Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 149-159

BIANCA MANFREDI (*)

Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni di accumulazione periodiche. (**)

1. - Introduzione.

Uno studio su l'esistenza e la non esistenza di oscillazioni periodiche di un problema differenziale del secondo ordine, della Meccanica non lineare, mi ha condotto ad analizzare la natura delle funzioni di accumulazione (sempre esistenti) di certe successioni (cfr. n. 2) che, per comodità di riferimento, chiamo qui *progressioni di aritmeticità* (1).

Penso che le successioni di questo tipo possano non essere prive di qualche interesse nelle Matematiche applicate: ciò, perchè le loro funzioni distinte di accumulazione, sotto ipotesi molto semplici (cfr. n. 3), esistono sempre, e, quando sono in numero finito, sono tutte periodiche con lo stesso periodo.

2. - Le progressioni di aritmeticità.

Sia data una funzione $\psi \equiv \psi(t)$, reale e univoca per ogni $t \geqslant 0$, e sia fissato un qualsiasi numero reale $\tau > 0$.

La particolare successione di funzioni (della sola variabile t)

$$\psi(t), \qquad \psi(t+\tau), \qquad \psi(t+2\tau), \qquad \psi(t+3\tau), \qquad \dots,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1967-68. — Ricevuto il 10-IV-1967.

(1) Per la spiegazione di tale denominazione cfr. n. 2.

dove la funzione ψ è calcolata successivamente su i numeri della progressione aritmetica

$$t, \qquad t+\tau, \qquad t+2\tau, \qquad t+3\tau, \qquad \dots,$$

si dirà brevemente, in questo lavoro, una *progressione di aritmeticità*, o più estesamente la *progressione di aritmeticità di generatrice* $\psi(t)$ *e di ragione* τ.

Questa progressione di aritmeticità si indicherà con il simbolo

$$(\Psi)_\tau$$

e la frase « progressione di aritmeticità », oppure « progressioni di aritmeticità », si abbrevierà nel seguito scrivendo: pr. di ar. .

3. - Ipotesi su la funzione generatrice $\psi(t)$ della pr. di ar. $(\Psi)_\tau$.

Nel seguito la funzione $\psi(t)$, assunta come funzione generatrice della pr. di ar. $(\Psi)_\tau$, sarà:

1) reale e univoca nell'intervallo $(0, +\infty)$,

2) *limitata* e *uniformemente continua* in $(0, +\infty)$.

4. - Alcune premesse.

4.1. – Si vede subito che *le varie successioni resto* (²) *di una pr. di ar.* $(\Psi)_\tau$ *sono tutte pr. di ar.: esse sono generate, ordinatamente, dalle funzioni*

$$\psi(t+\tau), \qquad \psi(t+2\tau), \qquad \psi(t+3\tau), \qquad \dots,$$

ed hanno la stessa ragione τ.

(²) Considerata una qualsiasi successione di enti:

$$\{\alpha_n\}: \qquad \alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \dots,$$

le varie successioni

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \dots; \\ & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \dots; \\ & & \alpha_3, & \alpha_4, & \dots; \\ & & & \dots\dots & \dots \end{array}$$

si chiamano, ordinatamente, *la successione resto d'indice* 1 (o *prima successione resto*), *la successione resto d'indice* 2 (o *seconda successione resto*), ecc. della successione $\{\alpha_n\}$.

4.2. – Prefissato un numero naturale $m > 1$, si nota che *le sottosuccessioni d'ordine* m [3] *della pr. di ar.* $(\Psi)_\tau$, *ossia le successioni*

$$\begin{array}{llll}
\psi(t), & \psi(t+m\tau), & \psi(t+2m\tau), & \dots; \\
\psi(t+\tau), & \psi(t+(m+1)\tau), & \psi(t+(2m+1)\tau), & \dots; \\
\psi(t+2\tau), & \psi(t+(m+2)\tau), & \psi(t+(2m+2)\tau), & \dots; \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi(t+(m-1)\tau), & \psi(t+(2m-1)\tau), & \psi(t+(3m-1)\tau), & \dots,
\end{array}$$

sono tutte pr. di ar.; *esse hanno, ordinatamente, le generatrici*

$$\psi(t), \qquad \psi(t+\tau), \qquad \psi(t+2\tau), \qquad \dots, \qquad \psi(t+(m-1)\tau),$$

ed hanno la stessa ragione $m\,\tau$.

