Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 119-124

CARLO FRANCHETTI (*)

Un teorema sulla approssimazione delle funzioni continue in intervallo infinito. (**)

Recentemente L. C. HSU (¹) ha dato un teorema sulla approssimazione delle funzioni continue in un intervallo infinito mediante una successione di polinomi interpolanti. Precisamente, con un metodo dovuto a CHLODOVSKY (²) nel caso dei polinomi di BERNSTEIN, ha esteso su tutta la retta la formula di interpolazione di FEJÉR-HERMITE valida nell'intervallo $[-1, 1]$.

Scopo della presente Nota è assegnare un analogo teorema estendendo su tutta la retta una formula di interpolazione basata sulla formula di LAGRANGE e che è stata presa in considerazione da L. MERLI (³).

Partendo dalla formula di LAGRANGE

$$L_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x)\,, \tag{1}$$

dove

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})\,(x - x_k^{(n)})}\,,$$

$$\omega_n(x) = c(x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}) \qquad (c \neq 0),$$

(*) Indirizzo: Via Romana 41, Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 6 del Comitato per la Matematica del C.N.R. — Ricevuto: 13-V-1966.

(¹) L. C. HSU, *On a kind of extended Fejér-Hermite interpolation polynomials*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **15** (1964), 325-328.

(²) G. G. LORENTZ, *Bernstein polynomials*, Math. Exposition n. 8, Univ. Toronto Press, Toronto (1953), 36-37.

(³) L. MERLI, *Sulla rappresentazione delle funzioni continue con una classe di polinomi interpolanti del tipo di Lagrange*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. (8) **7** (1949), 212 – 216.

si ponga

$$f(x_{2k-1}^{(n)}) = f(x_{2k}^{(n)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

la (1) diviene

$$(2) \qquad L_{2n}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}^{(n)}) \left[l_{2k-1}^{(2n)}(x) + l_{2k}^{(2n)}(x) \right].$$

Si assuma quest'ultima come formula di interpolazione relativa alla $f(x)$ in $[-1, 1]$; allora, supposti noti i valori $f(x_1^{(n)})$, $f(x_3^{(n)})$, ..., $f(x_{2n-1}^{(n)})$ che la funzione assume negli n punti $x_1^{(n)}$, $x_3^{(n)}$, ..., $x_{2n-1}^{(n)}$, si dimostra [cfr. loc. cit. in (1)] che, se x_k^n sono gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie $T_{2n}(x) = \cos(2n \arccos x)$, si ha uniformemente, nell'intervallo $[-1, 1]$,

$$\lim_{n \to \infty} L_{2n}(f) = f(x),$$

per ogni funzione continua in $[-1, 1]$.

Si vuole ora estendere la (2) in modo che valga uniformemente in ogni intervallo finito o, come si dice, quasi uniformemente per $x \in (-\infty, +\infty)$, [cfr. Chlodovsky (vedasi loc. cit. in (2)) e Hsu (vedasi loc. cit. in (1))].

Sia $\{\lambda_n\}$ una successione non negativa, non decrescente di numeri reali con

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty.$$

Modifichiamo l'espressione (2) con la posizione

$$(2^*) \qquad L_{2n}^*(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_n x_{2k-1}^{(n)}) \left[l_{2k-1}^{(2n)}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) + l_{2k}^{(2n)}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \right].$$

L_{2n}^* è un polinomio di grado $\leqslant 2n-1$ che interpola la $f(x)$ nei punti di ascissa $\lambda_n x_{2k-1}^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Poniamo inoltre:

$$\exp^1(|x|) = e^{|x|}, \qquad \log^1(n) = \log n,$$

$$\exp^{m+1}(|x|) = \exp\left(\exp^m(|x|)\right), \qquad \log^{m+1}(n) = \log(\log^m(n)).$$

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema. *Per ogni funzione $f(x)$ definita e continua per qualunque x e soddisfacente inoltre la condizione*

$$f(x) = O(\exp^m(|x|)) \qquad (|x| \to \infty)\,, \tag{3}$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} |\, L^*_{2n}(f) - f(x)\,| = 0\,, \tag{4}$$

e la (4) *vale uniformemente in qualsiasi intervallo finito, con* $\lambda_n = \log^{m+1}(n)$.

