Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 129-137

LUIGI MANGIAROTTI (*)

Trasporto di neutroni e metodo delle collisioni multiple. (**)

1. - Introduzione.

È noto che l'equazione di BOLTZMANN, che è alla base della teoria del trasporto di neutroni, permette di determinare la funzione di distribuzione dei neutroni che diffondono in un dato mezzo moltiplicante e la eventuale condizione critica di questo.

Recentemente, per la risoluzione di problemi di trasporto di neutroni, è stato pure usato un metodo, detto delle « collisioni multiple », nel quale si fa uso del punto di vista lagrangiano (ricordiamo che per derivare l'equazione di BOLTZMANN si considera invece un bilancio locale di neutroni). Il metodo è stato applicato unicamente a sistemi materiali aventi semplici simmetrie e si sono ottenuti buoni risultati ([4], [5], [6], [7], [8]) (1).

La caratteristica di questo metodo, poichè in esso si seguono i percorsi dei singoli neutroni nel mezzo, consiste in un opportuno uso, del resto noto in meccanica statistica, della funzione delta di DIRAC per tener conto del punto, della direzione e dell'istante in cui si pensa d'osservare i neutroni.

Nella presente Nota ci proponiamo di mostrare come da una opportuna formulazione del metodo per un mezzo diffondente di forma qualsiasi, generalizzando quanto è stato fatto in [4], [5], [6] e [7], sia possibile dedurre l'equazione stazionaria e non stazionaria di BOLTZMANN (nella forma integrale). Da ciò risulta che il metodo delle collisioni multiple non è altro che un metodo di soluzione dell'equazione di BOLTZMANN.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « Ulisse Dini » (Viale Morgagni 67-A), Università, 50134 Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 6 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1967-68. — Ricevuto: 22-V-1968.

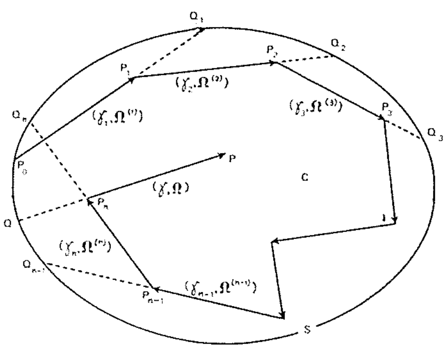
(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

Tratteremo separatamente il caso stazionario e quello non stazionario. Inoltre supporremo, come in [1] (cap. IV), che sia lecita l'ipotesi secondo la quale si possono considerare i neutroni come isoenergetici (*approssimazione ad un gruppo*), che il mezzo sia omogeneo e che lo «scattering» sia isotropo nel sistema di laboratorio. Osserviamo che, dal punto di vista pratico, si può utilizzare la equazione del trasporto, nella approssimazione ad un gruppo, nello studio della diffusione di neutroni in equilibrio termico con il mezzo diffondente.

2. - Caso stazionario.

Sia dunque C un mezzo omogeneo e moltiplicante, limitato da una superficie S non rientrante (cioè ogni semiretta uscente da un punto qualsiasi $P \in C$ incontra S in un sol punto [1]). Le proprietà del mezzo risultano caratterizzate dal numero medio di neutroni secondari per collisione c e dal libero cammino medio dei neutroni $1/\sum$ ($\sum$ = sezione macroscopica d'urto totale), [2].

Indichiamo con P_0 l'origine del sistema di riferimento e sia $P_0 \in S$. Si supponga ora che un neutrone, necessario per innescare la reazione a catena nel sistema, incida nel punto P_0 muovendosi con velocità $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$. La probabilità che esso percorra un tratto γ_1 nella direzione individuata dal versore $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$ e che urti poi con un nucleo nel successivo tratto infinitesimo $d\gamma_1$ è data da: $\exp(-\sum\gamma_1)\sum d\gamma_1$, [2], (cfr. la Figura). Come risultato di questa prima collisione avremo $\{c\sum/(4\pi)\}\exp(-\sum\gamma_1)\,d\gamma_1\,d\Omega^{(2)}$ neutroni che si muoveranno in una direzione



