Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 329-343

ANTONIO FASANO (*)

Sulla conduzione del calore in una sfera omogenea orbitante, soggetta a condizioni termiche superficiali discontinue. (**)

1. – Lo sviluppo delle tecniche concernenti i satelliti artificiali ha conferito particolare interesse ai problemi di diffusione del calore con condizioni al contorno periodiche nel tempo [1]. In questo lavoro viene studiata la distribuzione della temperatura in un corpo sferico omogeneo, traslante, rispetto ad un riferimento solare, su una assegnata orbita, che per semplicità supporremo circolare. L'ipotesi di traslazione è rivolta a semplificare la dipendenza temporale delle condizioni termiche superficiali, nel senso che, durante la fase di illuminazione del satellite, la radiazione solare diretta ne investe costantemente la stessa semisfera. Ciò consente di assumere costanti in quella fase le condizioni di flusso superficiale, mediando, nel modo che sarà indicato, le disuniformità dovute alle radiazioni di origine terrestre.

La validità di queste considerazioni è accettabile per un numero limitato di orbite per la sovrapposizione del moto annuo a quello di rivoluzione attorno alla terra ed altri eventuali effetti che tendono a modificare le suddette condizioni di irraggiamento.

Se la sfera possiede invece una velocità di rotazione sufficientemente rapida attorno ad un asse non diretto verso il sole, le condizioni al contorno possono ritenersi uniformi, con grande semplificazione del problema.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « Ulisse Dini » (viale Morgagni 67/A), Università, 50134 Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 6 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1966-1967. — Ricevuto: 31-I-1967.

Nello schema sopra accennato assumiamo condizioni termiche superficiali discontinue attraverso il cerchio di confine luce-ombra sul satellite, caratterizzando la natura della sua superficie in modo che le condizioni al contorno si possano ritenere separatamente uniformi sulla semisfera illuminata e su quella oscura. Ciò equivale a supporre che tale superficie sia idealmente scabra, ossia che su ogni elemento di superficie la radiazione solare diretta, proveniente da un angolo solido molto piccolo, sia vista sotto tutti gli angoli da 0 a $\pi/2$.

Durante l'attraversamento del cono d'ombra scegliamo condizioni termiche uniformi su tutta la superficie.

Discuteremo tra breve i particolari ed il significato fisico di queste assunzioni. Dal punto di vista analitico aggiungiamo che tratteremo il problema con approssimazione lineare.

2. - Le condizioni al contorno.

Nella fase di illuminazione il flusso di calore in superficie è determinato dalla radiazione solare diretta, dalla radiazione diffusa dalla terra e dall'atmosfera, dall'irraggiamento proprio del satellite. Altre cause di riscaldamento, come l'attrito aerodinamico, i raggi cosmici e le radiazioni di origine extra solare, sono assolutamente trascurabili ([2], pp. 148, 153; [3], pag. 330).

Nel cono d'ombra mancano la radiazione solare diretta e diffusa.

Se definiamo il fattore di forma F per la radiazione che giunge su un elemento di superficie $\mathrm{d}S$ del satellite da un corpo irradiante una potenza R per unità di superficie, in modo che $(2/\pi)FR\,\mathrm{d}S$ [1] rappresenti la potenza complessiva incidente su $\mathrm{d}S$, abbiamo le seguenti espressioni per il flusso entrante attraverso l'unità di superficie del satellite:

a) nella fase di illuminazione:

per la superficie illuminata

$$\Phi_0 = (2/\pi)\left\{\alpha\,(S + \overline{F}{}_0^d D) + \varepsilon\,\overline{F}{}_0^e E\right\} - \varepsilon\,\sigma\,T^4, \tag{1}$$

per la superficie oscura

$$\Phi_1 = (2/\pi)\left\{\alpha\,\overline{F}{}_1^d D + \varepsilon\,\overline{F}{}_1^e E\right\} - \varepsilon\,\sigma\,T^4; \tag{2}$$

---

(1) Secondo la definizione data di superficie idealmente scabra, $(2/\pi)\,\mathrm{d}S$ è la superficie apparente alla radiazione che investe $\mathrm{d}S$, essendo $2/\pi$ la media del coseno tra 0 e $\pi/2$.

b) nel cono d'ombra:

$$\Phi_2 = (2/\pi)\, \varepsilon\, \overline{F}{}^e_2\, E - \varepsilon\, \sigma\, T^4; \tag{3}$$

con:

T temperatura superficiale del satellite;

S, D, E densità di flusso di potenza rispettivamente della radiazione solare diretta e diffusa e della radiazione terrestre di emissione propria;

$\overline{F}{}^d_0$, $\overline{F}{}^e_0$ valori medi per la semisfera illuminata dei fattori di forma per la radiazione diffusa e per quella emessa dalla terra e dall'atmosfera;

$\overline{F}{}^d_1$, $\overline{F}{}^e_1$ analoghi coefficienti per la semisfera oscura;

$\overline{F}{}^e_2$ fattore di forma di radiazione per tutta la superficie nel cono d'ombra;

α potere assorbente per la radiazione solare diretta e diffusa (²);

ε potere emissivo e potere assorbente per la radiazione terrestre (³);

σ costante di STEFAN-BOLTZMANN.

