$$\gamma^{[1,0]}(x,\ t) = \frac{\gamma(x+h,\ t)-\gamma(x,\ t)}{h}, \qquad \gamma^{[0,1]}(x,\ t) = \frac{\gamma(x,\ t+k)-\gamma(x,\ t)}{k}, \quad (x,\ t) \in \mathscr{T}_n^{(h)},$$

$$g^{[2]}(x) = [g^{[1]}(x)]^{[1]},$$

$$\gamma^{[2,0]}(x,\ t) = [\gamma^{[1,0]}(x,\ t)]^{[1,0]}, \qquad \gamma^{[1,1]}(x,\ t) = [\gamma^{[1,0]}(x,\ t)]^{[0,1]} = [\gamma^{[0,1]}(x,\ t)]^{[1,0]},$$

e così via [h e k sono sempre i numeri h_n e k_n definiti dalle (4)] (6).

2.2. - Linee generali della dimostrazione del Teorema I.

Dato che la dimostrazione (complessivamente alquanto lunga) si riduce a provare varie successive affermazioni, credo opportuno elencare dapprima tali affermazioni, insieme alle relative considerazioni di collegamento.

Anzitutto passo dal Problema (1^+), a derivate parziali, al seguente

Problema a differenze finite [nella funzione incognita $u_n(x,\ t)$, $(x,\ t) \in \mathscr{T}_n$]:

$$(1_n^+) \qquad \begin{cases} u_n^{[0,1]}(x,\ t) = \lambda(x,\ t)\ u_n^{[1,0]}(x,\ t) + f(x,\ t,\ u_n(x,\ t)), & (x,\ t) \in \mathscr{T}_n^{(h)} \\ u_n(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (a \dots b)_n. \end{cases}$$

Affermazione I. *Il Problema* (1_n^+) *ha una ed una sola soluzione* (v. n. 2.3)

$$(5) \qquad u_n = u_n(x,\ t), \qquad (x,\ t) \in \mathscr{T}_n.$$

---

(6) Per chiarezza in ciò che segue, osservo che si ha:

$$[g_1(x)\ g_2(x)]^{[1]} = g_1(x)\ g_2^{[1]}(x) + g_1^{[1]}(x)\ g_2(x+h),$$

$$[\psi(x,\ v(x))]^{[1]} = \psi^{[1,0]}(x,\ v(x)) + \psi^{[0,1]}(x+h,\ v(x))\ v^{[1]}(x),$$

dove:

$$\psi^{[1,0]}(x,\ v) = [\psi(x+h,\ v) - \psi(x,\ v)]/h,$$

$$\psi^{[0,1]}(x,\ v) = [\psi(x,\ v+l) - \psi(x,\ v)]/l, \qquad l = v(x+h) - v(x)$$

[per $l = 0$ si porrà $\psi^{[0,1]}(x,\ v) = 1$].

Affermazione II. *Le funzioni [formate con la (5)]*

(6) $$u_n^{[1,0]} = u_n^{[1,0]}(x,\ t), \qquad u_n^{[0,1]} = u_n^{[0,1]}(x,\ t), \qquad (x,\ t) \in \mathscr{T}_n^{(h)},$$

(7) $$u_n^{[2,0]} = u_n^{[2,0]}(x,\ t), \qquad u_n^{[1,1]} = u_n^{[1,1]}(x,\ t), \qquad (x,\ t) \in \mathscr{T}_n^{(2h)},$$

per $n = 1,\ 2, \ldots,$ *sono equilimitate* (v. n. **2.4**).

Affermazione III. *Le funzioni* (5), (6), *per* $n = 1,\ 2, \ldots,$ *sono equicontinue* (v. n. **2.5**).

Prolungo ora le funzioni (5), (6) ponendo [si tenga presente la corrispondenza fissata al n. **2.1**, 3°)]

$$u_n(P) = u_n(P_n)\,, \qquad P \in \mathscr{T},$$

$$u_n^{[1,0]}(P) = u_n^{[1,0]}(P_n)\,, \qquad u_n^{[0,1]}(P) = u_n^{[0,1]}(P_n)\,, \qquad P \in \mathscr{T} - BC'.$$

Si ottengono così delle « funzioni a scalini ».

Affermazione IV. *Le funzioni*

(8) $$u_n = u_n(x,\ t), \qquad (x,\ t) \in \mathscr{T},$$

per $n = 1,\ 2, \ldots,$ *tendono uniformemente ad una determinata funzione*

(9) $$u_{+\infty} = u_{+\infty}(x,\ t), \quad (x,\ t) \in \mathscr{T},$$

e questa funzione è continua (v. n. **2.6.1**). *Parimenti, le funzioni*

(10) $$u_n^{[1,0]} = u_n^{[1,0]}(x,\ t)\,, \qquad u_n^{[0,1]} = u_n^{[0,1]}(x,\ t)\,, \qquad (x,\ t) \in \mathscr{T} - BC',$$

per $n = 1,\ 2, \ldots,$ *tendono rispettivamente alle derivate parziali (prime) della* (9), *cioè a*

(11) $$u_{+\infty}^{(1,0)} = u_{+\infty}^{(1,0)}(x,\ t)\,, \qquad u_{+\infty}^{(0,1)} = u_{+\infty}^{(0,1)}(x,\ t)\,, \qquad (x,\ t) \in \mathscr{T} - BC',$$

e queste derivate sono continue (v. nn. **2.6.2**, **2.6.3**).

Affermazione V. *La funzione* (9) *è soluzione del Problema* (1^+), *ed è l'unica soluzione (nell'insieme delle funzioni continue in* $\mathscr{T}$ *con derivate continue in* $\mathscr{T} - BC'$) *di tale problema* (v. n. **2.7**).

Nel seguito di questo § mi occuperò soltanto delle dimostrazioni di queste cinque affermazioni, e dopo ciò il Teorema I sarà quindi dimostrato.

2.3. - Dimostrazione dell'Affermazione I.