appartenente all'elemento di angolo solido $d\Omega^{(2)}$ intorno a una direzione individuata dal versore $\boldsymbol{\Omega}^{(2)}$. Essi percorreranno nella direzione $\boldsymbol{\Omega}^{(2)}$ un certo tratto γ_2 per poi urtare con altri nuclei. Come risultato di questa seconda collisione avremo $\{c\sum/(4\pi)\}^2\exp[-\sum(\gamma_1+\gamma_2)]\,d\gamma_1\,d\gamma_2\,d\Omega^{(2)}\,d\Omega^{(3)}$ neutroni che si muoveranno in una direzione appartenente a $d\Omega^{(3)}$. In generale, dopo n collisioni,-

avremo

$$(1)\qquad \{c\,\textstyle\sum/(4\pi)\}^n \exp[-\textstyle\sum(\gamma_1+\ldots+\gamma_n+\gamma)]\, d\gamma_1 \ldots d\gamma_n\, d\Omega^{(2)} \ldots d\Omega^{(n)}\, d\Omega, \quad n \geqslant 1\,,$$

neutroni che hanno percorso un tratto γ con velocità il cui versore appartiene al cono $(\boldsymbol{\Omega},\ d\Omega)$.

Siano ora $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ i punti (cfr. la Figura) in cui rispettivamente le semirette che escono da P_0 con direzione $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$, da $P_1 = P_0 + \gamma_1 \boldsymbol{\Omega}^{(1)}$ (interno a C) con direzione $\boldsymbol{\Omega}^{(2)}, \ldots,$ da $P_{n-1} = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \boldsymbol{\Omega}^{(k)}$ (interno a C) con direzione $\boldsymbol{\Omega}^{(n)}$ incontrano la superficie S. Indichiamo con $R_j = R_s(P_{j-1},\ \boldsymbol{\Omega}^{(j)})$ le distanze $\overline{P_{j-1}Q_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$; posto inoltre:

$$(2)\qquad P = P_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \boldsymbol{\Omega}^{(k)} + \gamma\, \boldsymbol{\Omega}\,,$$

sia ancora $R = R_s(P,\ \boldsymbol{\Omega})$ la distanza tra il punto P e il punto Q in cui la semiretta, che esce da P con direzione $-\boldsymbol{\Omega}$, incontra S.

Vediamo ora come sia possibile calcolare il numero di neutroni che attraversano un'area infinitesima nel punto fissato $P \equiv (x, y, z)$, definito dalla (2).

Indicando con $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$ rispettivamente i versori degli assi x, y, z, introduciamo nella (1) le seguenti funzioni δ:

$$(3)\qquad \delta\Big(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \boldsymbol{\Omega}^{(k)}\cdot \boldsymbol{n}_1 + \gamma\, \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_1 - x\Big)\,,$$

$$(4)\qquad \delta\Big(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \boldsymbol{\Omega}^{(k)}\cdot \boldsymbol{n}_2 + \gamma\, \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_2 - y\Big)\,,$$

$$(5)\qquad \delta\left(\frac{1}{\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_3}\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \boldsymbol{\Omega}^{(k)}\cdot \boldsymbol{n}_3 + \gamma - \frac{z}{\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_3}\right) = |\,\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_3\,|\ \delta\Big(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \boldsymbol{\Omega}^{(k)}\cdot \boldsymbol{n}_3 + \gamma\, \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_3 - z\Big),$$

moltiplicate la (3) per dx e la (4) per dy. Se ora integriamo rispetto a $\boldsymbol{\Omega}^{(j)}$ sull'angolo solido ω_j così definito: $\int_{\omega_j} \ldots\, d\Omega^{(j)} = \int_0^{2\pi} d\varphi_j \int_0^{\pi} \ldots \operatorname{sen}\theta_j\, d\theta_j$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$, ove θ_j e φ_j sono rispettivamente l'angolo di colatitudine e l'angolo di azimut, che individuano il versore $\boldsymbol{\Omega}^{(j)} = \boldsymbol{\Omega}^{(j)}(\theta_j,\ \varphi_j)$ in un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali; e integriamo rispetto a γ_j tra 0 e R_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ e a γ tra 0 e R, otteniamo evidentemente il numero di neutroni che, dopo n collisioni, attraversano l'area infinitesima $dx\, dy$, posta in P e normale all'asse z, con una direzione di moto appartenente all'elemento di angolo solido