4.3. – Accenno ora ad alcune nozioni su le funzioni di accumulazione (supposto esistenti) di una successione di funzioni

$$\{u_n(t)\}: \qquad u_0(t), \quad u_1(t), \quad u_2(t), \quad \dots, \quad u_n(t), \quad \dots \qquad (t \in I),$$

dove I è un intervallo dell'asse t.

Anzitutto, per brevità, in luogo di «le funzioni di accumulazione» dirò *le accumulazioni*, e in luogo di «l'insieme di tutte le funzioni di accumulazione» dirò *l'accumulazione totale*.

È bene distinguere fra le accumulazioni di una successione $\{u_n(t)\}$ quelle $\varrho(t)$ (se ne esistono) tali che nella successione vi siano infinite funzioni $u_n(t)$ eguali a $\varrho(t)$: simili $\varrho(t)$ si diranno *accumulazioni per iterazione*.

Ricordo che *l'accumulazione totale è sempre un insieme chiuso*, in quanto un'accumulazione di accumulazioni di funzioni $u_n(t)$ è, manifestamente,

---

[3] Considerata una qualsiasi successione di enti α_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) e fissato un numero naturale $m > 1$, possiamo spezzare la successione nelle m sottosuccessioni seguenti

$$\begin{array}{llll}
\alpha_0, & \alpha_m, & \alpha_{2m}, & \dots; \\
\alpha_1, & \alpha_{m+1}, & \alpha_{2m+1}, & \dots; \\
\alpha_2, & \alpha_{m+2}, & \alpha_{2m+2}, & \dots; \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{m-1}, & \alpha_{2m-1}, & \alpha_{3m-1}, & \dots.
\end{array}$$

A queste m successioni daremo il nome di *sottosuccessioni d'ordine* m della considerata successione $\{\alpha_n\}$.

anche una accumulazione delle $u_n(t)$. Se, quindi, indichiamo con $\{u_n(t)\}'$ l'accumulazione totale di $\{u_n(t)\}$ e con $\{u_n(t)\}''$ l'accumulazione totale di $\{u_n(t)\}'$, abbiamo:

$$\{u_n(t)\}' \supseteq \{u_n(t)\}''.$$

Infine, per il mio studio si presenta utile la seguente

Definizione. Detta $\lambda(t)$ un'accumulazione della successione $\{u_n(t)\}$, dirò che una sottosuccessione di $\{u_n(t)\}$ è una «*sottosuccessione completa* per $\lambda(t)$» quando sopprimendo in $\{u_n(t)\}$ le funzioni della sottosuccessione, si ottiene una successione che non ha $\lambda(t)$ per accumulazione.

In particolare, una sottosuccessione di $\{u_n(t)\}$ completa per $\lambda(t)$ può essere anche convergente a $\lambda(t)$.

Segue facilmente: *Due sottosuccessioni di $\{u_n(t)\}$ complete per $\lambda(t)$ e convergenti a $\lambda(t)$ differiscono necessariamente per un numero finito di funzioni.*

Inoltre abbiamo: *Due sottosuccessioni di $\{u_n(t)\}$, la prima completa per $\lambda(t)$ e convergente a $\lambda(t)$, la seconda soltanto convergente a $\lambda(t)$, sono così legate: i termini della seconda sottosuccessione con indici abbastanza grandi appartengono tutti alla prima sottosuccessione.*

5. - Teorema I.