Nella $(1_n^+)_1$ (7) sostituisco ai simboli dei rapporti incrementali le loro espressioni, e risolvo l'uguaglianza, così ottenuta, rispetto a $u_n(x,\ t+k)$:

$$u_n(x,\ t+k) = [1 - (k/h)\ \lambda(x,\ t)]\ u_n(x,\ t) + \tag{12}$$

$$+ (k/h)\ \lambda(x,\ t)\ u_n(x+h,\ t) + k\ f(x,\ t,\ u_n(x,\ t))\ , \qquad (x,\ t) \in \mathscr{T}_n^{(h)}\ .$$

Conviene allora riguardare la funzione incognita u_n spezzata nelle $2^n + 1$ parti seguenti:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_n(x,\ 0)\ , & x \in (a \dots b)_n \\ u_n(x,\ k)\ , & x \in (a \dots b-h)_n \\ u_n(x,\ 2k)\ , & x \in (a \dots b-2h)_n \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n(x,\ 2^n\ k)\ , & x = a\ . \end{array}\right. \tag{13}$$

In virtù della (12), le funzioni (13) si determinano successivamente (per via ricorrente) a partire dalla $(13)_1$, nota per la $(1_n^+)_2$. Invero:

La (12) per $t = 0$ si scrive:

$$u_n(x,\ k) = [1 - (k/h)\ \lambda(x,\ 0)]\ u_n(x,\ 0) + \tag{12_1}$$

$$+ (k/h)\ \lambda(x,\ 0)\ u_n(x+h,\ 0) + k\ f(x,\ 0,\ u_n(x,\ 0)), \qquad x \in (a \dots b-h)_n,$$

dove il secondo membro risulta noto, perchè i primi due termini sono noti per ciò che precede e il terzo è pure noto in quanto la f è calcolata in un punto di $\mathscr{P}$ [essendo, per la (2), $\alpha < u_n(x,\ 0) < \beta$]. Risulta quindi noto anche il primo membro, cioè la funzione $(13)_2$.

(7) Tale simbolo $(1_n^+)_1$ indica, qui e nel seguito, la prima uguaglianza del sistema (1_n^+), analogamente $(1_n^+)_2$ indica la seconda uguaglianza del sistema (1_n^+), e parallela interpretazione per altri simboli dello stesso tipo.

La (12) per $t = k$ si scrive:

$$(12_2) \qquad u_n(x,\ 2k) = [1 - (k/h)\ \lambda(x,\ k)]\ u_n(x,\ k) +$$
$$+ (k/h)\ \lambda(x,\ k)\ u_n(x + h,\ k) + k\ f(x,\ k,\ u_n(x,\ k))\,, \qquad x \in (a \dots b - 2h)_n\,,$$

dove il secondo membro risulta noto, perchè i primi due termini sono noti per ciò che precede e il terzo è pure noto in quanto la f è calcolata in un punto di $\mathscr{P}$ [infatti, tenuto presente che è

$$(14) \qquad \lambda(x,\ t) \geqslant 0, \qquad 1 - (k/h)\ \lambda(x,\ t) \geqslant 0 \ \ (^8)\,,$$

usando le disuguaglianze $m_\varphi \leqslant u_n(x,\ 0) \leqslant M_\varphi$, $-F \leqslant f(x,\ t,\ u) \leqslant F$, dalla (12_1) si ha $m_\varphi - kF \leqslant u_n(x,\ k) \leqslant M_\varphi + kF$, e quindi anche $m_\varphi - c'F < u_n(x,\ k) < < M_\varphi + c'F$, da cui, essendo per la (3) $\alpha \leqslant m_\varphi - c'F$, $M_\varphi + c'F \leqslant \beta$, segue infine $\alpha < u_n(x,\ k) < \beta$]. Risulta quindi noto anche il primo membro, cioè la funzione $(13)_3$.

E così via. Resta quindi concluso quanto dovevasi provare.

2.4. - Dimostrazione dell'Affermazione II.

2.4.1. – *Le funzioni* $(6)_1$, *per* $n = 1,\ 2, \dots,$ *sono equilimitate.*

In ciascuna delle due uguaglianze di (1_n^+) passo, in ambo i membri, ai rapporti incrementali (primi) rispetto ad x con l'incremento h. Si ha allora [cfr. annotazione (6)]:

$$(15) \quad \begin{cases} u_n^{[1,1]}(x,\ t) = \lambda(x,\ t)\ u_n^{[2,0]}(x,\ t) + f^{[0,0,1]}(x + h,\ t,\ u_n(x,\ t))\ u_n^{[1,0]}(x,\ t) + \\ \qquad + \lambda^{[1,0]}(x,\ t)\ u_n^{[1,0]}(x + h,\ t) + f^{[1,0,0]}(x,\ t,\ u_n(x,\ t))\,, \\ \hfill (x,\ t) \in \mathscr{T}_n^{(2h)} \\ u_n^{[1,0]}(x,\ 0) = \varphi^{[1]}(x)\,, \hfill x \in (a \dots b - h)_n\,, \end{cases}$$

dove:

$$f^{[1,0,0]}(x,\ t,\ u) = [f(x + h,\ t,\ u) - f(x,\ t,\ u)]/h\,,$$

$$f^{[0,0,1]}(x,\ t,\ u) = [f(x,\ t,\ u + l) - f(x,\ t,\ u)]/l\,, \qquad l = u_n(x + h,\ t) - u_n(x,\ t)\,.$$

(8) La $(14)_2$ si motiva a partire dalla (3) nel modo seguente: $c' \leqslant (b - a)/\Lambda$, $\Lambda \leqslant (b - a)/c'$, $\lambda(x,\ t) \leqslant h/k$, $(k/h)\ \lambda(x,\ t) \leqslant 1$.