$d\Omega$ intorno a Ω per effetto del neutrone incidente in P_0. Infatti con le integrazioni rispetto a $\Omega^{(j)}$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$ sugli angoli solidi ω_j e con quelle rispetto a γ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ tra i limiti di cui si è detto, si prendono in considerazione tutti i cammini possibili all'interno di C e con la (3) e la (4) moltiplicate rispettivamente per dx e per dy, e con la (5) e l'integrazione rispetto a γ tra 0 e R, si impone la condizione che, dopo n urti, i neutroni attraversino l'area infinitesima $dx\,dy$ posta in $P \equiv (x, y, z)$.

Se in P_0, anzichè un solo neutrone, incidono n_0 neutroni con direzioni di moto entranti in C, essendo queste direzioni ugualmente probabili, per ottenere il numero di neutroni in questione dovremo introdurre nella (1) il fattore $n_0/(2\pi)$ ed integrare anche rispetto a $\Omega^{(1)}$ sull'angolo solido ω_1 sotteso in P_0 da S.

Inoltre, più in generale, se indichiamo con dS un elemento di area nel punto P e normale al versore $\boldsymbol{n}$ e con $N'_n(P, \Omega; P_0)\, dS\, d\Omega$ il numero di neutroni che, per effetto degli n_0 neutroni incidenti in P_0, dopo n urti, attraversano l'area dS con una direzione di moto appartenente all'elemento di angolo solido $d\Omega$ intorno a Ω, si ha dunque:

$$(6) \qquad N'_n(P, \Omega; P_0) = |\,\Omega \cdot \boldsymbol{n}\,| \, \frac{c\sum}{4\pi} \int_0^R \exp(-\textstyle\sum \gamma)\, G'_n(P, \Omega; P_0, \gamma)\, d\gamma,$$

dove

$$(7) \quad G'_n(P, \Omega; P_0, \gamma) = \frac{n_0}{2\pi}\left(\frac{c\sum}{4\pi}\right)^{n-1} \int_{\omega_1} d\Omega^{(1)} \int_0^{R_1} \exp(-\textstyle\sum \gamma_1) \left\{ \int_{\omega_2} d\Omega^{(2)} \int_0^{R_2} \exp(-\sum \gamma_2) \left\{ \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots \left\{ \int_{\omega_n} d\Omega^{(n)} \int_0^{R_n} \exp(-\textstyle\sum \gamma_n)\, \delta(P_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\, \Omega^{(k)} + \gamma\, \Omega - P)\, d\gamma_n \right\} \ldots \right\} d\gamma_2 \right\} d\gamma_1 .$$

Eseguendo il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} P_j = P_0 + \sum_{k=1}^{j} \gamma_k\, \Omega^{(k)} \\ dV_{P_j} = d\gamma_j\, d\Omega^{(j)}\, |\, P_j - P_{j-1}\,|^2 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

essendo dV_{P_j} l'elemento di volume intorno a P_j, si vede facilmente che la (7) si può mettere nella forma:

$$(8) \qquad G'_n(P, \Omega; P_0, \gamma) = \int_C G_n(P'; P_0)\, \delta(P' + \gamma\, \Omega - P)\, dV_{P'}$$

$$= G_n(P - \gamma\, \Omega; P_0),$$

dove al posto di P_n si è scritto P' e dove le funzioni G_j soddisfano alle relazioni ricorrenti:

$$(9)\quad \begin{cases} G_j(P';\ P_0) = \dfrac{c\sum}{4\pi}\displaystyle\int_C [\exp(-\sum |P'-P''|)/|P'-P''|^2]\ G_{j-1}(P'';P_0)\,dV_{P''} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ n), \\ G_1(P';\ P_0) = n_0 \exp(-\sum |P'-P_0|)/(2\pi |P'-P_0|^2). \end{cases}$$