L'accumulazione totale (cfr. n. 4.3), *in un qualunque intervallo* $(0, T)$ *con* $0 < T < +\infty$, *della pr. di ar.* $(\Psi)_\tau$ *non varia mutando nella progressione la variabile t in* $t + \tau$, *o più generalmente t in* $t + N\tau$ *con N intero positivo comunque grande* [*proprietà invariantiva dell'accumulazione totale di* $(\Psi)_\tau$].

Dimostrazione. Mutando in $(\Psi)_\tau$ la t in $t + \tau$ si ottiene la successione resto d'indice 1 (cfr. n. 4.1) della $(\Psi)_\tau$; mutando in $(\Psi)_\tau$ la t in $t + N\tau$ si ottiene la successione resto d'indice N della $(\Psi)_\tau$. Ora tali successioni resto hanno proprio la stessa accumulazione totale della successione di partenza $(\Psi)_\tau$: ciò perchè (come segue dalla definizione di una accumulazione) l'accumulazione totale di una successione non dipende affatto dalla presenza o meno di un numero finito (anche arbitrariamente grande) di termini della successione stessa.

6. - Teorema II.

L'accumulazione totale, in un qualunque intervallo $(0, T)$ *con* $0 < T < +\infty$, *della pr. di ar.* $(\Psi)_\tau$ *non è mai vuota, in quanto nell'intervallo* $(0, T)$ *la pr. di ar.* $(\Psi)_\tau$ *ha almeno una accumulazione* $\lambda(t)$ *(necessariamente continua).*

D i m o s t r a z i o n e. Notiamo subito che dalle ipotesi poste su la funzione $\psi(t)$ (cfr. n. 3) discende facilmente che la pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ è formata da funzioni equilimitate ed equicontinue in ogni intervallo $(0, T)$. Queste affermazioni essendo proprio le ipotesi del noto teorema di ASCOLI su la esistenza di accumulazioni, varrà la conclusione del teorema di ASCOLI, cioè proprio quanto afferma il teorema da provare.

7. - Alcuni esempi semplici.

Per fissare le idee, ecco ora alcuni esempi semplici di progressioni di aritmeticità con le relative accumulazioni totali.

7.1. – 1) Si abbia

$$\psi(t) \equiv (1 + t \operatorname{sen} t)/(1 + t) ,$$

e scegliamo $\tau = 2\pi$. Si vede facilmente che è

$$\lim_{n\to\infty} \psi(t + n\tau) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (t + n\cdot 2\pi) \operatorname{sen} t}{1 + t + n\cdot 2\pi} = \operatorname{sen} t ,$$

onde [tenendo presente il Teorema II (n. **6**)] l'accumulazione totale della pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ è formata soltanto dalla funzione $\lambda(t) \equiv \operatorname{sen} t$.

2) Assumiamo ora

$$\psi(t) \equiv \operatorname{sen} t ,$$

e conserviamo $\tau = 2\pi$. Si trova subito che la corrispondente pr. di ar. è

$$\operatorname{sen} t, \qquad \operatorname{sen} t, \qquad \operatorname{sen} t, \qquad \dots,$$

onde l'accumulazione totale di questa pr. di ar. è formata solo da $\lambda(t) \equiv \operatorname{sen} t$, che è un'accumulazione per iterazione (cfr. n. **4.3.**).

7.2. – 1) Sia ancora

$$\psi(t) \equiv (1 + t \operatorname{sen} t)/(1 + t) ,$$

e scegliamo invece $\tau = \pi$. Per la corrispondente pr. di ar. si trova facilmente che è

$$\lim_{n\to\infty} \psi(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t, \qquad \lim_{n\to\infty} \psi(t + (2n + 1)\pi) = - \operatorname{sen} t,$$

onde si conclude che l'accumulazione totale della presente pr. di ar. è formata soltanto dalle due funzioni

$$\lambda(t) \equiv \operatorname{sen} t, \qquad \lambda(t+\pi) \equiv \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t\,.$$

