Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 131-142

D. QUILGHINI (*)

Sul problema inverso di quello di Stefan. (**)

§ 1. - Introduzione.

Sia $\Phi(t)$ una funzione definita continua per $t > 0$ ed integrabile in ogni intervallo chiuso $[0, T]$. Siano poi D, l ed A delle costanti, le prime due delle quali positive. Come è noto (cfr. [**3**] (¹) § **1** e § 2) il problema di determinare una funzione $e(t)$, assolutamente continua per $t \geqslant 0$, $e(0) = 0$, ed una funzione $V(\mu, t)$, $0 < \mu < e(t)$, $0 < t \leqslant T$, continua e derivabile, con derivate continue, a quadrato sommabile rispetto a μ (con norma uniformemente limitata per $t \in [0, T]$ e tali che:

$$D \frac{\partial^2 V(\mu, t)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial V(\mu, t)}{\partial t}, \qquad 0 < t \leqslant T, \quad 0 < \mu < e(t), \tag{1.1}$$

$$D \lim_{\mu \to e(t)} \frac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu} = l\big(\dot{e}(t) + A\big), \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{1.2}$$

$$\lim_{\mu \to 0} V(\mu, t) = \Phi(t), \tag{1.3}$$

$$\lim_{\mu \to e(t)} V(\mu, t) = 0, \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{1.4}$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « U. Dini », Università, viale G. B. Morgagni 67/a, 50134 Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del 6° Gruppo di ricerca matematica del C.N.R. presso l'Istituto Matematico « U. Dini » dell'Università di Firenze. — Ricevuto: 6-XII-1967.

(¹) I numeri in neretto ed in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

traduce un classico problema del tipo di STEFAN in uno strato materiale piano, omogeneo ed indefinito, con caratteristiche termiche costanti. Questo problema, in un certo senso diretto, è stato trattato da molti autori, e da diversi punti di vista, come provano gli abbondanti lavori in argomento (cfr. [3], [4] e [5]). In questo lavoro invece, senza ritornare sul significato fisico delle (1.1)-(1.4) illustrato nei citati paragrafi di [3], mi occuperò del problema, inverso del precedente, di determinare una funzione $\Phi(t)$ ed una funzione $V(\mu, t)$ nelle classi già specificate, soddisfacenti le (1.1)-(1.4), supponendo assegnata la funzione $e(t)$. Dal punto di vista fisico-matematico ciò significa determinare la temperatura superficiale in guisa da pilotare un cambiamento di stato, secondo una assegnata legge con la quale si vuole che la fase in formazione avanzi sulla fase preesistente.

Dal punto di vista analitico il problema viene qui ricondotto (cfr. § 2) allo studio di una particolare equazione integrale di VOLTERRA di prima specie, del tipo non riducibile a quelle di seconda, e che non mi risulta essere stata studiata. In particolare si dimostra un teorema di unicità per le soluzioni di tale equazione e, nella ipotesi che la assegnata funzione $e(t)$ sia monotona non decrescente, vengono dati dei metodi per calcolare tale soluzione. Nel § 3 si mostra poi come la soluzione del problema proposto conduca immediatamente alla soluzione dell'analogo problema quando la (1.3) venga sostituita da una condizione del tipo:

$$(1.3)_1 \qquad \lim_{\mu\to 0} h\,\frac{\partial V(\mu,\, t)}{\partial\mu} = \Phi_1(t), \qquad 0 < t \leqslant T, \qquad h = \text{cost.}\,,$$

oppure del tipo:

$$(1.3)_2 \qquad \lim_{\mu\to 0}\left(h\,\frac{\partial V(\mu,\, t)}{\partial\mu} + V(\mu,\, t)\right) = \Phi_2(t), \qquad 0 < t \leqslant T\,.$$

In ultimo, con riferimento a condizioni al contorno del tipo $(1.3)_1$ ed $(1.3)_2$, viene data una condizione su $e(t)$ affinchè $\Phi_1(t)$, o $\Phi_2(t)$, risulti limitata. Tale questione è di notevole interesse, infatti caratterizza i cambiamenti di stato fisicamente possibili, non potendosi ovviamente pilotare un cambiamento di stato quando il flusso termico superficiale richiesto risulti infinito.