Se ora si suppone che il mezzo C si trovi in condizioni critiche, è evidente che le funzioni N'_n dovranno tendere, al crescere di n, [6], a un valore costante, indipendente da n. Indicando con $N(P,\ \boldsymbol{\Omega})$ la densità angolare dei neutroni in condizioni stazionarie, tale valore costante risulterà proporzionale a $v\,|\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}|\cdot N(P,\ \boldsymbol{\Omega})$, dove v è il modulo della velocità dei neutroni, essendo $v\,|\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}|\cdot N(P,\ \boldsymbol{\Omega})\,dS\,d\Omega$ il numero di neutroni, appartenenti a $d\Omega$, che nell'unità di tempo attraversano dS.

Si ha dunque:

$$(10)\qquad N(P,\ \boldsymbol{\Omega}) = \frac{c\sum}{4\pi}\int_0^R \exp(-\sum \gamma)\ G(P-\gamma\boldsymbol{\Omega})\,d\gamma\,,$$

che si deduce dalla (6) e dalla (8) e dove la funzione G soddisfa alla seguente equazione integrale:

$$(11)\qquad G(P') = \frac{c\sum}{4\pi}\int_C \left[\exp(-\sum |P'-P''|)/|P'-P''|^2\right] G(P'')\,dV_{P''},$$

che si deduce dalla (9) per $j\to\infty$ (supposto che si possa passare al limite sotto il segno di integrale).

Integrando la (10) rispetto a $\boldsymbol{\Omega}$ sull'angolo solido ω definito in modo analogo agli angoli solidi ω_j ($j=2,\ 3,\ \ldots,\ n$) di pagina 131, e cambiando P in P' e indicando $P-\gamma\,\boldsymbol{\Omega}$ con P'' si ottiene:

$$N(P') = \frac{c\sum}{4\pi}\int_0^R \left[\exp(-\sum |P'-P''|)/|P'-P''|^2\right] G(P'')\,dV_{P''}\,,$$

che confrontata con la (11) mostra come la funzione G non rappresenti altro che la densità dei neutroni.

La (10) diventa dunque:

$$N(P,\ \Omega) = \frac{c\sum}{4\pi}\int_0^R \exp(-\sum\gamma)\, N(P-\gamma\,\Omega)\, d\gamma\ ,$$

che è evidentemente la forma integrale dell'equazione stazionaria di BOLTZMANN, [1], nell'ipotesi appunto che non ci siano sorgenti esterne di neutroni in C e che sulla superficie S non giungano neutroni dall'esterno.

3. - Caso non stazionario.

Supponiamo ancora che un neutrone all'istante $t=0$ incida nel punto P_0 secondo una direzione di moto individuata dal versore $\Omega^{(1)}$. Si ragioni come prima sostituendo $v\,t_j$ a γ_j $(j=1,\ 2,\ ...,\ n)$, essendo v il modulo della velocità dei neutroni. Il numero di neutroni che, dopo n collisioni, al tempo $\sum_{j=1}^{n} t_j + \gamma/v$ hanno direzione di moto compresa entro l'elemento di angolo solido $d\Omega$ intorno a Ω, è dato dunque da:

$$\left(\frac{c\sum v}{4\pi}\right)^n \exp\left[-\sum\left(v\sum_{j=1}^{n} t_j+\gamma\right)\right] dt_1 \ldots dt_n\, d\Omega_2 \ldots d\Omega_n\, d\Omega, \qquad n\geqslant 1. \tag{12}$$

Se ora introduciamo nella (12) le seguenti funzioni δ:

$$\delta(P_0 + v\sum_{k=1}^{n} t_k\,\Omega^{(k)} + \gamma\,\Omega - P)\ , \qquad \delta(v\sum_{k=1}^{n} t_k + \gamma - v\,t)\ ,$$

moltiplicata la prima per dV_P (P è come prima un punto fissato e la seconda δ serve a imporre la condizione $\sum_{k=1}^{n} t_k + \gamma/v = t$, t essendo un istante fissato) e integriamo rispetto a $\Omega^{(j)}$ sull'angolo solido ω_j $(j=2,\ 3,\ ...,\ n)$ e rispetto a t_j tra 0 e R_j/v $(j=1,\ 2,\ ...\ ,\ n)$ e a γ tra 0 e R, otteniamo evidentemente il numero di neutroni che, dopo n collisioni, al tempo t si trovano in dV_P con una direzione di moto appartenente all'elemento di angolo solido $d\Omega$ intorno a Ω.