Posto:

$$T^4_0 = (2/\pi)\,(1/\sigma)\left\{\overline{F}{}^e_0\, E + (\alpha/\varepsilon)\,(S + \overline{F}{}^d_0\, D)\right\}, \tag{4}$$

$$T^4_1 = (2/\pi)\,(1/\sigma)\left\{\overline{F}{}^e_1\, E + (\alpha/\varepsilon)\,\overline{F}{}^d_1\, D\right\}, \tag{5}$$

$$T^4_2 = (2/\pi)\,(1/\sigma)\,\overline{F}{}^e_2\, E\,, \tag{6}$$

le (1-3) assumono la forma:

$$\Phi_k = \varepsilon\,\sigma\,(T^4_k - T^4), \qquad k = 0,\ 1,\ 2. \tag{7}$$

Per linearizzare il problema, sviluppiamo la (7) in serie di TAYLOR, arrestandoci al primo termine:

$$\Phi_k = h_k\,(T_k - T), \qquad \text{con} \quad h_k = 4\varepsilon\,\sigma\,T^3_k, \quad k = 0,\ 1,\ 2. \tag{8}$$

La linearizzazione è accettabile se in ognuno dei tre casi è:

$$(3/2)\,|\,(T/T_k) - 1\,| \ll 1, \qquad k = 0,\ 1,\ 2. \tag{9}$$

(²) Queste due radiazioni hanno praticamente, nell'intorno del massimo, la stessa composizione spettrale.

(³) Le temperature del satellite e della terra non sono molto diverse.

Anche nella forma (8) del flusso superficiale il problema si presenta analiticamente complesso e conviene introdurre una ulteriore semplificazione, sostituendo alla (8) l'espressione:

$$\Phi_k = h\,(T_k - T), \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \tag{8'}$$

dove h è ottenuto mediando i valori h_0, h_1, h_2. La legittimità di questo procedimento sarà ora giustificata nei suoi limiti di validità sulla base del computo approssimato delle temperature T_k e delle conducibilità h_k.

Nelle (4-6) inseriamo i valori: $\sigma \cong 1{,}35 \cdot 10^{-12}$ cal sec^{-1} cm^{-2} ^{0}K^{-4} ([4], pag. 39); $S = 1/30$ cal sec^{-1} cm^{-2} ([4], pag. 31). L'albedo terrestre è circa 0,40 ([5], pag. 209), per cui $D = 0{,}40\,\frac{1}{2}\,S$ (4) $= 0{,}66 \cdot 10^{-2}$ cal sec^{-1} cm^{-2}. L'emissione terrestre è valutabile come se la terra fosse un radiatore perfetto a $\cong 250$ ^{0}K ([2], pag. 153), quindi $E = 0{,}53 \cdot 10^{-2}$ cal sec^{-1} cm^{-2} (cfr. i dati numerici in [5], Cap. XIV).

Il calcolo dei fattori di forma che compaiono nelle (4-6) tiene conto delle ipotesi fatte sulla natura della superficie della sfera e include una media degli effetti delle radiazioni di origine terrestre. Queste ultime, a causa della relativa vicinanza del satellite alla terra, ne interessano praticamente l'intera superficie, per cui la media introdotta non costituisce una sensibile alterazione delle effettive condizioni al contorno. La massima collezione delle radiazioni di provenienza terrestre si ha per una piccola regione superficiale del satellite, prospiciente la terra. Su di essa troviamo il massimo fattore di forma F, che ho valutato in via approssimata, sostituendo alla calotta terrestre sotto la visuale del satellite, un disco di uguale raggio ϱ, posto ad una distanza media d':

$$F = \frac{1}{2}\ln\bigl(1 + (\varrho^2/d'^2)\bigr)\,.$$

Sulla superficie della sfera supporremo lineare il decremento del fattore di forma da F a 0. Si ottiene così nel cono d'ombra il valore medio $\overline{F}{}_2^e = \frac{1}{2}\,F$. Analoghe medie sono calcolabili nell'altra parte dell'orbita, separatamente sulle semisfere in luce e in ombra. Dato il moto non traslatorio del satellite relativamente alla terra, è ovvio che sulle due semisfere le condizioni di irraggiamento, e con esse i fattori di forma, sono variabili nel tempo. Senza soffermarci sui particolari di questa dipendenza temporale, diremo soltanto che, per ottenere un'informazione globale sugli effetti della radiazione diffusa e di quella emessa dalla terra, abbiamo eseguito una ulteriore media temporale

(4) Il fattore 1/2 tiene conto del fatto che la superficie diffondente è doppia della superficie apparente alla radiazione solare. Cfr. i dati numerici in [5], Cap. XIV.

dei relativi fattori di forma, ritenendone lineare la variazione lungo l'arco di orbita percorso dal satellite sotto l'illuminazione solare.

