Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 243-250

MARIO SERVI (*)

Sulle sottalgebre «normali» di una $\boldsymbol{W}$-algebra. (**)

In [3] R. MAGARI ha chiamato «sottalgebra normale» di un'algebra di BOOLE A una sottalgebra B tale che:

$$B = I \cup F, \tag{1}$$

dove I è un ideale di A ed F è il filtro dei complementari degli elementi di I. Egli ha inoltre provato che se B è una sottalgebra propria, allora la scomposizione (1) è unica, nel senso che se I, I' sono ideali di A ed F, F' i relativi filtri dei complementari, allora da $B = I \cup F = I' \cup F'$ segue $I = I'$ (e quindi $F = F'$). Si noti che una sottalgebra B di A è normale se e solo se è controimmagine, in un omomorfismo $f : A \to$ (1), dell'algebra semplice $\boldsymbol{W} = \{0,1\}$. Noi vogliamo estendere il precedente risultato alle $\boldsymbol{W}$-algebre (2), dopo aver convenientemente esteso ad esse il concetto di «sottalgebra normale».

Richiamiamo brevemente il concetto di $\boldsymbol{W}$-algebra (nel seguito ci riferiremo sistematicamente ad algebre non degeneri (cfr. [1])). Dato un insieme W costituito da almeno due elementi, si indichi con $\mathfrak{F}$ l'insieme di tutte le operazioni finitarie (3) su W e sia $\boldsymbol{W}$ l'algebra $(W, \mathfrak{F})$. Ricordiamo che si dice *$\boldsymbol{W}$-algebra* ogni algebra $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{F})$ appartenente alla varietà (4) generata da $\boldsymbol{W}$. Indicheremo per semplicità con lo stesso simbolo un'operazione di $\boldsymbol{W}$ e la corrispondente operazione di A. Si ricordi (5) che, a meno di isomorfismi, ogni $\boldsymbol{W}$-algebra con-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 37 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1967-68. — Ricevuto: 9-X-1967.

(1) Questo simbolo indica, ovviamente, che A è il dominio di f.

(2) Cfr., per tale concetto, R. MAGARI [2].

(3) Ci si potrebbe, sostanzialmente, limitare a quelle binarie: cfr. MAGARI ([2]).

(4) Cfr., ad esempio, [1].

(5) Cfr. [2].

tiene $\boldsymbol{W}$ come sottalgebra e che $\boldsymbol{W}$ è priva di sottalgebre proprie; perciò se $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{F})$ è una $\boldsymbol{W}$-algebra, considereremo W come sottoinsieme di $\mathfrak{A}$.

Se A è una $\boldsymbol{W}$-algebra ed $f\colon A \to$ un omomorfismo, è chiaro che $f^{-1}(\boldsymbol{W})$ è una sottalgebra di A. Diremo che una sottalgebra B di A è *normale* se esiste un omomorfismo $f\colon A \to$ tale che $B = f^{-1}(\boldsymbol{W})$. Ovviamente vale il:

Lemma 1. *Se B è una sottalgebra normale di A, allora esiste una famiglia disgiunta $(I_w)_{w \in W}$ tale che, per ciascun $w \in W$, I_w sia un w-ideale* (6) *e*

$$B = \bigcup_{w \in W} I_w . \tag{2}$$

Dimostrazione.

Se $B = f^{-1}(\boldsymbol{W})$, è sufficiente porre $I_w = f^{-1}(w)$, per ogni $w \in W$.

Per invertire il Lemma 1, occorre ora una premessa che connette la nostra definizione di sottalgebra normale con quella data in [3]. Per ogni coppia $u, w \in W$, si indichi con ε_u^w la funzione da W a W definita da:

$$\varepsilon_u^w x = \begin{cases} w, \text{ se } x = u \\ u, \text{ se } x = w \\ x, \text{ negli altri casi.} \end{cases}$$

Le corrispondenti funzioni da A ad A, che, giusta le convenzioni fatte, continueremo a indicare con ε_u^w, soddisfano le equazioni:

$$\varepsilon_u^w \varepsilon_u^w x = x , \tag{3}$$

$$\varepsilon_u^w = \varepsilon_w^u , \tag{4}$$

$$\varepsilon_w^w x = x , \tag{5}$$

perchè così accade in $\boldsymbol{W}$. Possiamo ora enunciare il

Lemma 2. *Una sottalgebra B di A è normale se e solo se esiste un $w \in W$*

(6) Cfr. [2].

ed un w-ideale (proprio) I_w di A tale che

$$B = \bigcup_{u \in W} \varepsilon_u^w(I_w) . \tag{6}$$

Dimostrazione.