2) Assumiamo ora

$$\psi(t) \equiv \operatorname{sen} t$$

e conserviamo $\tau = \pi$. Si trova rapidamente che la corrispondente pr. di ar. è

$$\operatorname{sen} t, \qquad -\operatorname{sen} t, \qquad \operatorname{sen} t, \qquad -\operatorname{sen} t, \qquad \ldots,$$

onde l'accumulazione totale di questa pr. di ar. è formata dalle accumulazioni per iterazione

$$\lambda(t) \equiv \operatorname{sen} t, \qquad \lambda(t+\pi) \equiv \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t.$$

8. - Teorema III.

La pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ *definisce la funzione* $\lambda(t)$ *del Teorema* II (cfr. n. 6) *in tutto l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$.

Questa funzione $\lambda(t)$ *è d'accumulazione per la pr. di ar.* $(\Psi)_\tau$ *in ogni intervallo* $(-T, T)$ *con* $0 < T < +\infty$. *Non è detto, però, che* $\lambda(t)$ *sia d'accumulazione per* $(\Psi)_\tau$ *in* $(-\infty, +\infty)$.

Dimostrazione. Detto N un numero naturale comunque grande, consideriamo la successione resto d'indice N (cfr. n. 4.1) della pr. di ar. $(\Psi)_\tau$, ossia

$$(\Psi)_{\tau,N}: \qquad \psi(t+N\tau), \quad \psi(t+(N+1)\tau), \quad \psi(t+(N+2)\tau), \quad \ldots.$$

In questa successione i termini sono definiti tutti per $t+N\tau \geqslant 0$, e quindi per

$$-N\tau \leqslant t < +\infty\,.$$

Ne segue, ragionando come nella dimostrazione del Teorema II (cfr. n. 6), che esistono accumulazioni di $(\Psi)_{\tau,N}$ in ogni intervallo $(-N\tau, N\tau)$. E poichè le accumulazioni di $(\Psi)_\tau$ e di $(\Psi)_{\tau,N}$ sono le stesse, si conclude che l'accumulazione $\lambda(t)$ di $(\Psi)_\tau$ esiste in $(-N\tau, N\tau)$, e, per l'arbitrarietà di N, esiste in ogni intervallo $(-T, T)$ con $0 < T < +\infty$ [mentre nel Teorema II si è conclusa l'esistenza solo nell'intervallo $(0,\ T)$]. La $\lambda(t)$ risulta quindi definita, come funzione, in tutto $(-\infty,\ +\infty)$, senza pretendere con ciò che sia d'accumulazione per $(\Psi)_\tau$ in $(-\infty,\ +\infty)$.

9. - Teorema IV.

La pr. di ar. $(\Psi)_\tau$, *nell'intervallo* $(-T,\ T)$ *con* $0 < T < +\infty$, *oltre all'accumulazione* $\lambda(t)$ *ha le seguenti altre infinite accumulazioni* [*non necessariamente tutte distinte fra loro e da* $\lambda(t)$]

$$\ldots,\ \lambda(t-3\tau),\ \lambda(t-2\tau),\ \lambda(t-\tau); \qquad \lambda(t+\tau),\ \lambda(t+2\tau),\ \lambda(t+3\tau),\ \ldots .$$

Dimostrazione. 1) Poichè $\lambda(t)$ è un'accumulazione della pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ nell'intervallo $(-T,\ T)$ [4], esisterà in tale progressione una sottosuccessione

$$\psi(t+n_r\tau) \qquad (r=0,1,2,\ldots;\quad n_0<n_1<n_2<\ldots) \tag{1}$$

tendente a $\lambda(t)$, ossia

$$\psi(t+n_r\tau) \xrightarrow[(r\to\infty)]{} \lambda(t). \tag{2}$$

Ne segue, cambiando t in $t+s\tau$,

$$\psi(t+(n_r+s)\tau) \xrightarrow[(r\to\infty)]{} \lambda(t+s\tau) \qquad (s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ora ciò esprime che la pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ ha le infinite accumulazioni $\lambda(t+\tau)$, $\lambda(t+2\tau)$, $\lambda(t+3\tau)$, ...