La Tavola 1 dà i valori ottenuti per i fattori di forma medi a tre diverse quote.

d (Km)	F	$\overline{F}_0^e$	$\overline{F}_0^d$	$\overline{F}_1^e$	$\overline{F}_1^d$	$\overline{F}_2^e$
200	1,6	0,58	0,46	1,00	0,91	0,80
400	1,3	0,45	0,34	0,84	0,73	0,65
600	1,2	0,41	0,29	0,79	0,67	0,60

Tav. 1

La Tavola 2 dà le temperature T_0, T_1, T_2 per i valori più comuni di α/ε ([3], pag. 330), alle quote indicate.

α/ε \ d		200	400	600
0,2	T_0	264	258	256
	T_1	236	229	221
1	T_0	368	366	364
	T_1	270	258	252
2	T_0	432	430	429
	T_1	301	287	280
4	T_0	511	509	508
	T_1	342	327	320
	T_2	210	200	197

Tav. 2 (d in Km, T_k in °K)

Il valore minimo 0,2 considerato per α/ε corrisponde a superficie trattate con ossidi bianchi. Nell'intorno di questo valore la condizione di linearizzabilità (9) risulta soddisfatta entro limiti accettabili. Le fasi di ingresso e di uscita dal cono d'ombra sono critiche a questo riguardo a causa della repentina modificazione delle condizioni al contorno. Le ipotesi introdotte sul moto del satellite (traslazione su un'orbita circolare), sulla natura della sua superficie (idealmente scabra) e nel calcolo di T_0, T_1, T_2, sono però tali da rendere la linearizzazione ovunque compatibile con i limiti di approssimazione insiti nell'impostazione del problema.

I valori più alti di α/ε riguardano superficie lucide e pertanto non hanno diretto interesse per il nostro problema. I corrispondenti valori di T_0 e T_1 sono stati riportati solo per mostrare come al crescere di α/ε le condizioni di linearizzazione (9) non sono più soddisfatte, a meno che la sfera non abbia capacità termica tanto bassa che la temperatura superficiale si stabilisca in breve tempo su valori prossimi a quelli considerati.

La Tavola 3 mostra il confronto tra le costanti h_0, h_1, h_2, definite dalla (8), in funzione di α/ε.

α/ε \ d		200	400	600
0,2	a_1	1,4	1,4	1,6
	a_2	2,0	2,1	2,2
1	a_1	2,5	2,8	3,0
	a_2	5,4	6,1	6,2
2	a_1	3,0	3,4	3,6
	a_2	8,7	10	10
4	a_1	3,4	3,8	4,0
	a_2	14	16	17

Tav. 3 $(a_1 = h_0/h_1;\ a_2 = h_0/h_2)$

Come si vede, mentre il rapporto h_0/h_1 tende a stabilizzarsi su valori da 3 a 4, il rapporto h_0/h_2 cresce molto rapidamente. Per bassi valori di α/ε è possibile semplificare il problema, nel modo già annunciato, mediando i valori di h_0, h_1 e, condizione più gravosa, h_2. Crescendo α/ε risulta $h_0/h_2 \gg h_0/h_1$ e questo procedimento, già largamente approssimato, non è più applicabile.

3. - Regioni di transizione e impostazione analitica.

Assumeremo discontinua la transizione fra le condizioni al contorno introdotte per le due fasi principali dell'orbita. Se infatti le caratteristiche di conduzione della sfera non sono tali che la distribuzione di temperatura sia apprezzabilmente influenzata durante la variazione progressiva delle condizioni di illuminazione ai margini del cono d'ombra, è vantaggioso sopprimere questi processi di transizione, la cui struttura è complessa a causa dell'assorbimento e della rifrazione dell'atmosfera. Una semplice analisi delle condizioni cinematiche di attraversamento delle regioni di transizione, mostra che la durata complessiva della permanenza in esse di un satellite è dell'ordine del minuto primo, giustificando così l'ipotesi ora introdotta.