Sia $f: A \to$ e sia $I_w = f^{-1}(w)$; allora $\varepsilon_u^w(I_w)$ è l'u-nucleo di f, cioè $\varepsilon_u^w(I_w) = f^{-1}(u)$. Infatti:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u^w(I_w) &= \{\varepsilon_u^w x: \quad x \in I_w\} = \{\varepsilon_u^w x: \quad fx = w\} = \\ &= \{\varepsilon_u^w x: \quad \varepsilon_u^w fx = u\} = \{\varepsilon_u^w x: \quad f\,\varepsilon_u^w x = u\} = \{y: \quad fy = u\} = f^{-1}(u) . \end{aligned}$$

Ne segue subito che se $B = f^{-1}(W)$, vale la scomposizione (6), con $I_w = f^{-1}(w)$. Viceversa, valga la scomposizione (6), con I_w w-ideale (proprio) di A. Sappiamo da [2] che esiste allora un omomorfismo $f: A \to$ tale che $I_w = f^{-1}(w)$. Da quanto visto sopra, si ha allora $B = \bigcup_{u \in W} \varepsilon_u^w(I_w) = \bigcup_{u \in W} f^{-1}(u) = f^{-1}(W)$, e B è normale.

Siamo ora in grado di invertire il Lemma 1.

Lemma 3. *Sia $(I_w)_{w \in W}$ una famiglia disgiunta tale che per ogni $w \in W$, I_w sia un w-ideale e tale che $B = \bigcup_{w \in W} I_w$ sia una sottalgebra di A. Allora B è normale.*

Dimostrazione. Ovviamente sarà sufficiente dimostrare che, nelle ipotesi fatte, $I_u = \varepsilon_u^w(I_w)$, $\forall u \in W \sim \{w\}$. Si consideri dunque un fissato $u \in W$, $u \neq w$, e si ponga $x^* = \varepsilon_u^w x$ $(x \in A)$. Sarà sufficiente provare l'inclusione

$$\varepsilon_u^w(I_w) \subseteq I_u . \tag{7}$$

Sia dunque $x \in I_w$. Giacchè B è sottalgebra di A, sarà $x^* \in B$; esiste allora un $v \in W$ tale che $x^* \in I_v$. Si dànno tre casi: $v = w$, $w \neq v \neq u$, $v = u$; se dimostriamo che i primi due conducono ad assurdo, la (7) sarà dimostrata, e con essa il lemma. Sia dunque $v = w$. Si consideri l'operazione binaria a definita in W da:

$$\begin{cases} a(z,\ y) = u, \text{ se } y = z^*; \\ a(z,\ y) = w, \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Essa soddisfa le identità:

$$\begin{cases} a(z,\ z^*) = u\ , & (8) \\ a(w,\ w) = w. & (9) \end{cases}$$

Dalla (9), per la definizione di ideale (cfr. [2]), essendo x, $x^* \in I_w$, segue $a(x, x^*) \in I_w$, quindi, per la (8), $u \in I_w$, contro l'ipotesi che I_u ed I_w siano disgiunti. Sia allora $u \neq v \neq w$. Si ha l'identità:

$$v^* = v\,, \tag{10}$$

da cui, per la definizione di ideale, essendo $x^* \in I_v$, è $(x^*)^* \in I_v$, e cioè $x \in I_v$, per la (3). Questa contraddice di nuovo l'ipotesi.