§ 2. - Formule risolutive. Unicità e calcolo della soluzione.

Siano $e(t) \geqslant 0$, $e(0) = 0$, una funzione assolutamente continua e $\Phi(t)$ una funzione definita continua per $t > 0$ ed integrabile in ogni intervallo $[0,\ T]$, e poniamo:

$$V(\mu,\ t) = R(\mu,\ t) + S(\mu,\ t), \qquad 0 < \mu, \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{2.1}$$

dove:

$$R(\mu,\ t) = \frac{\mu}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mu^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau. \tag{2.2_1}$$

$$S(\mu,\ t) = \frac{l}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{\dot{e}(\tau) + A}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\mu - e(\tau))^2}{4D(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(\mu + e(\tau))^2}{4D(t-\tau)}\right]\right\} d\tau. \tag{2.2_2}$$

Manifestamente nella regione del piano $(\mu,\ t)$ definita dalle diseguaglianze $0 < \mu$, $0 < t \leqslant T$, la funzione $V(\mu,\ t)$ così definita è continua e derivabile, con derivate continue, salvo per $\mu = e(t)$ dove tali derivate non esistono, ed è inoltre a quadrato sommabile rispetto a $\mu \in (0,\ \infty)$ con norma uniformemente limitata rispetto a t. Immediatamente si verifica poi che $V(\mu,\ t)$ soddisfa sia alla (1.1) che alla (1.3), mentre per verificare la (1.2) e la (1.4) occorre e basta che risulti:

$$V(e(t),\ t) = R(e(t),\ t) + S(e(t),\ t) = 0, \qquad 0 < t \leqslant T. \tag{I}$$

Infatti la (1.4) e la (I) coincidono, di più, se è verificata la (I), $V(\mu,\ t)$ verifica anche la (1.2). In tale ipotesi infatti $V(\mu,\ t)$ è soluzione del seguente problema:

$$D\frac{\partial^2 V(\mu,\ t)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial V(\mu,\ t)}{\partial t}, \qquad e(t) < \mu, \qquad 0 < t \leqslant T,$$

$$\lim_{\mu \to e(t)} V(\mu,\ t) = \lim_{\mu \to \infty} V(\mu,\ t) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < t \leqslant T, \quad \lim_{t \to 0} V(\mu,\ t) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < \mu,$$

e perciò, ricordando anche le altre proprietà di $V(\mu,\ t)$ si ha identicamente, per il teorema di unicità delle soluzioni dell'equazione del calore:

$$V(\mu,\ t) = R(\mu,\ t) + S(\mu,\ t) \equiv 0, \qquad e(t) < \mu, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{2.3}$$

In conseguenza si ha pure:

$$\frac{\partial V(\mu,\ t)}{\partial \mu} = \frac{\partial\big(R(\mu,\ t) + S(\mu,\ t)\big)}{\partial \mu} \equiv 0, \qquad e(t) < \mu, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{2.4}$$

Ciò premesso, ricordando (cfr. [4] § 3) che, nelle ipotesi fatte su $e(t)$, si ha:

$$D \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial S(\mu, t)}{\partial \mu} - D \lim_{\mu \to e(t)+} \frac{\partial S(\mu, t)}{\partial \mu} = l(\dot{e}(t) + A), \qquad 0 < t \leqslant T,$$

ed osservando che $\partial R(\mu, t)/\partial \mu$ è continua qualunque siano μ e t positivi, dalla (2.4) segue la (1.2).