Assunto sulla sfera un sistema di coordinate polari col polo nel centro della sfera e l'asse polare diretto verso il sole, la temperatura T dipende, oltre che dal tempo t, soltanto dal raggio vettore r e dalla colatitudine θ. Poichè ricerchiamo la soluzione $T(r, \theta, t)$ nelle condizioni di regime, ossia quando essa è periodica in t col periodo di rivoluzione τ del satellite, fisseremo l'istante $t = 0$ ad una emersione dal cono d'ombra e studieremo la $T(r, \theta, t)$ nell'intervallo $0 < t \leqslant \tau$.

Introdotta dunque la funzione $f(\theta)$, così definita:

$$f(\theta) = \begin{cases} T_0 & \text{per} \quad 0 \leqslant \theta < \pi/2 \\ T_1 & \text{per} \quad \pi/2 < \theta \leqslant \pi\,, \end{cases} \tag{10}$$

e la funzione $g(\theta, t)$, data da:

$$g(\theta, t) = \begin{cases} f(\theta) & \text{per} \quad 0 < t \leqslant \tau_0 \\ T_2 & \text{per} \quad \tau_0 < t \leqslant \tau\,, \end{cases} \tag{11}$$

con τ_0 durata del periodo di illuminazione e τ periodo di rivoluzione, il complesso delle ipotesi presentate, detto R il raggio della sfera, K la sua conducibilità termica e α la diffusività, entrambe costanti, si traduce nel sistema risolvente ($T_\xi \doteq \partial T/\partial \xi$):

$$\begin{cases} \Delta T = \alpha^{-1}\, T_t\,, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \tau \\ (KT_r + hT)_{r=R} = h\, g(\theta, t), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \tau \\ T(r, \theta, 0) = T(r, \theta, \tau), & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,. \end{cases} \tag{12}$$

4. - La soluzione del problema stazionario.

Si comprende facilmente dal modo con cui il problema è strutturato che il sostegno costruttivo della soluzione ricercata è costituito dalle distribuzioni termiche di equilibrio corrispondenti alle condizioni al contorno presenti nelle due fasi dell'orbita. Di questi casi stazionari ha interesse soltanto quello non banale delle condizioni al contorno discontinue. Poichè non sono comuni le trattazioni di problemi con discontinuità superficiali, ne faremo qui una breve esposizione.

La temperatura di equilibrio $T(r,\ \theta)$, per la caratterizzazione fatta delle condizioni al contorno, è soluzione del seguente sistema:

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta T = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ (KT_r + hT)_{r=R} = f(\theta), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \quad (\theta \neq \pi/2)\,. \end{cases}$$

Questo sistema si presta ad essere risolto con un procedimento di separazione delle variabili e di sviluppo della funzione incognita in serie di funzioni ortogonali. Per l'armonicità di $T(r,\ \theta)$ queste ultime sono i polinomi di LEGENDRE $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$, $n = 0,\ 1,\ 2, \dots$. Per soddisfare le condizioni al contorno e quindi per determinare i coefficienti dello sviluppo, è necessario esprimere la funzione discontinua $f(\theta)$ come serie di polinomi di LEGENDRE. Uno sviluppo analogo è dato in ([6], pag. 263) e consente di ricavare:

$$(14)\qquad f(\theta) = \frac{1}{2}(T_0 + T_1) + (T_0 - T_1)\sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1} P_{2j+1}(\cos\theta) \quad (^5)\,,$$

con

$$(15)\qquad A_{2j+1} = (-1)^j\,\frac{4j+3}{2^{j+2}}\,\frac{1}{2j+1}\,\frac{(2j+1)!\,!}{(j+1)!}\,, \qquad j = 0,\ 1,\ 2, \dots\,.$$

Usando infine l'ortogonalità dei $P_n(\cos\theta)$ e ponendo:

$$(16)\qquad C_{2j+1} = \left\{(2j+1)\,\big(K/(hR)\big) + 1\right\}^{-1} A_{2j+1}, \qquad j = 0,\ 1,\ 2, \dots,$$

si può scrivere la soluzione formale del problema stazionario:

$$(17)\qquad T(r,\ \theta) = \frac{1}{2}(T_0 + T_1) + (T_0 - T_1)\sum_{j=0}^{\infty} C_{2j+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{2j+1} P_{2j+1}(\cos\theta).$$

Non è difficile verificare che questa è la effettiva soluzione del problema, in quanto essa soddisfa le (13). Infatti, osservato che $|P_{2j+1}(\cos\theta)| \leqslant 1$ ([6], pag. 202), ed usando opportune maggiorazioni per le derivate dei polinomi

---

([5]) Nella serie (14) è implicita la definizione $f(\pi/2) = \frac{1}{2}(T_0 + T_1)$.

di LEGENDRE ([6], pag. 274), essa e le serie delle derivate prime e delle derivate seconde rispetto ad r e θ sono trasformabili in serie di potenze di r/R e se ne può così dimostrare la convergenza totale nel dominio richiesto. Il campo di convergenza uniforme della (17) include anche il contorno, rendendo possibile il passaggio al limite per $r \to R$. La serie delle derivate rispetto ad r sul contorno ha le stesse caratteristiche di convergenza dello sviluppo (14), per il quale la convergenza uniforme negli intervalli di continuità della $f(\theta)$ è garantita dal teorema di HOBSON sulle serie di LEGENDRE ([6], pagg. 258-259).