Nella $(15)_1$ sostituisco ai simboli dei rapporti incrementali secondi le loro espressioni mediante la $u_n^{[1,0]}$ e risolvo l'uguaglianza rispetto a $u_n^{[1,0]}(x, t+k)$:

$$u_n^{[1,0]}(x, t+k) = [1-(k/h)\,\lambda(x, t) + k\, f^{[0,0,1]}(x+h, t, u_n(x, t))]\, u_n^{[1,0]}(x, t) +$$

$$+ [(k/h)\,\lambda(x, t) + k\,\lambda^{[1,0]}(x, t)]\, u_n^{[1,0]}(x+h, t) + k\, f^{[1,0,0]}(x, t, u_n(x, t)).$$

Prendendo il valore assoluto in ambo i membri di questa uguaglianza e della $(15)_2$, si può scrivere:

$$(16)\qquad |\, u_n^{[1,0]}(x, t+k)\,| \leqslant [1-(k/h)\,\lambda(x, t) + k\, L_4]\, |\, u_n^{[1,0]}(x, t)\,| +$$

$$+ [(k/h)\,\lambda(x, t) + k\, L_2]\, |\, u_n^{[1,0]}(x+h, t)\,| + k\, L_3\,, \qquad (x, t) \in \mathscr{T}_n^{(2h)}\,,$$

$$(17)\qquad |\, u_n^{[1,0]}(x, 0)\,| \leqslant L_1\,, \qquad x \in (a \ldots b-h)_n\,,$$

ciò che si ottiene tenendo presente le (14) e che, per ipotesi, esistono quattro costanti L_1, L_2, L_3, L_4 tali che

$$|\, \varphi^{[1]}(x)\,| \leqslant L_1\,, \qquad |\, \lambda^{[1,0]}(x, t)\,| \leqslant L_2\,,$$

$$(18)\qquad |\, f^{[1,0,0]}(x, t, u)\,| \leqslant L_3\,, \qquad |\, f^{[0,0,1]}(x, t, u)\,| \leqslant L_4\ (\geqslant 1).$$

La (16) per $t=0$ dà, tenendo conto della (17) e ponendo $L_2 + L_4 = L\ (\geqslant 1)$,

$$(19_1)\qquad |\, u_n^{[1,0]}(x, k)\,| \leqslant L_1\cdot(1+k\,L) + k\,L_3\,, \qquad x \in (a \ldots b-2h)_n\,.$$

La (16) per $t=k$ dà, tenendo conto della (19_1),

$$(19_2)\qquad |\, u_n^{[1,0]}(x, 2k)\,| \leqslant L_1\cdot(1+k\,L)^2 + k\,L_3\cdot[1+(1+k\,L)]\,, \quad x \in (a \ldots b-3h)_n.$$

Così proseguendo, si trova in generale

$$(19_q)\qquad |\, u_n^{[1,0]}(x, qk)\,| \leqslant L_1\cdot(1+kL)^q + kL_3\cdot[1+(1+kL)+\ldots+(1+kL)^{q-1}],$$

$$x \in \big(a \ldots b-(q+1)h\big)_n\,,$$

cioè

$$|\, u_n^{[1,0]}(x, qk)\,| \leqslant L_1\cdot(1+kL)^q + L_3\cdot[(1+kL)^q - 1]/L\,.$$

Osservando che è qui $(1+kL)^q \leqslant e^{qkL} < e^{c'L}$, si conclude

$$|u_n^{[1,0]}(x,\ t)| < L_1\, e^{c'L} + L_3\cdot(e^{c'L}-1)/L \qquad [(x,\ t)\in \mathscr{T}_n^{(h)};\quad n=1,\ 2,\ldots],$$

che esprime proprio l'affermazione da dimostrare.

2.4.2. - *Le funzioni* $(6)_2$, *per* $n=1,\ 2,\ldots$, *sono equilimitate.*

Segue subito dalla $(1_n^+)_1$ per le ipotesi e per quanto provato al n. 2.4.1.

2.4.3. - *Le funzioni* $(7)_1$, *per* $n=1,\ 2,\ldots$, *sono equilimitate.*

In ciascuna delle due uguaglianze di (1_n^+) passo, in ambo i membri, ai rapporti incrementali secondi rispetto ad x con l'incremento h. Si ha allora, analogamente a quanto fatto al n. 2.4.1,

$$(20)\quad \begin{cases} u_n^{[2,1]}(x,\ t) = \lambda(x,\ t)\, u_n^{[3,0]}(x,\ t) + f^{[0,0,1]}(x+2h,\ t,\ u_n(x+h,\ t))\ u_n^{[2,0]}(x,\ t) \\ \qquad + 2\lambda^{[1,0]}(x,\ t)\, u_n^{[2,0]}(x+h,\ t) + \{\lambda^{[2,0]}(x,\ t)\, u_n^{[1,0]}(x+2h,\ t) + \\ \qquad + f^{[2,0,0]}(x,\ t,\ u_n(x,\ t)) + 2\, f^{[1,0,1]}(x+h,\ t,\ u_n(x,\ t))\ u_n^{[1,0]}(x,\ t) + \\ \qquad + \frac{1}{4} f^{[0,0,2'']}(x+2h,\ t,\ u_n(x,\ t))\,[u_n^{[1,0]}(x,\ t) + u_n^{[1,0]}(x+h,\ t)]^2\}, \\ \qquad\qquad (x,\ t)\in \mathscr{T}_n^{(3h)} \\ u_n^{[2,0]}(x,\ 0) = \varphi^{[2]}(x), \qquad x\in(a\ldots b-2h)_n, \end{cases}$$

dove:

$f^{[2,0,0]}(x,\ t,\ u)$ e $f^{[1,0,1]}(x,\ t,\ u)$ hanno un significato conforme al n. 2.4.1,

$$f^{[0,0,1']}(x,\ t,\ u) = [f(x,\ t,\ u+l') - f(x,\ t,\ u)]/l',$$

$$l' = \tfrac{1}{2}[u_n(x+2h,\ t) - 2\, u_n(x+h,\ t) + u_n(x,\ t)];$$

$$f^{[0,0,2'']}(x,\ t,\ u) = [f(x,\ t,\ u+2l'') - 2\, f(x,\ t,\ u+l'') + f(x,\ t,\ u)]/l''^2,$$

$$l'' = \tfrac{1}{2}[u_n(x+2h,\ t) - u_n(x,\ t)].$$

Il sistema (20) è, rispetto alla funzione $u_n^{[2,0]}$, dello stesso tipo del sistema (15) rispetto alla funzione $u_n^{[1,0]}$. Pertanto, ragionando come al n. 2.4.1, tenendo presente le ipotesi e quanto provato finora, si conclude proprio con l'affermazione da dimostrare.