Dimostrazione.

Nella (1), posto

$$x = \cos\vartheta\,, \qquad x_k^{(n)} = \cos\vartheta_k^{(n)},$$

si ha

$$L_{2n}(f) = \frac{\cos(2n\vartheta)}{2n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}^{(n)}) \left[\frac{\sin\vartheta_{2k}^{(2n)}}{\cos\vartheta - \cos\vartheta_{2k}^{(2n)}} - \frac{\sin\vartheta_{2k-1}^{(2n)}}{\cos\vartheta - \cos\vartheta_{2k-1}^{(2n)}}\right]$$

e, poichè

$$\sum_{k=1}^{n} [l_{2k-1}^{(2n)}(x) + l_{2k}^{(2n)}(x)] = \sum_{k=1}^{2n} [l_k^{(2n)}(x)] \equiv 1\,,$$

si ottiene [cfr. loc. cit. in (3), pp. 213-215]:

$$|\, L_{2n}(f) - f(x)\,| =$$

$$= \Delta_n \leqslant \frac{\cos(2n\,\vartheta)}{4n}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right)\sum_{k=1}^{n} |\, f(x) - f(x_{2k-1}^{(n)})\,| \frac{|\, g_k^{(2n)}(\vartheta)\,|}{\left|\sin\dfrac{\vartheta - \vartheta_{2k-1}^{(2n)}}{2} \quad \sin\dfrac{\vartheta - \vartheta_{2k}^{(2n)}}{2}\right|}$$

con

$$|g_k^{(2n)}(\vartheta)\,| \leqslant 2, \qquad \text{per} \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi\,. \tag{5}$$

Supposto $|\,x\,| \leqslant A$, ponendo $x/\lambda_n = \cos\vartheta_n$, si considerino solo gli indici n per cui esiste λ_n ed è $|\,x/\lambda_n\,| \leqslant 1$, $0 \leqslant \vartheta_n \leqslant \pi$.

In questo caso possiamo sfruttare la (5), per cui [4]:

$$\begin{aligned} &\Delta_n^* = |\, L^*_{2n}(f) - f(x)\,| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right)\sum_{k=1}^{n} |\, f(x) - f(\lambda_n\, x_{2k-1}^{(n)})\,| \left|\frac{\cos(2n\,\vartheta_n)}{\sin\dfrac{\vartheta_n - \vartheta_{2k-1}}{2} \sin\dfrac{\vartheta_n - \vartheta_{2k}}{2}}\right|. \end{aligned} \tag{6}$$

---

(4) Omettiamo, per semplicità, negli argomenti ϑ_k l'indice in alto.

In un intervallo limitato vale il teorema di uniforme continuità, perciò, fissato un $\sigma > 0$, si determini $\delta > 0$ in modo che $| x - x' | < \delta$ implichi $| f(x) - f(x') | < \sigma$; $| x | \leqslant A$. Scriviamo allora

$$\Delta_n^* \leqslant \frac{1}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right) \sum{}'\ldots + \frac{1}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right) \sum{}''\ldots,$$

dove $\sum'\ldots$ è la somma che compare nella (6) estesa agli indici k per cui

$$| x - \lambda_n x_{2k-1}^{(n)} | < \delta \tag{7}$$

e $\sum''\ldots$ è la stessa somma estesa agli indici k per cui

$$| x - \lambda_n x_{2k-1}^{(n)} | \geqslant \delta . \tag{8}$$

Dalla (8), dividendo per λ_n, si ottiene

$$| x/\lambda_n - x_{2k-1}^{(n)} | \geqslant \delta/\lambda_n ,$$

ossia

$$| \cos \vartheta_n - \cos \vartheta_{2k-1} | \geqslant \delta/\lambda_n . \tag{9}$$