Nella (17) è particolarmente evidente che le deviazioni dalla simmetria sferica di $T(r, \theta)$ sono connesse al salto attraverso la discontinuità. Questa è una caratteristica costante per i problemi qui esposti e mostra che le relative soluzioni includono in particolare il caso più semplice delle condizioni al contorno uniformi della fase di oscuramento, per le quali la soluzione stazionaria si riduce a

$$T(r, \theta) = T_2 . \tag{17'}$$

5. - Il caso non stazionario.

Riprendiamo in esame il sistema (12), il cui interesse analitico sta nella discontinuità temporale della $g(\theta, t)$. Come conseguenza di questa, mentre il senso fisico richiede che la $T(r, \theta, t)$ sia continua in t, ci si può attendere che in $t = \tau_0$ essa non sia derivabile rispetto a t. Può allora sorgere il dubbio sulla unicità della soluzione. Dimostriamo dunque brevemente che tale dubbio non è fondato.

Il sistema (12) può essere spezzato in due sistemi. Nel primo si studia la soluzione $T_1(r, \theta, t)$ in $0 < t \leqslant \tau_0$, con la condizione al contorno (11_1) e le condizioni iniziali date da

$$T_1(r, \theta, 0) = A_1(r, \theta). \tag{18}$$

La funzione $A_1(r, \theta)$ è anch'essa incognita e ne ammettiamo la sviluppabilità, nell'intervallo $0 \leqslant r < R$, in serie di funzioni ortogonali $\Phi_{n,s}(r, \theta)$ in uno e in un sol modo:

$$A_1(r, \theta) = \sum_{n,s} a_{n,s}^{(1)} \; \Phi_{n,s}(r, \theta).$$

Nel secondo sistema si studia la soluzione $T_2(r, \theta, t - \tau_0)$ per $\tau_0 < t \leqslant \tau$, con la condizione al contorno (11_2), essendo inizialmente:

$$T_2(r, \theta, 0) = T_1(r, \theta, \tau_0) . \tag{19}$$

Entrambi i sistemi considerati sono di tipo tradizionale ed ammettono una unica soluzione. Il teorema di unicità per il sistema (12) è quindi ricondotto alla unicità della funzione $A_1(r, \theta)$.

La particolare struttura dei sistemi suddetti consente di prevedere che le rispettive soluzioni devono esprimersi come somma di un transiente e di una parte che ha per limite la soluzione del caso stazionario corrispondente:

$$(20) \qquad T_1(r, \theta, t) = \sum_{n,s} a^{(1)}_{n,s} \varphi^{(1)}_{n,s}(t) \Phi_{n,s} + \sum_{n,s} b^{(1)}_{n,s} \psi^{(1)}_{n,s}(t) \Phi_{n,s} ,$$

$$(21) \qquad T_2(r, \theta, t-\tau_0) = \sum_{n,s} a^{(2)}_{n,s} \varphi^{(2)}_{n,s}(t-\tau_0) \Phi_{n,s} + \sum_{n,s} b^{(2)}_{n,s} \psi^{(2)}_{n,s}(t-\tau_0) \Phi_{n,s} ,$$

con $\varphi^{(i)}_{n,s}(0) = 1, \quad \psi^{(i)}_{n,s}(0) = 0 \quad$ e $\quad \lim_{t\to\infty} \varphi^{(i)}_{n,s}(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \psi^{(i)}_{n,s}(t) = 1, \quad i = 1, 2.$

Il secondo membro della (19) si scrive allora:

$$(22) \qquad T_1(r, \theta, \tau_0) = \sum_{n,s} [a^{(1)}_{n,s} \varphi^{(1)}_{n,s}(\tau_0) + b^{(1)}_{n,s} \psi^{(1)}_{n,s}(\tau_0)] \Phi_{n,s}(r, \theta) = $$

$$= \sum_{n,s} a^{(2)}_{n,s} \Phi_{n,s}(r, \theta) ,$$

con implicita definizione delle $a^{(2)}_{n,s}$.