2.4.4. – *Le funzioni* $(7)_2$, *per* $n = 1, 2, \ldots$, *sono equilimitate.*

Segue subito dalla $(15)_1$ per le ipotesi e per quanto provato finora.

2.5. - Dimostrazione dell'Affermazione III.

2.5.1. – *Le funzioni* (5), *per* $n = 1, 2, \ldots$, *sono equicontinue.*

Devo dimostrare che: preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste un determinato $\varrho_\varepsilon > 0$ tale che

$$(21) \qquad | u_n(P') - u_n(P) | < \varepsilon \qquad [P,\ P' \in \mathscr{T}_n; \quad n = 1, 2, \ldots; \quad \overline{PP'} < \varrho_\varepsilon] \ (^9) .$$

A tale scopo, ragiono come si fa per dimostrare il ben noto criterio di ARZELÀ per la equicontinuità.

Essendo $P \equiv (x, t)$, $P' \equiv (x', t') \in \mathscr{T}_n$, almeno uno dei punti (x', t), (x, t') appartiene certamente a $\mathscr{T}_n$: sia, ad esempio, $(x', t) \in \mathscr{T}_n$. Si può scrivere allora:

$$(22) \qquad u_n(P') - u_n(P) = [u_n(x', t) - u_n(x, t)] + [u_n(x', t') - u_n(x', t)] .$$

Dico che esiste una costante $\Omega > 0$ tale che

$$(23) \quad | u_n(x', t) - u_n(x, t) | \leqslant \Omega \, | x' - x |, \qquad | u_n(x', t') - u_n(x', t) | \leqslant \Omega \, | t' - t |,$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Infatti, la $(23)_1$ vale certamente per $x' = x$; se è invece $x' \neq x$, sia $x' > x$, essendo $x' - x = rh$ (con r intero positivo conveniente), si ha (come si verifica facilmente)

$$(24) \qquad u_n(x', t) - u_n(x, t) = h \sum_{0}^{r-1}{}_s \, u_n^{[1,0]}(x + sh, t) ;$$

ma, tenendo presente le equilimitazioni dimostrate precedentemente, esiste

(9) Per intendere giustamente questa affermazione conviene notare subito che possono *non* esistere coppie di punti P, $P' \in \mathscr{T}_n$ con $\overline{PP'} < \varrho_\varepsilon$ per un certo numero finito di valori iniziali di n. In tal caso bisogna intendere che la (21) è verificata.

un $\Omega > 0$ tale che sia

$$| u_n^{[1,0]} | \leqslant \Omega \qquad (n = 1, 2, ...),$$

onde dalla (24) discende la $(23)_1$. Analogamente si prova la $(23)_2$.
Segue così, dalla (22),

$$| u_n(P') - u_n(P) | \leqslant \Omega \cdot [| x' - x | + | t' - t |] . \tag{25}$$

Se ora esistono [cfr. l'annotazione (9)] coppie di punti P, $P' \in \mathscr{T}_n$ con $\overline{PP'} < \varepsilon/(2\Omega)$, e quindi anche

$$| x' - x | < \varepsilon/(2\Omega), \qquad | t' - t | < \varepsilon/(2\Omega), \tag{26}$$

la (25), applicando le (26), dà proprio la (21), ed è $\varrho_\varepsilon = \varepsilon/(2\Omega)$.

2.5.2. – *Le funzioni* $(6)_1$, *per* $n = 1, 2, ...,$ *sono equicontinue.*

Si prova analogamente al n. precedente.

2.5.3. – *Le funzioni* $(6)_2$, *per* $n = 1, 2, ...,$ *sono equicontinue.*

Segue subito dalla $(1_n^+)_1$ per le ipotesi e per quanto provato finora.

2.5.4. – Per il seguito interessa considerare le seguenti funzioni della variabile $\varrho > 0$:

$$\varepsilon(\varrho) = \sup_{\substack{P,P' \in \mathscr{T}_n;\ \overline{PP'} < \varrho \\ n=1,2,...}} | u_n(P') - u_n(P) |, \tag{27}$$

$$\eta(\varrho) = \sup_{\substack{P,P' \in \mathscr{T}_n^{(h)};\ \overline{PP'} < \varrho \\ n=1,2,...}} [| u_n^{[1,0]}(P') - u_n^{[1,0]}(P) |, \ | u_n^{[0,1]}(P') - u_n^{[0,1]}(P) |] , \tag{28}$$

per le quali si ha manifestamente

$$\lim_{\varrho \to +0} \varepsilon(\varrho) = \lim_{\varrho \to +0} \eta(\varrho) = 0 . \tag{29}$$

2.6. - Dimostrazione dell'Affermazione IV.

2.6.1. – *Le funzioni* (8), *per* $n = 1, 2, ...,$ *tendono uniformemente ad una determinata funzione* (9), *e questa funzione è continua.*

Dimostro dapprima che: preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n_\varepsilon > 0$ tale che

$$(30) \qquad | u_{n'}(P) - u_n(P) | < \varepsilon \qquad (P \in \mathscr{T}; \qquad n,\ n' < n_\varepsilon).$$

A tale scopo considero, oltre ad (1_n^+), anche il sistema analogo

$$(1)_n^+ \quad \begin{cases} u_{n'}^{[0,1]'}(x,\ t) = \lambda(x,\ t)\, u_{n'}^{[1,0]'}(x,\ t) + f\big(x,\ t,\ u_{n'}(x,\ t)\big)\,, & (x,\ t) \in \mathscr{T}_{n'}^{(h')} \\ u_{n'}(x,\ 0) = \varphi(x)\,, & x \in (a \dots b)_{n'}\,, \end{cases}$$

dove i rapporti incrementali sono fatti (naturalmente) con gli incrementi $h' = h_{n'}$, $k' = k_{n'}$ (come indicano gli apici).