Ma poichè

$$| \cos \alpha - \cos \beta | = 2\left| \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \right| \left| \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right| ,$$

dalla (9) segue

$$2 \left| \sin \frac{\vartheta_n + \vartheta_{2k-1}}{2} \right| \left| \sin \frac{\vartheta_n - \vartheta_{2k-1}}{2} \right| \geqslant \delta / \lambda_n ,$$

e quindi

$$\left| \sin \frac{\vartheta_n - \vartheta_{2k-1}}{2} \right| \geqslant \frac{\delta}{2\lambda_n}$$

(sempre per gli addendi della $\sum''\ldots$).

Allora

$$\Delta_n^* < \frac{\sigma}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right) \sum{}' \left| \frac{\cos (2n\,\vartheta_n)}{\sin \frac{\vartheta_n - \vartheta_{2k-1}}{2} \sin \frac{\vartheta_n - \vartheta_{2k}}{2}} \right| + \frac{1}{\delta}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right) \frac{\lambda_n}{n} \sum{}'' | f(x) - f(\lambda_n x_{2k-1}^{(n)}) | \left| \frac{\cos (2n\,\vartheta_n)}{\sin \frac{\vartheta_n - \vartheta_{2k}}{2}} \right| .$$

Notiamo che la condizione (3) porta all'esistenza di una costante positiva K, indipendente da x, tale che per n sufficentemente grande si ha:

$$|f(x) - f(\lambda_n x_{2k-1}^{(n)})| < K \exp^m(\lambda_n), \qquad |x| \leqslant A.$$

Se poi poniamo

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\cos(2n\vartheta)}{\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta_{2k-1}}{2}\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta_{2k}}{2}} \right| = A_n(\vartheta), \qquad \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\cos(2n\vartheta)}{\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta_{2k}}{2}} \right| = B_n(\vartheta),$$

si ha:

$$\Delta_n^* \leqslant \frac{\sigma}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right) A_n(\vartheta_n) + \frac{1}{\delta}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right)\frac{\lambda_n}{n} K \exp^m(\lambda_n)\cdot B_n(\vartheta_n).$$

Tenuto poi conto che è [cfr. loc. cit. in (3), pp. 215-216]

$$A_n(\vartheta) < C_1 n^2 \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi),$$

$$B_n(\vartheta) < C_2 n \log n \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi),$$

con C_1 e C_2 costanti assolute (4), ne segue

$$\Delta_n^* \leqslant \frac{\sigma}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right) C_1 n^2 + \frac{1}{\delta}\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right)\frac{\lambda_n}{n} K \exp^m(\lambda_n)\cdot C_2 n \log n.$$

Ponendo ora $\lambda_n = \log^{m+1}(n)$, si ottiene

$$\Delta_n^* < H_1 \sigma n \sin\frac{\pi}{4n} + H_2\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right)\log^{m+1}(n)\cdot(\log n)^2,$$

con H_1 e H_2 costanti assolute. Da questa segue la (4), come si voleva dimostrare.

Si noti che questo procedimento permette di rappresentare funzioni continue con un arbitrario ma prefissato ordine di accrescimento all'infinito, che è caratterizzato dall'indice m della condizione (3). In altre parole i polinomi

---

(4) L. Merli, *Sulla approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. (8) **1** (1946), 1175-1180.

che abbiamo costruito servono appunto a rappresentare funzioni continue per cui

$$f(x) = O\big(\exp^k(|x|)\big) \qquad (|x| \to \infty),$$

con $k \leqslant m$. Se $k > m$ nella formula (2*) dovrà essere cambiata la successione $\{\lambda_n\}$. Se si vuole una formula unica per m qualsiasi ($m = 1, 2, \ldots$) si dovranno considerare delle sottosuccessioni $\{L^*_{2n_k}\}$ opportunamente modificate. A questo proposito cfr. Hsu [loc. cit. in (1), pp. 327-328].

Summary.

A theorem on the approximation of continuous function by particular interpolating polynomials, in unbounded interval, is given.

* * *