La condizione che determina la funzione $A_1(r, \theta)$, ossia le costanti $a^{(1)}_{n,s}$, è, posto $\tau_1 = \tau - \tau_0$: $T_2(r, \theta, \tau_1) = T_1(r, \theta, 0) = A_1(r, \theta)$, ossia:

$$(23) \qquad \sum_{n,s} [a^{(2)}_{n,s} \varphi^{(2)}_{n,s}(\tau_1) + b^{(2)}_{n,s} \psi^{(2)}_{n,s}(\tau_1)] \Phi_{n,s} = \sum_{n,s} a^{(1)}_{n,s} \Phi_{n,s} .$$

Dalla definizione (22) di $a^{(2)}_{n,s}$ e poichè sono note le funzioni $\varphi^{(i)}_{n,s}(t)$, $\psi^{(i)}_{n,s}(t)$ ed i coefficienti $b^{(i)}_{n,s}$, in base alle ipotesi fatte la (23) determina in modo unico, per identificazione dei coefficienti delle due serie, la funzione $A_1(r,\theta)$.

Questa dimostrazione è costruttiva, ma anzichè determinare le costanti $a^{(1)}_{n,s}$, ho adottato il seguente metodo, nel quale il processo di sovrapposizione ora accennato è analiticamente tradotto in maniera più diretta e compatta. Per la risoluzione del sistema (12) usiamo la scomposizione:

$$(24) \qquad T(r, \theta, t) = G(r, \theta, t) + H(r, \theta, t) ,$$

con

$$
(25)\qquad \begin{cases} \Delta G = \alpha^{-1}\, G_t\,, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \tau \\ (K G_r + h\, G)_{r=R} = h\, g(\theta,\ t), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \tau \\ G(r,\ \theta,\ 0) = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases}
$$

$$
(26)\qquad \begin{cases} \Delta H = \alpha^{-1}\, H_t\,, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \tau \\ (K H_r + h\, H)_{r=R} = 0\,, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \tau \\ H(r,\ \theta,\ 0) = H(r,\ \theta,\ \tau) + G(r,\ \theta,\ \tau), & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,. \end{cases}
$$

Risolviamo il sistema (25) con l'impiego del teorema di DUHAMEL ([7], pag. 30), che si presenta come un mezzo agevole per superare la difficoltà della discontinuità temporale della $g(\theta,\ t)$. La funzione $G(r,\ \theta,\ t)$ è fornita dall'integrale:

$$
(27)\qquad G(r,\ \theta,\ t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\, \overline{G}(r,\ \theta,\ \lambda,\ t - \lambda)\, \mathrm{d}\lambda,
$$

dove λ è un parametro e la $\overline{G}(r,\ \theta,\ \lambda,\ t)$ è soluzione del sistema (25), nel quale si è operata la sostituzione $g(\theta,\ t) \to g(\theta,\ \lambda)$. Si ottiene in tal modo la sovrapposizione degli effetti termici conseguenti alle due diverse condizioni al contorno nella successione temporale descritta dalla $g(\theta,\ t)$.

La $\overline{G}(r,\ \theta,\ \lambda,\ t)$ può essere ricercata come somma di due funzioni $X(r,\ \theta,\ \lambda)$ e $Y(r,\ \theta,\ \lambda,\ t)$, soluzioni dei rispettivi sistemi:

$$
(28)\qquad \begin{cases} \Delta X = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ (K X_r + h X)_{r=R} = h\, g(\theta,\lambda), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,, \end{cases}
$$

$$
(29)\qquad \begin{cases} \Delta Y = \alpha^{-1}\, Y_t, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \tau \\ (K Y_r + h Y)_{r=R} = 0, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t \leqslant \tau \\ Y(r,\ \theta,\ \lambda,\ 0) = -X(r,\ \theta,\ \lambda), & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,. \end{cases}
$$

Il significato fisico della funzione $X(r, \theta, \lambda)$ è in chiara correlazione con le soluzioni stazionarie (17) e (17').

Nel sistema (29) la separazione delle variabili nell'equazione di diffusione porta una tipica dipendenza esponenziale dal tempo, mentre per la coordinata radiale, essendo la $T(r, \theta, t)$ definita anche per $r = 0$, intervengono le sole funzioni di BESSEL di prima specie $j_n(\Gamma r)$. La costante Γ deve verificare l'equazione agli autovalori:

$$(K/h)\,\Gamma\, j_n'(\Gamma R) + j_n(\Gamma R) = 0, \tag{30}$$

essendo $j_n'(\Gamma r)$ la derivata di j_n rispetto all'argomento (Γr), le cui soluzioni (infinite, reali, semplici, numerabili) indicheremo con $\Gamma_s^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \dots;$ $s = 1, 2, \dots)$ o semplicemente con Γ_s nei casi non ambigui.