Possiamo riassumere quanto precede nel

Teorema 1. *Una sottalgebra B di una W-algebra A è normale se e solo se è unione di una famiglia disgiunta $(I_w)_{w \in W}$ tale che per ciascun $v \in W$, I_v sia un v-ideale di A.*

Corollario. *Nel caso delle algebre di Boole, si può sostituire l'ipotesi che F sia il filtro dei complementari degli elementi di I con quella, apparentemente più debole, che sia un filtro disgiunto da I.*

Finalmente mostriamo che se per una sottalgebra normale B di A esistono due scomposizioni distinte del tipo (2), allora $B = A$. Sia infatti:

$$B = \bigcup_{v \in W} I_v = \bigcup_{v \in W} I'_v\,, \tag{11}$$

e supponiamo

$$I_w \neq I'_w\,. \tag{12}$$

Sia, ad esempio

$$x \in I_w \tag{13}$$

ed $x \notin I'_w$. Per la (11) esiste allora un $u \in W$ tale che $x \in I'_u$, da cui, in virtù dei precedenti lemmi,

$$x^* \in I'_w\,. \tag{14}$$

Consideriamo ora le operazioni binarie b, c, d definite in W rispettivamente da

$$\begin{cases} b(w,\ z) = b(z,\ w) = w\,, \\ b(z,\ t) \ = t, \qquad \text{per} \qquad z,\ t \neq w; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(w,\ z) = c(z,\ w) = z\,, \\ c(u,\ z) = c(z,\ u) = u\,, \\ c(z,\ t) = z, \qquad \text{per} \qquad z,\ t \neq u,\ w\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(z,\ w) = d(w,\ z) = z\,, \\ d(z,\ t) = t\,, \qquad \text{per} \qquad t \neq w\,. \end{cases}$$

Esse soddisfano le identità:

$$b(w,\ y) = w\,, \tag{15}$$

$$c\big(b(z,\ y),\, b(z^*,\ y)\big) = y\,, \tag{16}$$

$$c(w,\ w) = w\,, \tag{17}$$

$$d(y,\ v) = v\,, \qquad \text{con} \qquad v \in W \sim \{w\}, \tag{18_v}$$

$$d\big(y,\ b(x^*,\ y)\big) = y\,. \tag{19}$$

Sia ora y un qualunque elemento di A. Dalla (13) e dalla (15), per la definizione di ideale, si ha:

$$b(x,\ y) \in I_w\,. \tag{20}$$

Analogamente, dalla (14) si ha $b(x^*,\ y) \in I'_w \subseteq B$; esiste dunque un $v \in W$ tale che

$$b(x^*,\ y) \in I_v\,. \tag{21}$$

Distinguiamo due casi: $v = w$ e $v \neq w$. Nel primo caso, la (21) fornisce:

$$b(x^*,\ y) \in I_w\,. \tag{22}$$

Dalle (22), (20) e (17), per la definizione di ideale, si ha:

$$c\big(b(x,\ y),\ b(x^*,\ y)\big) \in I_w\,, \tag{23}$$

quindi, per la (16), $y \in I_w$ e quindi $y \in B$.

Nel secondo caso è

$$b(x^*, y) \in I_v, \qquad v \in W \sim \{w\}, \tag{24}$$

ma dalla (18_v) si ha $d(y, b(x^*, y)) \in I_v$, cioè, per la (19), $y \in I_v$, e di nuovo $y \in B$. Dunque, in ogni caso si trova $y \in B$, e, per l'arbitrarietà di y, $B = A$. Possiamo così concludere col seguente

Teorema 2. *Sia A una $\boldsymbol{W}$-algebra e B una sua sottalgebra normale* propria. *Essa allora ammette un'unica scomposizione del tipo* (2) *in ideali* (*disgiunti*) *di A.*

Si è visto che se B è sottalgebra normale propria di A, allora la scomposizione (2) è unica. Vogliamo ora indagare cosa può accadere se $B = A$. Il problema si riconduce allo studio degli epimorfismi di A su $\boldsymbol{W}$. Sappiamo che nel caso booleano (W costituito da 2 elementi), se $A \approx \boldsymbol{W}$ esiste un solo epimorfismo $A \to \boldsymbol{W}$, mentre se $A \not\approx \boldsymbol{W}$ ne esistono più d'uno. È facile estendere questi risultati al caso di W finito. Se si abbandona l'ipotesi che W sia finito, la situazione diviene più complessa, e possono presentarsi anche i seguenti casi:

1) A non è sottalgebra normale di se stessa: basta considerare un'algebra semplice non isomorfa a $\boldsymbol{W}$ (cfr. [2]).