Per quanto detto la (I) regge sia il problema diretto (cfr. [4]), sia il problema inverso, a seconda che sia incognita la funzione $e(t)$ oppure la $\Phi(t)$. Supposta nota la $e(t)$, e risolvendo la (I) rispetto a $\Phi(t)$, si ottiene la soluzione del problema proposto; in questo caso la (I) è una equazione integrale di VOLTERRA di prima specie, la cui particolarità è però quella di essere irriducibile a seconda specie, il nucleo essendo:

$$\frac{e(t)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{e^2(t)}{4D(t-\tau)}\right].$$

Però non vi è dubbio che, assegnando opportunamente $e(t)$, la (I) ammetta soluzioni, basterebbe ad esempio assegnare $e(t)$ nella classe delle soluzioni del problema diretto. Il fatto è che la possibilità di risolvere la (I) è strettamente legata alla (2.3), che è verificata, non solo per $\mu = e(t)$ ma per ogni $\mu \geqslant e(t)$, ed è condizione necessaria e sufficiente per la (I) stessa. In questo lavoro la (I) viene appunto studiata partendo dalla (2.3), sia per dimostrare il teorema di unicità, sia per dare il calcolo della soluzione.

Dimostriamo adesso il seguente teorema di unicità:

T e o r e m a. *In ogni intervallo* $[0, T]$ *l'equazione integrale* (I) *ammette al più una sola soluzione* $\Phi(t)$ *nella classe delle funzioni definite continue per* $t > 0$ *ed integrabili per* $t \in [0, T]$.

Siano infatti $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ due soluzioni della (I) appartenenti alla classe sopra detta. Avremo:

$$(2.3)_1 \qquad R_1(\mu, t) + S(\mu, t) \equiv 0, \qquad e(t) \leqslant \mu, \qquad 0 < t \leqslant T,$$

$$(2.3)_2 \qquad R_2(\mu, t) + S(\mu, t) \equiv 0, \qquad e(t) \leqslant \mu, \qquad 0 < t \leqslant T,$$

dove $R_1(\mu, t)$ ed $R_2(\mu, t)$ vengono costruite, con la legge $(2.2)_1$, rispettivamente da $\Phi_1(t)$ e da $\Phi_2(t)$. Da queste segue per differenza:

$$R_1(\mu, t) - R_2(\mu, t) = \frac{\mu}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{\Phi_1(\tau) - \Phi_2(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mu^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau, \qquad e(t) \leqslant \mu,$$

$$0 < t \leqslant T.$$

Sia ora $\bar{\mu}$ un valore di μ, maggiore, o uguale, al massimo di $e(t)$ per $t \in [0, T]$ e sia n un intero positivo o nullo. Integrando l'ultima relazione scritta rispetto a μ tra $\sqrt{n+1}\ \bar{\mu}$ ed ∞ otteniamo:

$$\int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)-\Phi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(n+1)\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau = 0$$

qualunque sia $n = 0, 1, 2, \ldots$. Da qui segue:

$$\int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)-\Phi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_n^{0\ldots s} (-1)^n \binom{s}{n} \exp\left[-\frac{(n+1)\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau = 0$$

cioè a dire:

$$\int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)-\Phi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right] \left\{1 - \exp\left[-\frac{\mu^2}{4D(t-\tau)}\right]\right\}^s d\tau = 0$$

e quindi anche:

$$\sum_s^{0\ldots\infty} \int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)-\Phi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right] \left\{1 - \exp\left[-\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right]\right\}^s d\tau = 0 . \tag{2.5}$$

Da qui, tenuto conto che

$$\sum_s^{0\ldots\infty} \left\{1 - \exp\left[-\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right]\right\}^s = \exp\left[\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right],$$

otteniamo:

$$\int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)-\Phi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = 0 , \tag{2.6}$$

essendo lecito invertire nella (2.5) i simboli di sommazione e di integrazione (²).

(²) Infatti nelle nostre ipotesi la serie

$$S(\tau) = \sum_0^{\infty}{}_s \frac{\Phi_1(\tau)-\Phi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right] \left\{1 - \exp\left[-\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right]\right\}^s$$

è assolutamente ed uniformemente convergente in qualunque intervallo chiuso $I \equiv [\delta_1, t-\delta_2]$ interno a $(0, t)$. Perciò per $\tau \in I$ detta serie è integrabile termine a ter-

Dalla (2.6) poi, in forza del teorema di unicità per la equazione integrale del tipo di ABEL (cfr. [1], t. III, Ch. XXX, n. 555, pp. 339-341), segue $\Phi_1(t) = \Phi_2(t)$ e quindi il teorema.