Si dimostra facilmente che la (30) soddisfa la condizione di ortogonalità delle funzioni $j_n(\Gamma_s r)$ rispetto all'indice s, con peso r^2 nell'intervallo $(0, R)$ ([7], pag. 196), per cui possiamo scrivere:

$$\int_0^R r^2\, j_n(\Gamma_s r)\, j_n(\Gamma_{s'} r)\, dr = \delta_{ss'}\, R^3\, M_{n,s}^2, \tag{31}$$

con

$$M_{n,s}^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{h^2}{\Gamma_s^2 K^2}\left(1 - \frac{K}{h R}\right) + 1 - \frac{n(n+1)}{\Gamma_s^2 K^2}\right\}[j_n(\Gamma_s R)]^2, \tag{32}$$

norma quadrata adimensionale delle funzioni $j_n(\Gamma_s r)$.

La funzione $\overline{G}(r, \theta, \lambda, t)$ è ottenuta in forma di serie e l'integrazione (27) va eseguita termine a termine. Daremo in seguito la prova che lo sviluppo così ottenuto della funzione $G(r, \theta, t)$ verifica in via non solo formale il sistema (25).

Hanno notevole importanza nella costruzione della $G(r, \theta, t)$ gli sviluppi dei fattori $(r/R)^n$, con $n = 0$ e $n = 2j + 1$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$, che dànno la dipendenza da r nelle soluzioni stazionarie (17) e (17'), in serie di $j_n(\Gamma_s r)$.

Introducendo i coefficienti:

$$B_{0,s} = M_{0,s}^{-2}\,(\Gamma_s R)^{-1}\, j_1(\Gamma_s^{(0)} R), \tag{33}$$

$$B_{2j+1,s} = M_{2j+1,s}^{-2}\,(\Gamma_s R)^{-1}\, j_{2(j+1)}(\Gamma_s^{(2j+1)} R), \qquad j = 0, 1, 2. \dots, \tag{34}$$

tali sviluppi sono identificabili con l'espansione del DINI delle potenze r/R ([8], pagg. 580-581), convergenti nell'intero intervallo $0 \leqslant r \leqslant R$.

Definiamo poi le funzioni del tempo:

$$I_{0,s}(t) = (1-\beta)\, e^{-\alpha\Gamma_s^2(t-\tau_0)}\eta(t-\tau_0) - e^{-\alpha\Gamma_s^2 t}\,, \tag{35}$$

$$I_{2j+1,s}(t) = C_{2j+1}\,[e^{-\alpha\Gamma_s^2(t-\tau_0)}\eta(t-\tau_0) - e^{-\alpha\Gamma_s^2 t}], \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{36}$$

dove $\beta = 2T_2/(T_0 + T_1)$; C_{2j+1} è dato dalla (16); la funzione $\eta(t-\tau_0)$ è così definita:

$$\eta(t-\tau_0) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t \leqslant \tau_0 \\ 1 & \text{per} \quad t > \tau_0\,. \end{cases} \tag{37}$$

Se chiamiamo infine con $U(r, \theta)$ la soluzione stazionaria (17), possiamo dare alla $G(r, \theta, t)$ la seguente espressione:

$$\begin{aligned} G(r, \theta, t) = {} & U(r, \theta)\, \eta(\tau_0 - t) + T_2\, \eta(t-\tau_0) + \\ & + \frac{1}{2}(T_0 + T_1) \sum_{s=1}^{\infty} B_{0,s} I_{0,s}(t) \frac{\text{sen}\,(\Gamma_s r)}{\Gamma_s r} + \\ & + (T_0 - T_1) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} B_{2j+1,s}\, I_{2j+1,s}(t)\, j_{2j+1}(\Gamma_s r)\, P_{2j+1}(\cos\theta), \end{aligned} \tag{38}$$

con

$$\eta(\tau_0 - t) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad t \leqslant \tau_0 \\ 0 & \text{per} \quad t > \tau_0\,. \end{cases} \tag{37'}$$

Sullo sviluppo (38) è semplice, ammessa la sua uniforme convergenza, verificare la continuità della $G(r, \theta, t)$ per $t = \tau_0$, facendo uso degli sviluppi del Dini sopra ricordati. Nello stesso punto, ammessa la derivabilità termine a termine rispetto al tempo, è invece evidente la diversità delle derivate destra e sinistra, come esplicitamente risulta dalle funzioni (35) e (36). Troviamo dunque conferma che il punto τ_0 è un punto angolare per la soluzione. La forma (38) per l'espressione di $G(r, \theta, t)$ è vantaggiosa, poichè in essa compaiono esplicitamente le soluzioni stazionarie (17) e (17'), rendendo così evidente il meccanismo di riproduzione della combinazione $KG_r + hG$ al limite per $r \to R$. Si può mostrare infatti, in base ad una analisi dei procedimenti usati ed al carattere esponenzialmente attenuato delle funzioni (35-36) rispetto all'indice s, che le serie mediante le quali è espressa la $G(r, \theta, t)$ nella (38), possiedono i requisiti di convergenza necessari perchè questa sia la effettiva soluzione del sistema (25).