2) $A \not\approx \boldsymbol{W}$, ed esiste un solo epimorfismo di A su $\boldsymbol{W}$.

Un esempio che si trovi nel caso 2) si può costruire nel seguente modo. Sia $W = \{w_0, w_1, \ldots\}$ numerabile e sia $\boldsymbol{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Si dia a W^N la struttura di $\boldsymbol{W}$-algebra potenza diretta. Per ogni $w_i \in W$ e per ogni $p \in W^N$, diciamo che p è *associato* a w_i se $p^{-1}(w_i)$ contiene un cofinito dell'insieme $2\boldsymbol{N}$ dei pari. Gli elementi di W^N, ciascuno dei quali è associato ad un qualche elemento di W (e quindi, ovviamente, ad uno solo), costituiscono una sottalgebra, C_2, di W^N. Siano infatti $p, q \in C_2$, p sia associato a w_i e q sia associato a w_j; sia infine f un'operazione (ad esempio binaria) e sia $w_k = f(w_i, w_j)$. Allora $f(p, q)$ è associato a w_k, giacchè $f(p, q)^{-1}(w_k) \supseteq p^{-1}(w_i) \cap q^{-1}(w_j)$. Per dimostrare questa inclusione, prendiamo un $x \in p^{-1}(w_i) \cap q^{-1}(w_j)$; allora $f(p, q)\ x = f(px, qx) = f(w_i, w_j) = w_k$ e perciò $x \in f(p, q)^{-1}(w_k)$. Ne segue che $f(p, q)^{-1}(w_k)$ contiene un cofinito di $2\boldsymbol{N}$, dal momento che l'intersezione di due cofiniti è un cofinito. Resta così dimostrato che C_2 è una sottalgebra.

Sia ora p associato a $w \in W$. Diciamo che p è *associato strettamente* a w se $p^{-1}(v)$ è finito, $\forall v \in W \sim \{w\}$. Sia C_1 l'insieme degli elementi che sono associati strettamente a un qualche elemento di W. Vale la seguente

Proposizione. *C_1 genera C_2.*

Dimostrazione. Sia $p \in C_2$ e supponiamo che p sia associato a w_0 (questa ipotesi ovviamente non è restrittiva). Definiamo $r \in W^N$ come segue:

$$\begin{cases} r\,x = w_0\,, & \text{se} \quad p\,x = w_0 \\ r\,x = w_{x+1}\,, & \text{se} \quad p\,x \neq w_0\,. \end{cases}$$

Ovviamente r è associato strettamente a w_0, perchè $r^{-1}(w_0) = p^{-1}(w_0)$ ed $r^{-1}(w_{k+1}) \subseteq \{k\}$. Si consideri ora un'operazione binaria f tale che

$$\begin{cases} f(w_0\,,\ w_0) = w_0 \\ f(w_{x+1}\,,\ w_{x+1}) = p\,x; \end{cases}$$

è facile controllare che $f(r,\ r) = p$. Infatti, preso un $x \in \boldsymbol{N}$, se $p\,x = w_0$, si ha $f(r,\ r)x = f(rx,\ rx) = f(w_0\,,\ w_0) = w_0 = px$; se $px \neq w_0$, si ha $f(r,\ r)x = f(rx,\ rx) = f(w_{x+1}\,,\ w_{x+1}) = px$. Dunque C_2 è generata da C_1. Sia ora F il filtro dei cofiniti di $\boldsymbol{N}$, e sia $A = C_2/F$ il quoziente fatto rispetto ad F, definito, ricordiamo, da:

$$[p] = [q] \qquad \text{se e solo se} \qquad \{x \in \boldsymbol{N}: \quad px = qx\} \in F\,, \qquad\qquad (p,\ q \in C_2)\,.$$

Vogliamo dimostrare che A fornisce l'esempio cercato, cioè che:

α) esiste un omomorfismo non iniettivo $\varphi: A \to \boldsymbol{W}$;

β) l'omomorfismo $A \to \boldsymbol{W}$ è unico.

