Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 275-280

ALDO BELLENI-MORANTE (*)

Un' osservazione sopra una classe di sollecitazioni G-autonome. (**)

§ 1.

Sia M un sistema di n punti materiali liberi (P_h, m_h) e siano $\boldsymbol{F}_h^{(i)}$ ed $\boldsymbol{F}_h^{(e)}$ rispettivamente le risultanti delle forze interne ed esterne agenti sul generico P_h.

L'equazione di moto di P_h, con riferimento ad una opportuna terna $T = T(O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$, ha la forma:

$$m_h\, \boldsymbol{a}_h = \boldsymbol{F}_h^{(i)} + \boldsymbol{F}_h^{(e)} \qquad (h = 1,\ 2,\ \dots,\ n), \tag{1}$$

ove $\boldsymbol{F}_h^{(e)}$ dipende in generale dal tempo t, dalla posizione e dalla velocità di P_h, ed $\boldsymbol{F}_h^{(i)}$ da t e dalle posizioni e dalle velocità di tutti i punti del sistema M.

Dalle equazioni (1), tenendo presente che per il terzo principio la risultante delle forze interne è nulla, segue, come è ben noto, la prima equazione cardinale della meccanica:

$$m\, \boldsymbol{a}_G = \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{F}_h^{(e)}, \tag{2}$$

ove $m = \sum_{h=1}^{n} m_h$ ed $\boldsymbol{a}_G$ è l'accelerazione del centro di massa G di M. La (2) mette in evidenza come, in generale, il moto di G dipenda, seppure indirettamente, dalla natura delle forze interne agenti sui punti P_h di M: infatti la risultante delle forze esterne, che compare al secondo membro della (2), è funzione di t, di P_h e di $\boldsymbol{V}_h = \mathrm{d}P_h/\mathrm{d}t$ $(h = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$, la posizione e l'atto di moto dei singoli punti di M dipendendo dalle forze interne a causa delle (1).

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « Ulisse Dini » (Viale Morgagni 67-A), Università, 50134 Firenze, Italia.

(**) Ricevuto: 4-X-1968.

In alcuni recenti lavori ([1], [2], [3]) sono state caratterizzate classi di sollecitazioni esterne $\boldsymbol{F}_h^{(e)}$ la cui risultante è funzione solo della posizione e della velocità di G, oltre che del tempo.

Tali sollecitazioni, in accordo con la definizione data in [2], si dicono G-autonome.

Se infatti le $\boldsymbol{F}_h^{(e)}$ sono G-autonome, la prima equazione cardinale (2) è autonoma, sufficiente cioè a determinare tutti i moti possibili di G, moti che risultano completamente indipendenti dalla natura delle forze interne agenti sui punti di M.

Osserviamo che nei lavori sopra citati si suppone sempre che le $\boldsymbol{F}_h^{(e)}$ siano derivabili parzialmente una o più volte rispetto ai loro argomenti; tuttavia il sistema (1), non appena si immaginino assegnate opportune condizioni iniziali, ammette una ed una sola soluzione in un certo intervallo di tempo $\Delta \equiv [0, \bar{t}]$, anche in ipotesi molto meno restrittive per le forze esterne, [7].

Sorge dunque il problema di caratterizzare classi di sollecitazioni G-autonome, lasciando cadere l'ipotesi della derivabilità delle $\boldsymbol{F}_h^{(e)}$.

In questo lavoro ci proponiamo di caratterizzare una classe molto generale di sollecitazioni G-autonome, sotto ipotesi estremamente poco restrittive per le $\boldsymbol{F}_h^{(e)}$. Ciò permetterà di includere nella nostra trattazione forze esterne quali quelle di tipo ritardato, [4], [5], quelle di tipo ereditario, [6], ecc., di includere cioè forze di grande importanza rispettivamente nella teoria dei controlli e nell'elasticità.

§ 2.