2) Se ora nella successione (1) suppongo, com'è possibile, che sia $n_0 \geqslant N$ (dove N è l'intero positivo considerato nella dimostrazione del n. **8**), la successione (1) risulta anche una sottosuccessione della $(\Psi)_{\tau,N}$ della dimostrazione del n. **8**. Ha allora senso $\psi(t+(n_r-s)\tau)$ per ogni $s=1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Tenendo ora presente la (2), abbiamo

$$\psi(t+(n_r-s)\tau) \xrightarrow[(r\to\infty)]{} \lambda(t-s\tau) \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

e ciò esprime che la pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ ha le accumulazioni $\lambda(t-\tau)$, $\lambda(t-2\tau)$, ..., $\lambda(t-N\tau)$. E poichè N può essere comunque grande, sono accumulazioni di $(\Psi)_\tau$ tutte le infinite funzioni $\lambda(t-\tau)$, $\lambda(t-2\tau)$, $\lambda(t-3\tau)$, ...

Il Teorema IV è così completamente dimostrato.

---

[4] Dove T va ritenuto non un numero determinato, ma un infinito (cioè una variabile di limite $+\infty$).

10 - Un lemma.

Per dimostrare gli ultimi teoremi di questo lavoro, premetto il seguente

Lemma. *Se la pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ ha una accumulazione $\lambda(t)$ periodica di periodo la ragione τ della progressione, tale progressione è convergente a $\lambda(t)$, e questa $\lambda(t)$ è l'unica accumulazione della progressione.*

Dimostrazione. Supposta l'ipotesi del Lemma, consideriamo in $(\Psi)_\tau$ una sottosuccessione

$$\psi(t + n_k \tau) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \quad n_0 < n_1 < n_2 < \ldots) \tag{3}$$

completa (cfr. n. 4.3) per $\lambda(t)$ e convergente a $\lambda(t)$. Da

$$\psi(t + n_k \tau) \xrightarrow[(k \to \infty)]{} \lambda(t)\,, \tag{4}$$

segue (cambiando t in $t + \tau$)

$$\psi(t + (n_k + 1)\tau) \xrightarrow[(k \to \infty)]{} \lambda(t + \tau)\,,$$

ossia, avendosi (per l'ipotesi del Lemma) $\lambda(t + \tau) = \lambda(t)$,

$$\psi(t + (n_k + 1)\tau) \xrightarrow[(k \to \infty)]{} \lambda(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \quad n_0 < n_1 < n_2 < \ldots). \tag{5}$$

Tenendo ora presente che la (3) è in $(\Psi)_\tau$ una sottosuccessione completa per $\lambda(t)$, da (4) e (5) segue (cfr. la fine del n. 4.3) che nella successione $n_k + 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ i numeri aventi k sufficientemente grande appartengono tutti alla successione n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$: esiste cioè un intero positivo k^* tale che i numeri

$$n_{k^*} + 1, \qquad n_{k^*+1} + 1, \qquad n_{k^*+2} + 1, \qquad \ldots \tag{6}$$

appartengono tutti alla successione n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Ma $n_{k^*} + 1$ [appartenendo alla successione crescente n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ed essendo l'intero consecutivo di n_{k^*}] sarà necessariamente n_{k^*+1}; analogamente $n_{k^*+1} + 1$ [appartenendo alla successione crescente n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ed essendo l'intero consecutivo di n_{k^*+1}] sarà necessariamente n_{k^*+2}; e così via indefinitamente; si ha cioè:

$$n_{k^*} + 1 = n_{k^*+1}\,, \qquad n_{k^*+1} + 1 = n_{k^*+2}\,, \qquad n_{k^*+2} + 1 = n_{k^*+3}\,, \qquad \ldots\,.$$

Di qui segue che gli interi (6) sono, ordinatamente,

$$(6') \qquad n_{k^*}+1, \qquad n_{k^*}+2, \qquad n_{k^*}+3, \qquad \ldots,$$

cioè formano la successione crescente di tutti i numeri naturali $> n_k{}^*$.