Per definire l'omomorfismo φ di cui in α), osserviamo che se $p,\ q \in C_2$, tali che $[p] = [q]$, allora $p,\ q$ sono associati ad un medesimo $w \in W$. Supponiamo infatti che X sia un cofinito dei pari tale che $p^{-1}(w) \supseteq X$. Si ha allora

$$D = \{x \in \boldsymbol{N}: \quad px = w\} \supseteq X.$$

Se poi $[p] = [q]$, allora l'insieme $E = \{x \in \boldsymbol{N}: px = qx\}$ appartiene ad F, cioè è un cofinito. Ne segue che $X \cap E$ è un cofinito dei pari, e l'asserto segue ora osservando che:

$$q^{-1}(w) = \{x \in \boldsymbol{N}: \quad qx = w\} \supseteq \{x \in \boldsymbol{N}: \quad qx = px = w\} = D \cap E \supseteq X \cap E.$$

Preso ora un qualunque elemento $[p]$ di A, indichiamo con $\varphi[p]$ l'unico elemento di W a cui p (e quindi, per l'osservazione fatta, ogni rappresentante di $[p]$) è associato. Resta così definita una funzione $\varphi: A \to \boldsymbol{W}$; dimostriamo che è un omomorfismo. Sia f una qualunque operazione (ad esempio binaria) su

W e siano $p,\ q \in C_2$. Dobbiamo provare che:

$$\varphi f([p],\ [q]) = f(\varphi[p]\ ,\ \varphi[q])\,. \tag{25}$$

Sia $\varphi[p] = v$, $\varphi[q] = w$, $u = f(v,\ w)$. Si indichi con ψ l'omomorfismo canonico $C_2 \to A$. La (25) equivale dunque a mostrare che $u = \varphi\, f(\psi p,\ \psi q) = \varphi\ \psi f(p,\ q) = \varphi[f(p,\ q)]$ e questa a sua volta dice che $f(p,\ q)$ è associato ad u. Sia $X \subseteq p^{-1}(v)$, $Y \subseteq q^{-1}(w)$, X, Y cofiniti di $2N$. Allora è $X \cap Y \subseteq p^{-1}(v) \cap q^{-1}(w) = \{x \in N:\ px = v \text{ e } qx = w\} \subseteq \{x \in N:\ f(px,\ qx) = f(v,\ w)\} = \{x \in N:\ f(p,\ q)x = u\} = f(p,\ q)^{-1}(u)$ e poichè $X \cap Y$ è un cofinito di $2N$, segue l'asserto. È poi ovvio che φ non è iniettivo.

Per mostrare che β) è soddisfatta, giacchè A è generata da C_1/F, basterà ora far vedere che se $p \in C_1$ è associato strettamente a w, allora ogni omomorfismo $A \to W$ porta $[p]$ in w. Sia dunque p strettamente associato a w, sia $\varphi:\ A \to W$ un omomorfismo, e sia $\varphi[p] = v \neq w$. Preso un u in W diverso sia da v che da w, mostriamo che $[p] = \varepsilon_u^v[p]$ (ovvero, $[p] = [\varepsilon_u^v p]$, perchè ψ è un omomorfismo). Si osservi ora che $px = \varepsilon_u^v px$ se e solo se $x \notin p^{-1}(u) \cup p^{-1}(v)$, e poichè questo insieme è finito, se ne conclude che $\{x \in N:\ px = \varepsilon_u^v px\} \in F$, perchè cofinito; ne segue $[p] = [\varepsilon_u^v p]$. Ora si ha $v = \varphi[p] = \varphi\varepsilon_u^v[p] = \varepsilon_u^v\varphi[p] = \varepsilon_u^v v = u$, il che è assurdo. L'esempio è così trovato.

Bibliografia.

[1] P. M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper and Row, New York 1965.

[2] R. Magari, *Su una classe equazionale di algebre*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **75** (1967), 277-312.

[3] R. Magari, *Su una proprietà caratteristica delle teorie incomplete*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **21** (1966), 292-301.

[4] R. Magari, *Sulla varietà generata da un'algebra funzionalmente completa di cardinalità infinita*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **76** (1967), 305-324.

Sunto.

Si estende alle W-algebre un risultato di R. Magari sulle sottalgebre «normali» delle algebre di Boole.

Summary.

We extend to W-algebras a result, due to R. Magari, about the «normal» subalgebras of a Boolean algebra.

* * *