Calcolo della soluzione. Supponiamo adesso che $e(t)$ sia monotona non decrescente e che la (I) ammetta una soluzione $\Phi(t)$ nella classe già specificata. In queste ipotesi, costruita la funzione $S(\mu, t)$ definita dalla $(2.2)_2$, si ha:

$$\Phi(t) = -\sum_{s}^{0\ldots\infty} \sum_{n}^{0\ldots s} (-1)^n \binom{s}{n} S(\sqrt{n+1}\, e(t),\, t)\,. \tag{2.7}$$

Infatti per la funzione $R(\mu, t)$ definita dalla $(2.2)_1$ si ha, in forza del teorema di unicità per le soluzioni dell'equazione del calore (essendo ambo i membri soluzioni dello stesso problema al contorno):

$$R(\mu, t) = \frac{\mu - \sqrt{n+1}\ \bar{\mu}}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{R(\sqrt{n+1}\ \bar{\mu},\, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mu - \sqrt{n+1}\ \bar{\mu})^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau,$$

$$0 < t \leqslant T, \qquad \sqrt{n+1}\,\bar{\mu} < \mu\,,$$

dove n è un intero positivo o nullo e $\bar{\mu}$ è prefissato valore, positivo o nullo. Da quest'ultima, ricordando la $(2.2)_1$, si ottiene integrando rispetto a μ tra $\sqrt{n+1}\ \bar{\mu}$ ed ∞:

$$\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(n+1)\,\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau = \int_0^t \frac{R(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu},\, \tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau\,,$$

---

mine e la serie integrale, che è convergente, vale l'integrale della serie. Si ha inoltre, comunque ε_1, ε_2, ε_3 ed ε_4 tendano a zero (per valori positivi):

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} S(\tau)\, d\tau = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\Phi_1(\tau) - \Phi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = 0,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_3 \to 0 \\ \varepsilon_4 \to 0}} \int_{t-\varepsilon_3}^{t-\varepsilon_4} S(\tau)\, d\tau = \lim_{\substack{\varepsilon_3 \to 0 \\ \varepsilon_4 \to 0}} \int_{t-\varepsilon_3}^{t-\varepsilon_4} \frac{\Phi_1(\tau) - \Phi_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = 0\,,$$

perciò dalla (2.5) segue la (2.6).

e perciò anche:

$$\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right] \left\{1-\exp\left[-\frac{\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right]\right\}^s d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_n^{0\ldots s} (-1)^n \binom{s}{n} \exp\left[-\frac{(n+1)\,\bar{\mu}^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau = \int_0^t \frac{\sum\limits_n^{0\ldots s} (-1)^n \binom{s}{n} R(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu}, \tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau.$$

Adesso, ragionando come nella dimostrazione del teorema di unicità, segue avendo supposto l'esistenza della funzione $\Phi(t)$ soluzione della (I):

$$\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = \int_0^t \frac{\sum\limits_s^{0\ldots\infty} \sum\limits_n^{0\ldots s} (-1)^n \binom{s}{n} R(\sqrt{n+1}\,\bar{\mu}, \tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau\,.$$

Da qui, ricordando la (2.3) ed osservardo che, nelle ipotesi fatte, si ha $e(\tau) \leqslant e(t)$ per $\tau \leqslant t$, segue, ponendo $\bar{\mu} = e(t)$:

$$\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = -\int_0^t \frac{\sum\limits_s^{0\ldots\infty} \sum\limits_n^{0\ldots s} (-1)^n \binom{s}{n} S(\sqrt{n+1}\; e(t), \tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau\,,$$

e quindi la (2.7).