Allora la relazione limite (5) si può scrivere:

$$\psi(t+(n_{k^*}+s)\tau) \xrightarrow[(s\to\infty)]{} \lambda(t),$$

la quale ci dice che la pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ converge alla accumulazione $\lambda(t)$, onde [tenendo presente il Teorema II (cfr. n. 6)] questa $\lambda(t)$ è l'unica accumulazione della progressione $(\Psi)_\tau$.

Il Lemma è pertanto dimostrato.

11. - Teorema V.

Affinchè la pr. di ar. $(\Psi)_\tau$ [*che in un intervallo* $(-T, T)$, *con* $0<T<+\infty$, *ha sempre almeno un'accumulazione*] *abbia in* $(-T, T)$ *un numero complessivo* finito $m\,(\geqslant 1)$ *di accumulazioni distinte, è necessario e sufficiente che la* $(\Psi)_\tau$ *abbia un'accumulazione* $\lambda(t)$ *periodica di periodo* $m\tau$ *e non di periodi* $\tau, 2\tau, \ldots, (m-1)\tau$ (5).

Dimostrazione.

L'affermazione che $(\Psi)_\tau$ in un intervallo $(-T, T)$ ha sempre almeno una accumulazione discende subito dai Teoremi II e III precedenti.

1) La condizione enunciata è *necessaria*. Infatti, se la $(\Psi)_\tau$ ha in $(-T, T)$ un numero complessivo finito m di accumulazioni distinte, detta $\lambda(t)$ una di queste accumulazioni, per il Teorema IV le funzioni (non necessariamente distinte)

$$\ldots, \quad \lambda(t-2\tau), \quad \lambda(t-\tau), \quad \lambda(t), \quad \lambda(t+\tau), \quad \lambda(t+2\tau), \quad \ldots$$

(5) Dicendo «periodica di periodo $m\tau$ e non di periodi $\tau, 2\tau, \ldots, (m-1)\tau$» non si dice affatto che $\lambda(t)$ ha il periodo positivo minimo $m\tau$. Ad esempio, la pr. di ar.

$$\operatorname{sen} t, \qquad \operatorname{sen}(t+3\pi), \qquad \operatorname{sen}(t+6\pi), \qquad \operatorname{sen}(t+9\pi), \ldots,$$

di generatrice $\psi(t) \equiv \operatorname{sen} t$ e di ragione $\tau = 3\pi$, ha complessivamente $m = 2$ accumulazioni (per iterazione) distinte, date da $\operatorname{sen} t$, $\operatorname{sen}(t+3\pi) = -\operatorname{sen} t$: esse hanno entrambe il periodo $m\tau = 2\tau = 6\pi$ e non hanno il periodo $\tau = 3\pi$; mentre il loro periodo positivo minimo è $(2\tau/3) = 2\pi$.

sono tutte d'accumulazione per $(\Psi)_\tau$. Dico che le m accumulazioni distinte sono

$$\lambda(t), \quad \lambda(t+\tau), \quad \lambda(t+2\tau), \quad \ldots, \quad \lambda(t+(m-1)\tau) . \tag{7}$$