Supposto $n' \geqslant n$, nella $(1_{n'}^+)_1$ (considerata in $\mathscr{T}_n^{(h)} \subseteq \mathscr{T}_{n'}^{(h')}$) conviene far figurare i rapporti incrementali $u_{n'}^{[1,0]}(x,\ t)$, $u_{n'}^{[0,1]}(x,\ t)$, fatti con gli incrementi $h = h_n$, $k = k_n$. Posto $n' - n = r$, onde $h = 2^r h'$, $k = 2^r k'$, si ha [cfr. la (24)]

$$u_{n'}^{[1,0]}(x,\ t) = \frac{1}{2^r} \sum_0^{2^r-1}{}_s\, u_{n'}^{[1,0]'}(x + sh',\ t)\,, \qquad u_{n'}^{[0,1]}(x,\ t) = \frac{1}{2^r} \sum_0^{2^r-1}{}_s\, u_{n'}^{[0,1]}(x,\ t + sk')\,,$$

da cui

$$u_{n'}^{[1,0]'}(x,\ t) = u_{n'}^{[1,0]}(x,\ t) + \frac{1}{2^r} \sum_0^{2^r-1}{}_s \left[u_{n'}^{[1,0]'}(x,\ t) - u_{n'}^{[1,0]'}(x + sh',\ t)\right],$$

$$u_{n'}^{[0,1]'}(x,\ t) = u_{n'}^{[0,1]}(x,\ t) + \frac{1}{2^r} \sum_0^{2^r-1}{}_s \left[u_{n'}^{[0,1]'}(x,\ t) - u_{n'}^{[0,1]'}(x,\ t + sk')\right],$$

e la $(1_{n'}^+)_1$ diventa:

$$\begin{aligned} u_{n'}^{[0,1]}(x,\ t) &= \lambda(x,\ t)\, u_{n'}^{[1,0]}(x,\ t) + f\big(x,\ t,\ u_{n'}(x,\ t)\big) + \\ &\quad + \frac{1}{2^r} \sum_0^{2^r-1}{}_s \Big\{\lambda(x,\ t) \left[u_{n'}^{[1,0]'}(x,\ t) - u_{n'}^{[1,0]'}(x + sh',\ t)\right] - \\ &\quad - \left[u_{n'}^{[0,1]'}(x,\ t) - u_{n'}^{[0,1]'}(x,\ t + sk')\right]\Big\}, \qquad (x,\ t) \in \mathscr{T}_n^{(h)}. \end{aligned}$$

Sostituisco qui ai simboli $u_{n'}^{[1,0]}(x,\ t)$, $u_{n'}^{[0,1]}(x, t)$ le loro espressioni, e risolvo la uguaglianza rispetto a $u_{n'}(x,\ t + k)$. Sottraendo dalla uguaglianza così ottenuta la (12), si ha:

$$u_{n'}(x,\ t+k)-u_n(x,\ t+k)=$$

$$=[1-(k/h)\lambda(x,\ t)][u_{n'}(x,\ t)-u_n(x,\ t)]+(k/h)\lambda(x,\ t)[u_{n'}(x+h,\ t)-u_n(x+h,t)]+$$

$$+k\,[f(x,\ t,\ u_{n'}(x,\ t))-f(x,\ t,\ u_n(x,\ t))]+$$

$$+\frac{k}{2^r}\sum_0^{2^r-1}{}_s\{\lambda(x,t)\,[u_{n'}^{[1,0]'}(x,\ t)-u_{n'}^{[1,0]'}(x+sh',t)]-[u_{n'}^{[0,1]'}(x,t)-u_{n'}^{[0,1]'}(x,\ t+sk')]\}.$$

In questa uguaglianza prendo il valore assoluto in ambo i membri: tenendo presente le (14), la $(18)_2$ scritta nella forma $|f(x,t,u')-f(x,t,u)|\leqslant L_4|u'-u|$, e infine la funzione (28) [osservando che è $sh'\leqslant(2^r-1)h'<h$, $sk'\leqslant(2^r-1)k'<k$] ottengo:

$$|u_{n'}(x,t+k)-u_n(x,t+k)|\leqslant[1-(k/h)\lambda(x,t)+kL_4]\,|u_{n'}(x,t)-u_n(x,t)|+ \tag{31}$$

$$+(k/h)\lambda(x,\ t)\,|u_{n'}(x+h,\ t)-u_n(x+h,\ t)|+k\,[A\,\eta(h)+\eta(k)]\,,\quad (x,\ t)\in\mathscr{T}_n^{(h)}\,.$$

Si ha poi, manifestamente,

$$|u_{n'}(x,\ 0)-u_n(x,\ 0)|=0\,,\qquad x\in(a\ldots b)_n\,. \tag{32}$$

Ora, le (31), (32) sono, rispetto alla funzione $u_{n'}-u_n$, di tipo analogo alle (16), (17) rispetto alla funzione $u_n^{[1,0]}$. Pertanto, ragionando come al n. **2.4.1**, concludo:

$$|u_{n'}(P)-u_n(P)|\leqslant[A\,\eta(h)+\eta(k)](e^{c'L_4}-1)/L_4\,,\qquad P\in\mathscr{T}_n\,. \tag{33}$$

Dopo ciò, per ogni $P\in\mathscr{T}$ osservo che (cfr. n. **2.2**)

$$u_{n'}(P)-u_n(P)=$$

$$=u_{n'}(P_{n'})-u_n(P_n)=[u_{n'}(P_{n'})-u_{n'}(P_n)]+[u_{n'}(P_n)-u_n(P_n)]\,.$$

Nell'ultimo membro, tenendo presente la funzione (27) [osservando che è $\overline{P_nP_{n'}}<(h^2+k^2)^{1/2}$] e applicando la (33), si conclude infine

$$|u_{n'}(P)-u_n(P)|\leqslant\varepsilon((h^2+k^2)^{1/2})+[A\,\eta(h)+\eta(k)](e^{c'L_4}-1)/L_4\,,\quad P\in\mathscr{T}.$$

Poichè qui il secondo membro tende a 0 per $n\to+\infty$, la (30) è dimostrata.