Se nel punto P_0, invece di un solo neutrone, incidono n_0 neutroni (come nel caso stazionario) e indichiamo con $N_n(P,\ \Omega,\ t)\, dV_P\, d\Omega$ il numero di neutroni che di conseguenza, dopo n collisioni, al tempo t appartengono a $dV_P\, d\Omega$, si ha dunque:

$$(13)\qquad N_n(P,\ \Omega,\ t) = \frac{c\sum}{4\pi}\int_0^R \exp(-\sum\gamma)\, F'_n(P,\ \Omega,\ t;\ \gamma)\,\mathrm{d}\gamma\,, \qquad n\geqslant 1,$$

dove

$$(14)\quad F'_n(P,\Omega,t;\gamma) = \frac{n_0\,v}{2\pi}\left(\frac{c\sum v}{4\pi}\right)^{n-1}\int_{\omega_1}\mathrm{d}\Omega^{(1)}\int_0^{R_1/v}\exp(-\sum v\,t_1)\left\{\int_{\omega_2}\mathrm{d}\Omega^{(2)}\int_0^{R_2/v}\exp(-\sum v\,t_2)\right\{\ldots$$

$$\ldots\left\{\int_{\omega_n}\mathrm{d}\Omega^{(n)}\int_0^{R_n/v}\exp(-\sum v t_n)\ \delta(v\sum_{k=1}^{n}t_k+\gamma-vt)\,\delta(P_0+v\sum_{k=1}^{n}t_k\Omega^{(k)}+\gamma\Omega-P)\,\mathrm{d}t_n\right\}\ldots\Big\}\mathrm{d}t_2\Big\}\mathrm{d}t_1\,.$$

Eseguendo il cambiamento di variabili:

$$P_j = P_0 + \sum_{k=1}^{j} v\, t_k\, \Omega^{(k)} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

e sviluppando la $\delta(v\sum_{k=1}^{n} t_k + \gamma - v\,t)$ in integrale di FOURIER, [3], cioè:

$$\delta(v\sum_{k=1}^{n} t_k + \gamma - v\,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\,\varrho(v\sum_{k=1}^{n} t_k + \gamma - v\,t)\right]\mathrm{d}\varrho\,,$$

si vede facilmente che la (14) si può mettere nella forma:

$$(15)\quad F'_n(P,\Omega,t;\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\varrho\,(\gamma-vt)\right]\left\{\int_C F_n(P';\,\varrho)\ \delta(P'+\gamma\Omega-P)\ \mathrm{d}V_{P'}\right\}\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\,\varrho\,(\gamma-vt)\right]F_n(P-\gamma\,\Omega;\ \varrho)\,\mathrm{d}\varrho,$$

dove si è scritto P' al posto di P_n e dove le funzioni F_j soddisfano alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$(16)\quad F_j(P';\,\varrho) = \frac{c\sum}{4\pi}\int_C \{\exp[(-\sum+i\varrho)\,|P'-P''|]/\,|P'-P''|^2\}F_{j-1}(P'';\,\varrho)\,\mathrm{d}V_{P''}$$

$$(j=2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

$$(17)\qquad F_1(P';\ \varrho) = n_0\exp[(-\sum + i\,\varrho)\,|\,P'-P_0\,|]/(2\pi\,|\,P'-P_0\,|^2).$$

Integrando ora la (13) rispetto a Ω sull'angolo solido ω, tenendo presente la (15), e indicando $P - \gamma\,\Omega$ con P', si ottiene, in virtù della (16),

$$N_n(P,t) = \int_\omega N_n(P,\Omega,t)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{c\sum}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\varrho vt)\{\int_C [\exp[(-\sum + i\varrho)\,|P-P'|\,]/|P-P'|^2]\cdot$$

$$\cdot F_n(P';\,\varrho)\,\mathrm{d}V_{P'}\}\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\,\varrho\,v\,t)\,F_{n+1}(P;\,\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,, \qquad n \geqslant 1,$$

e quindi la (15) si può anche scrivere:

$$F_n'(P,\,\Omega,\,t;\,\gamma) = N_{n-1}(P - \gamma\,\Omega,\,t - \gamma/v)\,, \qquad n \geqslant 2\,. \tag{18}$$