Invero (ragionando per assurdo), se le (7) non fossero tutte distinte, detto s il piú piccolo degli interi $1, 2, \ldots, m-1$ per il quale è

$$\lambda(t) = \lambda(t+s\tau) ,$$

la $(\Psi)_\tau$ si potrebbe spezzare nelle s successioni:

$$\begin{array}{lllll}
(8_0) & \psi(t), & \psi(t+s\tau), & \psi(t+2s\tau), & \ldots; \\
(8_1) & \psi(t+\tau), & \psi(t+(s+1)\tau), & \psi(t+(2s+1)\tau), & \ldots; \\
(8_2) & \psi(t+2\tau), & \psi(t+(s+2)\tau), & \psi(t+(2s+2)\tau), & \ldots; \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots; \\
(8_{s-1}) & \psi(t+(s-1)\tau), & \psi(t+(2s-1)\tau), & \psi(t+(3s-1)\tau), & \ldots,
\end{array}$$

ciascuna delle quali è una pr. di ar. che avrà quindi almeno una accumulazione. Inoltre, poichè le successioni (8_r) $(r=0, 1, 2, \ldots, s-1)$ esauriscono nel loro insieme la successione $(\Psi)_\tau$, almeno una di esse avrebbe l'accumulazione $\lambda(t)$: senza togliere generalità alla dimostrazione, suppongo che (8_0) abbia l'accumulazione $\lambda(t)$. Allora, essendo (8_0) una pr. di ar. di ragione $s\tau$ e avente l'accumulazione $\lambda(t)$ periodica di periodo tale ragione $s\tau$, per il Lemma del n. **10** la (8_0) convergerebbe a $\lambda(t)$. Dato poi che si passa da (8_0) ad (8_1) cambiando t in $t+\tau$, la successione (8_1) convergerebbe a $\lambda(t+\tau)$; analogamente le rimanenti successioni convergerebbero a $\lambda(t+2\tau)$, $\ldots$, $\lambda(t+(s-1)\tau)$. Pertanto $(\Psi)_\tau$ avrebbe un numero complessivo $s<m$ di accumulazioni distinte, contrariamente alle ipotesi. È dunque necessariamente $s=m$; le (7) sono quindi tutte distinte, e si ha proprio $\lambda(t)=\lambda(t+m\tau)$, come dovevasi provare.

2) La condizione enunciata è *sufficiente*. Infatti, se $(\Psi)_\tau$ ha l'accumulazione $\lambda(t)$ periodica di periodo $m\tau$ e non di periodi $\tau, 2\tau, \ldots, (m-1)\tau$, le funzioni (7) sono tutte distinte e tutte d'accumulazione per $(\Psi)_\tau$. D'altra parte $(\Psi)_\tau$ si può spezzare nelle m successioni che si ottengono dallo specchio delle (8_r) $(r=0, 1, 2, \ldots, s-1)$ per $s=m$. Ragionando come si è fatto in 1) su le (8_r) $(r=0, 1, \ldots, s-1)$, si conclude che $(\Psi)_\tau$ ha complessivamente solo le m accumulazioni distinte (7).

Corollario I. *Se la pr. di ar.* $(\Psi)_\tau$ [*che in un intervallo* $(-T, T)$, *con* $0<T<+\infty$, *ha sempre almeno un'accumulazione*] *ha in* $(-T, T)$ *un numero* *complessivo* f i n i t o *m di accumulazioni distinte, detta* $\lambda(t)$ *una delle accumulazioni, le m accumulazioni sono*

$$\lambda(t), \quad \lambda(t+\tau), \quad \lambda(t+2\tau), \quad \ldots, \quad \lambda(t+(m-1)\tau),$$

tutte periodiche con lo stesso periodo $m\tau$ *e non con i periodi* $\tau, 2\tau, \ldots, (m-1)\tau$.

Ciò discende agevolmente dal Teorema V e dalla sua dimostrazione.

Corollario II. *Se la pr. di ar.* $(\Psi)_\tau$ *in un intervallo* $(-T, T)$, *con* $0 < T < +\infty$, *ha* i n f i n i t e *accumulazioni distinte, nessuna di queste accumulazioni può essere periodica di periodo uno dei numeri* $\tau, 2\tau, \ldots, n\tau, \ldots$.

Summary.

See Introduction.

* * *