Posto:

$$\boldsymbol{q}_h = m_h (P_h - O), \quad \boldsymbol{Q}_h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{q}_h, \quad \boldsymbol{F}_h^{(e)} = \boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t), \quad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\boldsymbol{q} = \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{q}_h = m(G - O), \quad \boldsymbol{Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{q},$$

la (2) diviene:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{q} = \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t). \tag{3}$$

Nella (3) gli $\boldsymbol{A}_h$ sono operatori, in generale dipendenti esplicitamente dal tempo, che agiscono su elementi dello spazio C dei vettori continui per $t \in \Delta$, e che ammettiamo siano definiti per tutti i $\boldsymbol{q}_h$ appartenenti alla sfera $\sum' \subseteq C$, di raggio ϱ' e con il centro nell'origine di C, $\sum' \equiv \{\boldsymbol{x} \in C;\ \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \varrho'\}$, e per tutti i $\boldsymbol{Q}_h \in \sum'' \equiv \{\boldsymbol{x} \in C;\ \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \varrho''\}$. È utile qui osservare che gli operatori $\boldsymbol{A}_h$ possono involgere integrazioni rispetto al tempo, [6], ritardi, [4], [5], ecc..

Notiamo ora che la (3) è autonoma se $\sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}; t)$, ove $\boldsymbol{A}$ è un opportuno operatore, definito per $\boldsymbol{q} \in \sum_1' \equiv \{\boldsymbol{x} \in C;\ \|\boldsymbol{x}\| \leqslant n\varrho'\}$ e per $\boldsymbol{Q} \in \sum_1'' \equiv \{\boldsymbol{x} \in C;\ \|\boldsymbol{x}\| \leqslant n\varrho''\}$.

Viceversa, se la (3) è autonoma, sufficiente cioè a determinare tutti i moti possibili di G, qualunque sia la natura delle forze interne, allora il secondo membro della (3) deve dipendere dai singoli $\boldsymbol{q}_h$, $\boldsymbol{Q}_h$ soltanto tramite $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{Q}$ rispettivamente.

Infatti, se ammettiamo che $\boldsymbol{A}$ sia funzione, oltre che di $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{Q}$ e t, anche ed in modo esplicito dei singoli $\boldsymbol{q}_h$ e $\boldsymbol{Q}_h$, l'equazione (3) diviene:

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}; \boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t). \tag{3'}$$

Assegnati allora per $t = t_0 \in \Delta$ i valori dei $\boldsymbol{q}_h \in \sum'$ e dei $\boldsymbol{Q}_h \in \sum''$ e quindi di $\boldsymbol{q}$ e di $\boldsymbol{Q}$, e risolte le equazioni di moto dei singoli punti P_h, possiamo pensare di sostituire nel secondo membro della (3′) i $\boldsymbol{q}_h = \boldsymbol{q}_h(t)$ ed i $\boldsymbol{Q}_h = \boldsymbol{Q}_h(t)$ trovati, dipendenti evidentemente dalla forma delle forze interne agenti sui P_h. Di conseguenza, la dipendenza di $\boldsymbol{A}$ da t, tramite i $\boldsymbol{q}_h$ ed i $\boldsymbol{Q}_h$ risulta funzione delle forze interne e la stessa cosa può dirsi per la soluzione $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$ della (3′) a partire dalle prefissate condizioni per $t = t_0$.

Dunque: condizione necessaria e sufficiente affinchè le sollecitazioni esterne siano G-autonome è che esista un operatore $\boldsymbol{A}$, tale che:

$$\sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}; t), \tag{4}$$

per $t \in \Delta$, $\boldsymbol{q}_h \in \sum'$, $\boldsymbol{Q}_h \in \sum''$, $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Posto:

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_h(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t) = \boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t) - \boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_{h,0}, \boldsymbol{Q}_{h,0}; t) \\ \boldsymbol{K}_h(t) = \boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_{h,0}, \boldsymbol{Q}_{h,0}; t), \end{cases}$$

i $\boldsymbol{q}_{h,0} \in \sum'$ ed i $\boldsymbol{Q}_{h,0} \in \sum''$ essendo valori assegnati dei $\boldsymbol{q}_n$ e dei $\boldsymbol{Q}_h$, dei quali fra breve diremo, si ha:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t) = \boldsymbol{B}_h(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{Q}_h; t) + \boldsymbol{K}_h(t) \\ \boldsymbol{B}_h(\boldsymbol{q}_{h,0}, \boldsymbol{Q}_{h,0}; t) = 0 \end{cases} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Facendo uso delle (5), la (4) diviene:

$$\sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{B}_h(\boldsymbol{q}_h\,,\ \boldsymbol{Q}_h;\ t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q};\ t)\,, \tag{6}$$

ove si è posto:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q};\ t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q};\ t) - \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{K}_h(t)\,.$$

Indicati poi con $\boldsymbol{H}$ e con $\boldsymbol{H}_h$ gli operatori definiti dalle relazioni seguenti:

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0\,,\ \boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}_0;\ t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q};\ t) \\ \boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_{h,0}\,,\ \boldsymbol{Q}_h-\boldsymbol{Q}_{h,0};\ t) = \boldsymbol{B}_h(\boldsymbol{q}_h\,,\ \boldsymbol{Q}_h;\ t) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{cases} \tag{7}$$

ove $\boldsymbol{q}_0 = \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{q}_{h,0}\,,\ \boldsymbol{Q}_0 = \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{Q}_{h,0}\,,$ dalla (6) si ottiene:

$$\sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_{h,0}\,,\ \boldsymbol{Q}_h-\boldsymbol{Q}_{h,0};\ t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0\,,\ \boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}_0;\ t). \tag{8}$$

Se, fissato un $t_0 \in \Delta$ e del resto qualsiasi, assegnamo per $t = t_0$ i valori iniziali dei $\boldsymbol{q}_h$ e dei $\boldsymbol{Q}_h$ in modo che si abbia:

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_h(t_0) = \boldsymbol{q}_{h,0}\,, & \boldsymbol{Q}_h(t_0) = \boldsymbol{Q}_{h,0}\,, \\ \boldsymbol{q}_m(t_0) = \boldsymbol{q}_{m,0} + \overline{\boldsymbol{q}} \in \Sigma', & \boldsymbol{Q}_m(t_0) = \boldsymbol{Q}_{m,0} + \overline{\boldsymbol{Q}} \in \Sigma''\,, \end{cases} \quad \text{per } h \neq m,$$

la relazione (8), per $t = t_0$, diviene:

$$\boldsymbol{H}_m(\overline{\boldsymbol{q}},\ \overline{\boldsymbol{Q}};\ t_0) = \boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{q}},\ \overline{\boldsymbol{Q}};\ t_0) \qquad (t_0 \in \Delta), \tag{9}$$

dato che, per le seconde delle (7) e delle (5), si ha:

$$\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{q}_{h,0}-\boldsymbol{q}_{h,0}\,,\ \boldsymbol{Q}_{h,0}-\boldsymbol{Q}_{h,0};\ t) = \boldsymbol{B}_h(\boldsymbol{q}_{h,0}\,,\ \boldsymbol{Q}_{h,0};\ t) = 0\,.$$

Dalla (9) si conclude che tutti gli operatori $\boldsymbol{H}_m$ sono uguali ad $\boldsymbol{H}$ e, per le (7), $\boldsymbol{B}_h = \boldsymbol{B}$ ($h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$).

La (6) diviene pertanto:

$$\sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_h\,,\ \boldsymbol{Q}_h;\ t) = \boldsymbol{B}(\sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{q}_h\,,\ \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{Q}_h;\ t)\,, \tag{10}$$

e perciò $\boldsymbol{B}$ è un'operazione addittiva.

Dunque: condizione necessaria e sufficiente affinchè le sollecitazioni esterne siano G-autonome è che esse siano del tipo:

$$\boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_h\,,\ \boldsymbol{Q}_h;\ t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}_h\,,\ \boldsymbol{Q}_h;\ t) + \boldsymbol{K}_h(t) \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{11}$$

ove i $\boldsymbol{K}_h$ dipendono al più dal tempo e $\boldsymbol{B}$ è un'operazione additiva (non necessariamente omogenea).