La soluzione $H(r, \theta, t)$ del sistema (26) si ottiene facilmente, nota la (38), e si esprime con analogo sviluppo, i cui coefficienti sono:

$$
\text{(39)} \qquad \begin{cases} p_{0,s} = (1 - e^{-\alpha\Gamma_s^2\tau})^{-1}\{\beta(1 - e^{-\alpha\Gamma_s^2\tau_1}) - e^{-\alpha\Gamma_s^2\tau_1} - e^{-\alpha\Gamma_s^2\tau}\} \\ p_{2j+1,s} = (1 - e^{-\alpha\Gamma_s^2\tau})^{-1}\, C_{2j+1}\,(e^{-\alpha\Gamma_s^2\tau_1} - e^{-\alpha\Gamma_s^2\tau}), \qquad j = 0,\ 1,\ 2, \ldots . \end{cases}
$$

Si ha precisamente:

$$
\text{(40)} \qquad H(r, \theta, t) = \frac{1}{2}(T_0 + T_1)\sum_{s=1}^{\infty} p_{0,s}\, e^{-\alpha\Gamma_s^2 t}\,\frac{\text{sen}\,(\Gamma_s r)}{\Gamma_s r} +
$$

$$
+ (T_0 - T_1)\sum_{j=0}^{\infty}\ \sum_{s=1}^{\infty} p_{2j+1,s}\, e^{-\alpha\Gamma_s^2 t}\, j_{2j+1}(\Gamma_s r)\, P_{2j+1}(\cos\theta).
$$

La (24) con le (38) e (40) dà infine:

$$
\text{(41)} \qquad T(r, \theta, t) = U(r, \theta)\ \eta(\tau_0 - t) + T_2\ \eta(t - \tau_0) +
$$

$$
+ \frac{1}{2}(T_0 + T_1)\sum_{s=1}^{\infty} B_{0,s}\,[I_{0,s}(t) + p_{0,s}\, e^{-\alpha\Gamma_s^2 t}]\,\frac{\text{sen}\,(\Gamma_s r)}{\Gamma_s r} +
$$

$$
+ (T_0 - T_1)\sum_{j=0}^{\infty}\ \sum_{s=1}^{\infty} B_{2j+1,s}\,[I_{2j+1,s}(t) + p_{2j+1,s}\, e^{-\alpha\Gamma_s^2 t}]\, j_{2j+1}(\Gamma_s r)\, P_{2j+1}(\cos\theta).
$$

Le conclusioni esposte sulla regolarità della (38) sono immediatamente estendibili alla (40) e quindi alla (41).

Nell'ipotesi che sia, con evidente significato fisico, $\alpha\,\Gamma_s^{(n)2}\,\tau_0 > \alpha\,\Gamma_s^{(n)2}\,\tau_1 \gg 1$ per ogni n ed s, $T(r, \theta, \tau_0)$ e $T(r, \theta, \tau)$ approssimano ripettivamente le soluzioni stazionarie $U(r, \theta)$ e T_2.

Notiamo ancora che la dimostrazione di unicità della soluzione (41) resta convalidata a posteriori, in quanto gli sviluppi (20) e (21) sono riconoscibili nella (41) con l'uso della espansione del Dini delle funzioni $U(r, \theta)$ e T_2.

Bibliografia.

[1] J. F. HEYDA, *Temperature distribution in an orbiting sphere with alternate heating and cooling*, SIAM Rev. 5 (1963), 113-118.

[2] F. L. BAGBY, *Materials in Space*, Advances in Space Science and Technology 2, Acad. Press, N.Y. and London 1960.

[3] A. ALBERI and C. ROSENKRANZ, *Structure of Carriers and Space Vehicles*, Advances in Space Science and Technology 3, Acad. Press, N.Y. and London 1961

[4] M. JAKOB, *Heat Transfer* (I). J. Wiley & Sons Inc., London 1956.

[5] CH. PERRIN DE BRICHAMBAUT, *Rayonnement solaire et échanges radiatifs naturels*, Gauthier-Villars, Paris 1963.

[6] G. VITALI e G. SANSONE, *Funzioni di variabile reale*. Vol. II, Zanichelli, Bologna 1952.

[7] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford 1959.

[8] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. University Press, Cambridge 1922.

* * *