Un metodo più semplice per calcolare $\Phi(t)$ si ha nel caso seguente. Sia al solito $e(t)$ monotona non decrescente e supponiamo che esista un numero positivo λ tale che risulti:

$$e(t) \leqslant 2\lambda\sqrt{Dt}\,. \tag{2.8}$$

In queste ipotesi e se la funzione

$$f(t) = -S(2\lambda\sqrt{Dt},\ t)\,,$$

è sviluppabile in serie di potenze del tipo:

$$f(t) = \sum_s^{0\ldots\infty} f^{(s)} \frac{t^s}{s!} \tag{2.9}$$

con gli $f^{(s)}$ limitati (3), allora la (I) ammette la soluzione:

$$\Phi(t) = \sum_s^{0 \ldots \infty} \frac{f^{(s)}\, t^s}{s!\, 2^{2s}\, \Gamma(s+1)\, i^{2s}\operatorname{erfc}(\lambda)} \tag{2.10}$$

dove $\Gamma(x)$ è la funzione euleriana di seconda specie mentre $i^{2s}\operatorname{erfc}(x)$ è il $2s$-simo integrale iterato di $\operatorname{erfc}(x)$ (cfr. [2], appendix II, formule (9) e (10), pag. 483).

Dimostriamo da prima che, nelle nuove ipotesi fatte su $e(t)$, condizione necessaria e sufficiente perchè la (I) ammetta soluzione è che ammetta soluzione l'equazione:

$$R(2\lambda\sqrt{Dt},\ t) + S(2\lambda\sqrt{Dt},\ t) = 0\,. \tag{I$_1$}$$

La condizione è necessaria, infatti dalla (I) segue la (2.3) e quindi, in forza della (2.8), si ha la $(\mathrm{I})_1$. La condizione è anche sufficiente. Supponiamo infatti che la $(\mathrm{I})_1$ ammetta la soluzione $\Phi(t)$ e dimostriamo che tale funzione è soluzione anche della (I).

Determinata infatti la soluzione $\Phi(t)$ della $(\mathrm{I})_1$ costruiamo la funzione $R(\mu, t) + S(\mu, t)$. Ciò fatto si fissi un qualunque istante $t > 0$ (per il quale risulti definita la funzione $e(t)$ e la soluzione $\Phi(t)$ della $(\mathrm{I})_1$) e si consideri nel piano (μ, t) la striscia (μ, t') definita dalle diseguaglianze $e(t) \leqslant \mu$, $0 < t' \leqslant t$. Nelle ipotesi fatte su $e(t)$ la funzione $R(\mu, t') + S(\mu, t')$ è ivi continua e derivabile, con derivate continue, ed è inoltre a quadrato sommabile rispetto a μ, con norma uniformemente limitata rispetto a t'. Perciò, in tale striscia, si ha in forza del teorema di unicità delle equazioni dal calore (sia il primo che il secondo membro sono soluzioni dello stesso problema al contorno):

$$R(\mu, t') + S(\mu, t') = \frac{\mu - e(t)}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^{t'} \frac{R\big(e(t), \tau\big) + S\big(e(t), \tau\big)}{(t' - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mu - e(t))^2}{4D(t' - \tau)}\right] d\tau\,.$$

D'altra parte si ha, per $\mu \geqslant 2\lambda\sqrt{Dt'}$, $\quad R(\mu, t') + S(\mu, t') \equiv 0$, e perciò, ragionando come abbiamo fatto per dimostrare il teorema di unicità, si ha, qualunque sia $\bar{\mu} \geqslant 2\lambda\sqrt{Dt'}$ e qualunque sia l'intero n positivo, o nullo:

$$\int_0^{t'} \frac{R\big(e(t), \tau\big) + S\big(e(t), \tau\big)}{\sqrt{t' - \tau}} \exp\left[-\frac{(n+1)\,\bar{\mu}^2}{4D(t' - \tau)}\right] d\tau = 0.$$

---

(3) L'ipotesi di uniforme limitatezza degli $f^{(s)}$ può essere sostituita con altra meno restrittiva, come si può facilmente vedere dalla dimostrazione che seguirà.

Da qui segue poi, come abbiamo già visto, $R(e(t), t') + S(e(t), t') = 0$ qualunque sia $t' \leqslant t$ e quindi la (I).