La funzione (9) è poi uniformemente continua come segue facilmente osservando che per $P,\ Q \in \mathscr{T}$ si può scrivere

$$u_{+\infty}(P) - u_{+\infty}(Q) =$$

$$= [u_{+\infty}(P) - u_n(P)] + [u_n(P_n) - u_n(Q_n)] + [u_n(Q) - u_{+\infty}(Q)]\,,$$

e tenendo poi presente quanto sopra dimostrato. L'affermata continuità della (9) è quindi provata.

2.6.2. - *Le funzioni* $(10)_1$, *per* $n = 1, 2, \ldots$, *tendono alla derivata (prima) rispetto ad* x *della* (9), *cioè alla* $(11)_1$, *e questa derivata è continua.*

1) Dimostro dapprima che esiste finito

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{[1,0]}(P)\,, \qquad P \in \mathscr{T} - BC'\,. \tag{34}$$

A tale scopo, considerato oltre a $P \equiv (x, t)$ anche il punto $P' \equiv (x', t) \in \mathscr{T}$ con $x' > x$, pongo

$$R_{+\infty}(P,\ P') = \frac{u_{+\infty}(P') - u_{+\infty}(P)}{x' - x}\,, \qquad R_n(P,\ P') = \frac{u_n(P_n') - u_n(P_n)}{x_n' - x_n}$$

(con n abbastanza grande affinchè sia $x_n' > x_n$).

Essendo $x_n' - x_n = rh$ (con r intero positivo conveniente), si ha [cfr. la (24)]

$$R_n(P,\ P') = \frac{1}{r}\sum_0^{r-1}{}_s\, u_n^{[1,0]}(x_n + sh,\ t_n)\,,$$

da cui

$$u_n^{[1,0]}(P) - R_n(P,\ P') = \frac{1}{r}\sum_0^{r-1}{}_s\,[u_n^{[1,0]}(x_n\,,\ t_n) - u_n^{[1,0]}(x_n + sh,\ t_n)]\,.$$

Di qui, tenendo presente la funzione (28) [osservando che è $sh \leqslant (r-1)h = (x_n' - x_n) - h < x' - x$], segue

$$|\, u_n^{[1,0]}(P) - R_n(P,\ P')\,| \leqslant \eta(x' - x)\,, \tag{35}$$

ossia

$$R_n(P,\ P') - \eta(x' - x) \leqslant u_n^{[1,0]}(P) \leqslant R_n(P,\ P') + \eta(x' - x)\,.$$

Qui per $n \to +\infty$ i membri estremi hanno rispettivamente i limiti $R_{+\infty}(P, P') - \eta(x'-x)$ e $R_{+\infty}(P, P') + \eta(x'-x)$, che differiscono in valore assoluto per $2\,\eta(x'-x) \to 0$ quando $x' \to x+$. Resta quindi concluso che il limite (34) esiste finito.

2) Segue ora subito che è

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{[1,0]}(P) = u_{+\infty}^{(1,0)}(P), \qquad P \in \mathscr{T} - BC'. \tag{36}$$

Infatti, la (35) per $n \to +\infty$ dà:

$$\left| \lim_{n\to+\infty} u_n^{[1,0]}(P) - R_{+\infty}(P, P') \right| \leqslant \eta(x'-x), \tag{37}$$

da cui, per $x' \to x+$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{[1,0]}(P) = \lim_{x'\to x+} R_{+\infty}(P, P').$$

Con ragionamento analogo, se è $x' < x$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{[1,0]}(P) = \lim_{x'\to x-} R_{+\infty}(P, P').$$

Onde la (36).

3) Infine, nella (36) la tendenza al limite è u n i f o r m e rispetto a P in ogni campo $\mathscr{T}^{(\delta)}$ [cfr. n. **2.1**, 2°)]. Infatti, per $P \in \mathscr{T}^{(\delta)}$ si può scrivere

$$| u_n^{[1,0]}(P) - u_{+\infty}^{(1,0)}(P) | \leqslant$$

$$\leqslant | u_n^{[1,0]}(P) - R_n(P, P') | + | R_n(P, P') - R_{+\infty}(P, P') | + | R_{+\infty}(P, P') - u_{+\infty}^{(1,0)}(P) |.$$

Qui si osserva che, per quanto provato sopra: preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esistono un ϱ_ε, con $0 < \varrho_\varepsilon \leqslant \delta$, ed un intero $n_\varepsilon > 0$ tali che ciascuno dei tre termini del secondo membro sia minore di $\varepsilon/3$ per $x' - x = \varrho_\varepsilon$, $n > n_\varepsilon$.

La funzione $u_{+\infty}^{(1,0)}$ risulta così (ragionando come al n. **2.6.1**) continua in $\mathscr{T}^{(\delta)}$ (per l'arbitrarietà di δ la continuità si estende poi a tutto $\mathscr{T} - BC'$).

2.6.3. – *Le funzioni* $(10)_2$, *per* $n = 1, 2, \ldots$, *tendono alla derivata (prima) rispetto a* t *della* (9), *cioè alla* $(11)_2$, *e questa derivata è continua.*

Si prova analogamente al n. precedente.

2.7. - Dimostrazione dell'Affermazione V.

2.7.1. – *La funzione* (9) *è soluzione del Problema* (1^+).

Infatti, per ogni $P \in \mathscr{T} - BC'$ e ogni $x \in (a \dots b)$, dal sistema (1_n^+) segue, tenendo presente il n. 2.2,

$$\begin{cases} u_n^{[0,1]}(P_n) = \lambda(P_n)\, u_n^{[1,0]}(P_n) + f(P_n\,,\; u_n(P_n)) \\ u_n(x_n\,,\; 0) = \varphi(x_n)\,. \end{cases}$$

Facendo qui $n \to +\infty$, per quanto provato finora e per le ipotesi si ottiene

$$\begin{cases} u_{+\infty}^{(0,1)}(P) = \lambda(P)\, u_{+\infty}^{(1,0)}(P) + f(P,\; u_{+\infty}(P)) \\ u_{+\infty}(x,\; 0) = \varphi(x)\,, \end{cases}$$

cioè proprio l'affermazione da dimostrare.