Riportiamo alcuni esempi di sollecitazioni esterne del tipo (11), di uso frequente rispettivamente in meccanica, nella teoria dei controlli e nella teoria della elasticità:

$$\boldsymbol{A}_h = a\,\boldsymbol{Q}_h + b\,\boldsymbol{q}_h + \boldsymbol{K}_h = m_h\left[a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_h - O) + b\,(P_h - O)\right] + \boldsymbol{K}_h\,,$$

$$\boldsymbol{A}_h = b\,\boldsymbol{q}_h(t - t_1) = m_h\,b\,[P_h(t - t_1) - O] \qquad \text{(cfr. [4], [5])},$$

$$\boldsymbol{A}_h = \int_0^t g(t,\ t')\,\boldsymbol{q}_h(t')\,\mathrm{d}t' = m\int_0^t g(t,\ t')\,[P_h(t - t') - O]\,\mathrm{d}t' \qquad \text{(cfr. [6])},$$

ove $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $g = g(t,\ t')$ sono funzioni assegnate dei loro argomenti e t_1 è una costante.

Osserviamo che, negli esempi sopra riportati, gli $\boldsymbol{A}_h$ risultano, a meno di addendi dipendenti esclusivamente dal tempo, proporzionali alle masse m_h.

Se infatti ci limitiamo a considerare operatori $\boldsymbol{B}$ che siano omogenei, oltre che additivi, dalla (11) si ottiene:

$$\boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{q}_h\,,\ \boldsymbol{Q}_h;\ t) = \boldsymbol{B}_h(m_h\,\boldsymbol{r}_h,\ m_h\,\boldsymbol{R}_h;\ t) + \boldsymbol{K}_h(t) = m_h\,B(\boldsymbol{r}_h\,,\ \boldsymbol{R}_h;\ t) + \boldsymbol{K}_h(t)\,,$$

ove $\boldsymbol{r}_h = P_h - O$, $\boldsymbol{R}_h = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_h/\mathrm{d}t$.

Dunque, se $\boldsymbol{B}$ è omogeneo, oltre che additivo, la forza esterna agente sul generico P_h è, a meno di addendi dipendenti esclusivamente dal tempo, proporzionale ad m_h.

Questo risultato, che generalizza quanto già provato in [1], [2] e [3] per le sollecitazioni G-autonome nell'ipotesi che le $\boldsymbol{F}_h^{(e)}$ siano derivabili parzialmente rispetto ai loro argmenti, è dunque una conseguenza immediata della (11), nel caso particolare in cui si ammetta che $\boldsymbol{B}$ è un operatore omogeneo.

Bibliografia.

[1] F. NAPPO, *Sollecitazioni posizionali corrispondenti ad un moto autonomo del baricentro*, La Ricerca Scientifica (2) **8** (1965), 557-566.

[2] P. BENVENUTI, *Sulla completa indipendenza del moto del baricentro dalle forze interne*, Rend. Mat. e Appl. (5) **25** (1966), 510-518.

[3] P. BENVENUTI, *Caratterizzazione completa delle sollecitazioni G-determinanti*, Rend. Mat. e Appl. (5) **26** (1967), 247-271.

[4] N. MINORSKI, *Nonlinear Oscillaticns* (III), D. Van Nostrand, London-New York 1962.

[5] R. BELLMAN and L. K. COOKE, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York-London 1963.

[6] V. VOLTERRA, *Leçons sur les Fonctions de Ligne*, Gauthier-Villar, Paris 1913.

[7] G. SANSONE, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, Zanichelli, Bologna 1956.

Sunto.

Si caratterizza una classe molto generale di sollecitazioni esterne G-autonome, tali cioè da rendere la prima equazione cardinale della meccanica sufficiente a determinare tutti i moti possibili del centro di massa di un sistema di punti materiali liberi in modo completamente indipendente dalla natura delle forze interne.

Summary.

We characterize a wide class of G-autonomous external forces, i. e., such that the equation of motion of the center of mass of a system of n free particles is completely independent of the nature of internal forces.

* * *