Da quanto detto basta risolvere la $(\mathrm{I})_1$ per avere risolto anche la (I). In forza della (2.9) la $(\mathrm{I})_1$ si scrive (cfr. $(2.2)_1$):

$$\frac{2\lambda\sqrt{Dt}}{2\sqrt{\pi D}}\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{4\lambda Dt}{4D(t-\tau)}\right]d\tau = \sum_s^{0\ldots\infty} f^{(s)}\frac{t^s}{s!}.$$

Quest'ultima, nelle ipotesi fatte su $f(t)$, ammette come soluzione la funzione $\Phi(t)$ definita dalla (2.10). La verifica formale è immediata avendosi (cfr. [2], Ch. II, n. 2.5, pp. 62-64, formula (8)):

$$\frac{2\lambda\sqrt{Dt}}{2\sqrt{\pi D}}\int_0^t \frac{\tau^s}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{4\lambda Dt}{4D(t-\tau)}\right]d\tau = 2^{2s}\,\Gamma(s+1)\,i^{2s}\operatorname{erfc}(\lambda)\,t^s.$$

Inoltre la serie a secondo membro della (2.10) è convergente ed è integrabile termine a termine, come si può vedere applicando alla serie detta il criterio del rapporto dopo avere osservato che:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{2^{2s}\,\Gamma(s+1)\,i^{2s}\operatorname{erfc}(\lambda)}{2^{2s+2}\,(s+1)\,\Gamma(s+2)\,i^{2s+2}\operatorname{erfc}(\lambda)} = 0,$$

essendo (cfr. [6], n. 1 pag. 6 formula (6)):

$$i^n\operatorname{erfc}(x) = O\left(1\Big/\left\{2^n\,\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right\}\right).$$

Terminando questo paragrafo possiamo osservare che dai metodi esposti per calcolare la soluzione della (I) possono seguire, caso per caso, dei criteri di esistenza della soluzione.

§ 3. - Relazione tra la temperatura ed il flusso superficiali.

Volendo risolvere l'analogo problema, di quello trattato nel § 2, quando al posto della condizione (1.3) viene posta una delle condizioni $(1.3)_1$ o $(1.3)_2$ basta, ovviamente, determinare il legame esistente tra $\lim\limits_{\mu\to 0} V(\mu, t)$ e $\lim\limits_{\mu\to 0} \partial V(\mu, t)/\partial\mu$. Infatti, ammesso che la (I) ammetta soluzione, la temperatura $V(\mu, t)$ $(0 < \mu < e(t),\ 0 < t \leqslant T)$, resta completamente definita (così $V(\mu, t)$ è definita dalla

(1.2) e dalla (1.4) che sono condizioni necessarie e sufficienti alla (I)) ed in conseguenza si determinano poi, passando al limite per $\mu \to 0$, le incognite superficiali, che possono essere la temperatura, come nel caso (1.3), o il flusso, come nel caso $(1.3)_1$ od infine una combinazione flusso-temperatura come nel caso $(1.3)_2$.

Per calcolare i limiti sopra detti osserviamo che la $R(\mu, t)$ definita con la $(2.2)_1$ può scriversi:

$$
(3.1) \quad \begin{cases} R(\mu, t) = \Phi(t) - \dfrac{2\Phi(0)}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\mu/2\sqrt{Dt}} \exp(-\eta^2)\, d\eta - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \Phi'(\tau) \left(\int_0^{\mu/2\sqrt{D(t-\tau)}} \exp(-\eta^2)\, dn \right) d\tau = \\[2ex] = \Phi(0) \operatorname{erfc}\left(\dfrac{\mu}{2\sqrt{Dt}} \right) + \displaystyle\int_0^t \Phi'(\tau) \operatorname{erfc}\left(\dfrac{\mu}{2\sqrt{D(t-\tau)}} \right) d\tau , \end{cases}
$$

di modo che si ottiene:

$$
(3.2) \qquad \lim_{\mu \to 0} \frac{\partial R(\mu, t)}{\partial \mu} = - \frac{\Phi(0)}{\sqrt{\pi D t}} - \frac{1}{\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{\Phi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau .
$$