Per $n = 0$ si ha evidentemente:

$$N_0(P,\,\Omega,\,t) = n_0\exp(-\textstyle\sum v\,t)\,\delta(P - P_0 - v\,t\,\Omega)/(2\pi), \quad \text{per} \quad \Omega\cdot\boldsymbol{n} < 0\,, \tag{19}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale a S nel punto P_0 orientata verso l'esterno.
Inoltre, come si vede facilmente usando la (17) e la (19), si ha pure:

$$\int_\omega N_0(P,\,\Omega,\,t)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\,\varrho\,v\,t)\,F_1(P;\,\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,,$$

e quindi ancora dalla (15) segue che la (18) vale anche per $n = 1$; perciò concludendo, la (13) si può scrivere:

$$N_n(P,\,\Omega,\,t) = \frac{c\sum}{4\pi}\int_0^R \exp(-\textstyle\sum\gamma)\,N_{n-1}(P - \gamma\,\Omega,\,t - \gamma/v)\,\mathrm{d}\gamma\,, \qquad n \geqslant 1\,. \tag{20}$$

Indicando con $N(P,\,\Omega,\,t)$ la densità angolare dei neutroni, poichè ad essa contribuiscono tutte le densità parziali del tipo $N_n(P,\,\Omega,\,t)$, si deve avere:

$$N(P,\,\Omega,\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n(P,\,\Omega,\,t);$$

ma allora le (20) non dànno altro che la soluzione, mediante sviluppo in serie di NEUMANN, dell'equazione:

$$N(P,\ \Omega,\ t) = N_0(P,\ \Omega,\ t) + \frac{c\sum}{4\pi}\int_0^R \exp(-\sum\gamma)N(P-\gamma\Omega,\ t-\gamma/v)\,\mathrm{d}\gamma\ , \tag{21}$$

che è la forma integrale dell'equazione non stazionaria di BOLTZMANN, [2], secondo le condizioni iniziali da cui siamo partiti.

In conclusione, dalla (13), che costituisce la formulazione matematica del metodo delle collisioni multiple in un mezzo di forma qualsiasi, si ottiene la (20), che fornisce il termine generico dello sviluppo in serie di NEUMANN della equazione di BOLTZMANN (21). Dunque, come si è già accennato nell'Introduzione, il metodo delle collisioni multiple non è altro che un metodo di soluzione dell'equazione di BOLTZMANN.

Bibliografia.

[1] B. DAVISON, *Neutron Transport Theory*, Clarendon Press, Oxford 1957.

[2] J. SALMON, *Théorie Cinétique des Neutrons Rapides*, Presses Universitaires de France, Paris 1961.

[3] I. HALPERIN, *Introduction to the Theory of Distributions. (Based on the Lectures Given by Laurent Schwartz)*, University of Toronto Press, Toronto 1952.

[4] T. ASAOKA, J. At. Energy Soc. Japan 3 (1961), 531-540.

[5] T. ASAOKA, *Riflection and transmission of neutrons by the multiple collision method*, Report EUR 367. e, Ispra 1963.

[6] T. ASAOKA, Y. NAKAHARA and K. SAITO, *Neutron distribution in a critical slab by the multiple collision method*, Report EUR 479. e, Ispra 1963.

[7] T. ASAOKA, Y. NAKAHARA and K. SAITO, *Multiple collision method for neutron transport problems*, J. Nucl. Energy **18** (1964), 665-701.

[8] T. ASAOKA, *The J_N method for neutron transport problems in a bare sphere*, J. Nucl. Energy **22** (1968), 99-121.

Summary.

We deduce the integral form of the Boltzmann equation using a Lagrangian viewpoint. We then prove that the multiple collision method is merely a method to solve the Boltzmann equation.

* * *