2.7.2. – *La funzione* (9) *è l'unica soluzione (nell'insieme delle funzioni continue in* $\mathscr{T}$, *con derivate continue in* $\mathscr{T} - BC'$) *del Problema* (1^+).

Sia $u_* = u_*(P)$ una qualsiasi soluzione, del tipo detto, del Problema (1^+). Dico che è

$$u(P) = u_{+\infty}(P)\,, \qquad P \in \mathscr{T}\,. \tag{38}$$

Per semplicità di dimostrazione posso supporre che le derivate parziali $u_*^{(1,0)}$ e $u_*^{(0,1)}$ di u_* siano anche uniformemente continue ([10]). In analogia con le (27), (28) pongo:

$$\varepsilon_*(\varrho) = \sup_{P,P' \in \mathscr{T};\ \overline{PP'} < \varrho} |\, u_*(P') - u_*(P)\,|\,,$$

$$\eta_*(\varrho) = \sup_{P,P' \in \mathscr{T} - BC';\ \overline{PP'} < \varrho} [\,|\, u_*^{(1,0)}(P') - u_*^{(1,0)}(P)\,|,\ |\, u_*^{(0,1)}(P') - u_*^{(0,1)}(P)\,|\,]\,,$$

onde

$$\lim_{\varrho \to +0} \varepsilon_*(\varrho) = \lim_{\varrho \to +0} \eta_*(\varrho) = 0\,.$$

([10]) In caso contrario, invece di considerare il triangolo aperto $\mathscr{T} - BC'$, prenderei in considerazione un triangolo chiuso del tipo $\mathscr{T}^{(\delta)} \subset \mathscr{T} - BC'$, ecc..

Si avrà poi, per ipotesi,

$$(1_*^+)\quad \begin{cases} u_*^{(0,1)}(x,\ t) = \lambda(x,\ t)\, u_*^{(1,0)}(x,\ t) + f(x,\ t,\ u_*(x,\ t))\,, & (x,\ t) \in \mathscr{T} - BC' \\ u_*(x,\ 0) \;\; = \varphi(x)\,, & x \in (a \dots b). \end{cases}$$

Nella $(1_*^+)_1$ (considerata in $\mathscr{T}_n^{(h)} \subseteq \mathscr{T} - BC'$) conviene far figurare, al posto delle derivate, i rapporti incrementali $u_*^{[1,0]}(x,\ t)$, $u_*^{[0,1]}(x, t)$. Essendo, per il teorema del valor medio,

$$u_*^{[1,0]}(x,\ t) = u_*^{(1,0)}(\xi,\ t)\ \ (x < \xi < x+h), \qquad u_*^{[0,1]}(x,\ t) = u_*^{(0,1)}(x,\ \tau)\ \ (t < \tau < t + k),$$

si ha

$$u_*^{(1,0)}(x,\ t) = u_*^{[1,0]}(x,\ t) + [u_*^{(1,0)}(x,\ t) - u_*^{(1,0)}(\xi,\ t)]\,,$$

$$u_*^{(0,1)}(x,\ t) = u_*^{[0,1]}(x,\ t) + [u_*^{(0,1)}(x,\ t) - u_*^{(0,1)}(x,\ \tau)]\,,$$

e si procede poi in modo analogo al n. **2.6.1.** Si ottiene così:

$$|\, u_*(P) - u_n(P)\, | \leqslant \varepsilon_*((h^2 + k^2)^{1/2}) + [A\, \eta_*(h) + \eta_*(k)](e^{c' L_4} - 1)/L_4\,, \qquad P \in \mathscr{T}.$$

Poichè qui il secondo membro tende a 0 per $n \to +\infty$, la (38) è dimostrata.

§ 3. - Dimostrazione del Teorema II.

In relazione al triangolo ABD', si considera il *Problema a differenze finite*:

$$(1_n^-)\qquad \begin{cases} u_n^{[0,1]}(x,\ t) = \lambda(x,\ t) u_n^{[\bar{1},0]}(x,\ t) + f(x,\ t,\ u_n(x,\ t)) \\ u_n(x,\ 0) \;\; = \varphi(x)\,, \end{cases}$$

dove i simboli già usati hanno il solito significato, e inoltre (essendo sempre $h = h_n > 0$)

$$u_n^{[\bar{1},0]}(x,\ t) = \frac{u_n(x-h,\ t) - u_n(x,\ t)}{-h}\,.$$

Su (1_n^-) si procede poi in modo completamente analogo al § **2.**

§ 4. - Dimostrazione del Teorema III.

In relazione al triangolo ABE', si considera il *Problema a differenze finite*:

$$(1_n)\quad \begin{cases} u_n^{[0,1]}(x,\,t) = \lambda_-(x,\,t)\, u_n^{\overline{[1,0]}}(x,\,t) + \lambda_+(x,\,t)\, u_n^{[1,0]}(x,\,t) + f\big(x,\,t,\,u_n(x,\,t)\big) \\ u_n(x,\,0) \;\;= \varphi(x)\,, \end{cases}$$

dove i simboli già usati hanno il solito significato, e inoltre

$$\lambda_-(x,\,t) = \tfrac{1}{2}\,[\lambda(x,\,t) - |\,\lambda(x,\,t)\,|]\,, \qquad \lambda_+(x,\,t) = \tfrac{1}{2}\,[\lambda(x,\,t) + |\,\lambda(x,\,t)\,|]\,.$$

Su (1_n) si procede poi in modo analogo al § 2, osservando, in particolare, che:

1) In luogo del sistema (15) si ha il sistema

$$\begin{cases} u_n^{[1,1]}(x,\,t) \;= \lambda_-(x,\,t)\, u_n^{[2,0]}(x-h,\,t) + \lambda_+(x,\,t)\, u_n^{[2,0]}(x,\,t) + \\ \qquad + [\lambda_-^{[1,0]}(x,\,t) + f^{[0,0,1]}\big(x+h,\,t,\,u_n(x,\,t)\big)]\, u_n^{[1,0]}(x,\,t) + \\ \qquad + \lambda_+^{[1,0]}(x,\,t)\, u_n^{[1,0]}(x+h,\,t) + f^{[1,0,0]}\big(x,\,t,\,u_n(x,\,t)\big) \\ u_n^{[1,0]}(x,\,0) \;= \varphi^{[1]}(x)\,, \end{cases}$$

dove le funzioni $\lambda_-^{[1,0]}$, $\lambda_+^{[1,0]}$ sono limitate, perchè

$$|\,\lambda_-^{[1,0]}(x,\,t)\,| \leqslant |\,\lambda^{[1,0]}(x,\,t)\,|\,, \qquad |\,\lambda_+^{[1,0]}(x,\,t)\,| \leqslant |\,\lambda^{[1,0]}(x,\,t)\,|\,.$$

2) In luogo del sistema (20) si ha il sistema

$$\begin{cases} u_n^{[2,1]}(x,\,t) = \lambda_-(x,\,t)\, u_n^{[3,0]}(x-h,\,t) + \lambda_+(x,\,t)\, u_n^{[3,0]}(x,\,t) + \\ \quad + [2\,\lambda_-^{[1,0]}(x,\,t) + f^{[0,0,1']}\big(x+2h,\,t,\,u_n(x+h,\,t)\big)]\, u_n^{[2,0]}(x,\,t) + \\ \quad + [\lambda_+^{[1,0]}(x,\,t) + \lambda_+^{[1,0]}(x+h,\,t)]\, u_n^{[2,0]}(x+h,\,t) + \{\lambda^{[2,0]}(x,t)\, u_n^{[1,0]}(x+h,\,t) + \\ \quad + f^{[2,0,0]}\big(x,\,t,\,u_n(x,\,t)\big) + 2\, f^{[1,0,1]}\big(x+h,\,t,\,u_n(x,\,t)\big)\, u_n^{[1,0]}(x,\,t) + \\ \quad + \tfrac{1}{4}\, f^{[0,0,2'']}\big(x+2h,\,t,\,u_n(x,\,t)\big)\,[u_n^{[1,0]}(x,\,t) + u_n^{[1,0]}(x+h,\,t)]^2\} \\ u_n^{[2,0]}(x,\,0) = \varphi(x)\,. \end{cases}$$

§ 5. - Generalizzazione.

Le considerazioni precedenti si estendono, opportunamente, ai *Problemi a derivate parziali* della forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_r}{\partial t} = \sum_{1}^{\nu} {}_s\, \lambda_{rs}(x_1, \dots, x_\nu, t) \dfrac{\partial u_r}{\partial x_s} + f_r(x_1, \dots, x_\nu, t, u_1, \dots, u_N) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r = 1, 2, \dots, N), \\ u_r(x_1, \dots, x_\nu, 0) = \varphi_r(x_1, \dots, x_\nu) \end{cases}$$

dove le $u_r = u_r(x_1, \dots, x_\nu, t)$ $(r = 1, 2, \dots, N)$ sono funzioni incognite e le $\varphi_r(x_1, \dots, x_\nu)$, $\lambda_{rs}(x_1, \dots, x_\nu, t)$, $f_r(x_1, \dots, x_\nu, t, u_1, \dots, u_N)$, $(r = 1, 2, \dots, N;$ $s = 1, 2, \dots, \nu)$ sono date funzioni.

Riferimenti.

G. G. O'Brien, M. A. Hyman and S. Kaplan, *A study of the numerical solution of partial differential equations*, J. Math. Phys. **29** (1950), 223-251.

H. Beckert, *Über quasilineare hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Das Anfangswertproblem, die gemischte Anfangs-Randwertaufgabe, das charakteristische Problem.* Ber. Ver. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig 1950.

R. Courant, E. Isaacson and M. Rees, *On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences*, Comm. Pure Appl. Math. **5** (1952), 243-255.

O. A. Ladyženskaya, *On application of the method of finite differences to the solution of the Cauchy's problem for hyperbolic systems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) **88** (1953), 607-610 (in russo).

I. G. Petrovsky, *Lectures on Partial Differential Equations*, Interscience, New York 1954 (cf. § 10).

P. D. Lax and R. D. Richtmyer, *Survey of the stability of linear finite difference equations*, Comm. Pure Appl. Math. **9** (1956), 267-293.

H. O. Kreiss, *Über die Lösung des Cauchy problems für lineare partielle Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen.* Teil I, Acta Math. **101** (1959), 179-199.

V. S. Rjabenki and A. F. Filippow, *Über die Stabilität von Differenzengleichungen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

G. E. Forsythe and W. R. Wasow, *Finite-difference Methods for Partial Differential Equations*, J. Wiley, New York 1960 (cf. 1, sect.7).

P. D. LAX, *On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 497-520.

P. HENRICI, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, J. Wiley, New York 1962 (v. Chapt. 1).

O. A. LADYŽENSKAYA, *The method of finite differences in the theory of partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. (2) **20** (1962), 77-104.

W. TÖRNIG, *Über Differenzenverfahren in Rechteckgittern zur numerischen Lösung quasi-linearer hyperbolischer Differentialgleichungen*, Numer. Math. **5** (1963), 353-370.

G. STRANG, *Accurate partial difference methods*. I: *Linear Cauchy problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **12** (1963), 392-402; II: *Non-linear problems*, Numer. Math. **6** (1964), 37-46.

S. K. GODUNOV and V. S. RYABENKI, *Theory of Difference Schemes*, North-Holland, Amsterdam 1964 (cf. Chapt. III, § 6).

P. D. LAX and B. WENDROFF, *Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy*, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 381-398.

H. O. KREISS, *Difference approximations for hyperbolic differential equations* (*Numerical Solution of Partial Differential Equations*), Academic Press, New York 1966.

H. O. KREISS, *Difference approximations for the initial-boundary value problem for hyperbolic differential equations* (*Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations*), J. Wiley, New York 1966.

R. D. RICHTMYER and K. W. MORTON, *Difference Methods for Initial-value Problems*, Interscience, New York 1967.

Summary.

The author gives a sample of a solution of a partial differential problem by means of the finite differences method.

* * *