Inoltre è (cfr. $(2.2)_2$):

$$
(3.3) \qquad \lim_{\mu \to 0} \frac{\partial S(\mu, t)}{\partial \mu} = \frac{l}{2\sqrt{\pi}\, D^{3/2}} \int_0^t \frac{(\dot{e}(\tau) + A)\, e(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[- \frac{e^2(\tau)}{4D(t-\tau)} \right] d\tau ,
$$

perciò, volendo pilotare un cambiamento di stato assorbendo, o fornendo, calore al sistema (attraverso la superficie) con una legge del tipo $(1.3)_1$ il flusso dovrà essere:

$$
(3.4) \qquad \Phi_1(t) = h \left\{ \lim_{\mu \to 0} \frac{\partial R(\mu, t)}{\partial \mu} + \lim_{\mu \to 0} \frac{\partial S(\mu, t)}{\partial \mu} \right\},
$$

dove i limiti a secondo membro sono definiti dalla (3.2) e dalla (3.3), mentre, nel caso $(1.3)_2$ si avrà:

$$
(3.5) \qquad \Phi_2(t) = \Phi_1(t) + \Phi(t) ,
$$

essendo al solito $\Phi(t)$ la soluzione della (I).

Terminando diamo una condizione, su $e(t)$, perchè $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ risultino limitate, risulti cioè limitato, nel tempo, il flusso necessario a realizzare il cambiamento di stato assegnato. Dalla (3.4) e dalla (3.5) si ha subito, tenuto conto della (3.2), che condizione necessaria alla limitatezza di $\Phi_1(t)$ e di $\Phi_2(t)$ è che risulti $\Phi(0) = 0$.

Dimostreremo qui che, perchè ciò si verifichi, basta che esista una costante $\alpha > 1/2$ tale che risulti

$$e(t) > Ct^{\alpha}\,, \tag{3.6}$$

essendo C una costante positiva opportuna.

Infatti, ricordando la (3.1), la (I) può essere scritta:

$$\Phi(0)\ \mathrm{erfc}\left(\frac{e(t)}{2\sqrt{Dt}}\right) = -\int_0^t \Phi'(\tau)\ \mathrm{erfc}\left(\frac{\mu}{2\sqrt{D(t-\tau)}}\right) d\tau - S(e(t),\ t)\,.$$

Avremo perciò $\Phi(0) = 0$ se accade che:

$$\lim_{t\to 0} S(e(t),\ t) = 0\,.$$

Quest'ultima condizione è poi certamente verificata se accade che

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{\dot{e}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = 0\,,$$

e da qui segue la (3.6).

Ciò implica che, negli istanti iniziali, la velocità con la quale può avvenire il cambiamento di stato deve essere minore di quella con la quale si realizza il fenomeno nel classico problema di STEFAN. In questo ultimo caso infatti la legge con la quale avviene il cambiamento di stato è del tipo $e(t) = 2\lambda\sqrt{Dt}$.

Bibliografia.

[1] E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, Gauthier-Villars, Paris 1927.

[2] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Claredon Press., Oxford 1959.

[3] D. QUILGHINI, *Una analisi fisico-matematica del processo del cambiamento di fase*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **67** (1965), 33-74.

[4] D. QUILGHINI, *Su di un nuovo problema del tipo di Stefan*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **62** (1963), 59-97.

[5] G. SESTINI, *Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan*, Confer. Sem. Mat. Univ. Bari **55-56** (1960).

[6] O. S. BERLYAND, R. I. GAVRILOVA and A. P. PRUDNIKOV, *Tables of integral error functions and Hermite polynomials*, Pergamon Press., Oxford 1962.

Summary.

An inverse Stefan-like problem was studied by means of an integral equation of the first kind, which cannot be transformed into any second kind equation. A uniqueness theorem was proved for the mentioned equation and a method to evaluate the unique solution, if any, was given.

* * *