Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 55-64

DELFINA ROUX (*)

Sulle funzioni intere rappresentate da serie di Dirichlet lacunari. (**)

1. - Introduzione.

Sia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k} \qquad (a_k \neq 0; \quad k = 0, 1, \ldots) \tag{1.1}$$

una serie di potenze convergente in tutto il piano complesso (z) e poniamo

$$M(r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |f(z)|, \qquad m(r) = \operatorname*{Min}_{|z|=r} |f(z)|.$$

In una celebre Memoria sulle serie di potenze lacunari, G. PÓLYA ha dimostrato, fra l'altro, il seguente teorema ([6], teorema IX, p. 631):

« Se $f(z)$ ha ordine finito e

$$\lim_{k\to+\infty} k/n_k = 0, \tag{1.2}$$

al tendere di z a infinito lungo qualunque linea continua risulta

$$\overline{\lim} \frac{\log |f(z)|}{\log M(|z|)} = 1. \text{ »} \tag{1.3}$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico dell'Università, via C. Saldini 50, 20133 Milano, Italia.

(**) Ricevuto: 12-VII-1967.

Se $f(z)$ ha ordine infinito, la condizione lacunare (1.2) non è invece sufficiente ad assicurare in ogni caso la validità di (1.3) ([6], p. 636).

Questo teorema ha dato origine a varie ricerche, anche molto recenti, sull'argomento.

In particolare, W. H. J. FUCHS [3] ha dimostrato che per le funzioni $f(z)$ di ordine finito soddisfacenti la (1.2) è verificata anche la relazione limite (piú generale di (1.3))

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log m(r)}{\log M(r)} = 1 , \tag{1.4}$$

provando così, dopo 34 anni, una congettura di G. PÓLYA.

Inoltre, T. KÖVÁRI ([4] e [5]) ha dimostrato che la validità di (1.3) e (1.4) è assicurata anche per funzioni $f(z)$ di ordine infinito, qualora la condizione (1.2) venga sostituita, rispettivamente, dalle piú restrittive condizioni:

$$\frac{k}{n_k} = O\left(\frac{1}{(\log k)^{1+\varepsilon}}\right) ,$$

$$\frac{k}{n_k} = O\left(\frac{1}{(\log k)^{2+\varepsilon}}\right),$$

per qualche $\varepsilon > 0$.

In questa Nota il teorema di G. PÓLYA viene esteso alle funzioni intere rappresentate da serie di DIRICHLET aventi la successione degli esponenti di densità zero e indice di condensazione (secondo V. BERNSTEIN) zero. Si dimostra anche che tali funzioni non possono avere valori eccezionali secondo PICARD.

2. - I risultati.

Sia

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{2.1}$$

$$[a_n \neq 0 \ \ (n = 0, 1, \ldots); \qquad 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots; \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty],$$

una serie di DIRICHLET convergente in tutto il piano complesso (s).

Per ogni σ reale finito poniamo

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \sup_{-\infty<\tau<+\infty} |\varphi(\sigma + i\tau)| .$$

Sussiste il seguente

Teorema I. *Se $\varphi(s)$ ha ordine secondo Ritt* (1) *finito e la successione $\{\lambda_n\}$ ha densità zero* (2) *e indice di condensazione* (3) *zero, allora, al tendere di s a $\operatorname{Re} s = -\infty$ lungo qualunque linea continua, risulta*

$$\overline{\lim} \frac{\log |\varphi(s)|}{\log \mathfrak{M}(\operatorname{Re} s)} = 1 . \tag{2.2}$$

Osservazioni.

1) Qualunque funzione intera $f(z)$ di ordine finito soddisfacente la (1.2) viene mutata dalla sostituzione $z = e^{-s}$ in una serie di Dirichlet $\varphi(s)$ soddisfacente le condizioni del Teorema I (4). Questo teorema contiene quindi come caso particolare il teorema di G. Pólya.

2) Se l'indice di condensazione della successione $\{\lambda_n\}$ è positivo, la (2.2) può non essere verificata: lo mostreremo con un esempio nel n. 5.

Come conseguenza del Teorema I si ricava facilmente il seguente

Teorema II. *La funzione intera $\varphi(s)$ abbia ordine secondo Ritt finito e la successione $\{\lambda_n\}$ abbia densità zero e indice di condensazione zero. Allora $\varphi(s)$ assume infinite volte qualunque valore finito.*

Osservazione.

La condizione che l'indice di condensazione sia nullo è notevolmente meno restrittiva della condizione

$$\varliminf_{n \to +\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0 ,$$

che compare in sua vece nei teoremi finora noti sui valori eccezionali delle funzioni intere rappresentate da serie di Dirichlet lacunari (F. Sunyer Balaguer [10] e [11]).

---

(1) L'ordine ϱ secondo Ritt di $\varphi(s)$ è definito dalla relazione $\varrho = \overline{\lim}_{\sigma \to -\infty} \frac{\log \log \mathfrak{M}(\sigma)}{-\sigma}$.

(2) Cioè risulta $\lim_{n \to +\infty} n/\lambda_n = 0$.

(3) Per la nozione di indice di condensazione vedasi V. Bernstein [1], pp. 24-27.

(4) Si osservi infatti che l'ordine di $f(z)$ è uguale all'ordine secondo Ritt della corrispondente funzione $\varphi(s)$ e che, essendo verificata la condizione $n_{k+1} - n_k \geqslant 1$ per ogni k, l'indice di condensazione della successione $\{n_k\}$ è necessariamente zero.

3. - Dimostrazione del Teorema I.

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che esista una linea continua γ per la quale la (2.2) non è verificata.

Esiste allora $\alpha < 1$ tale che per ogni $s = \sigma + i\tau \in \gamma$, $\sigma < \sigma_0(\alpha)$, sia soddisfatta la disuguaglianza

$$|\varphi(s)| < (\mathfrak{M}(\sigma))^{\alpha}.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sulla circonferenza $|z - s| = \varepsilon$ risulta $|\varphi(z)| \leqslant \mathfrak{M}(\sigma - \varepsilon)$, quindi, per il Lemma di MILLOUX (5) sulla circonferenza $C(s)$ data da $|z - s| = \varepsilon/6$, vale la relazione

$$|\varphi(z)| \leqslant (\mathfrak{M}(\sigma - \varepsilon))^{(3+\alpha)/4}. \tag{3.1}$$

Consideriamo ora le funzioni intere

$$L(z) = \prod_{j=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right), \qquad L_n(z) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Per le ipotesi fatte sulla successione $\{\lambda_n\}$ risulta (6)

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\log |1/L'(\lambda_n)|}{\lambda_n} = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{|\log 1/L_n(\lambda_n)|}{\lambda_n} = 0. \tag{3.2}$$

Inoltre le funzioni $L(z)$, $L_n(z)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ appartengono al tipo minimo dell'ordine 1; le loro trasformate di LAPLACE (siano esse rispettivamente $g(z)$, $g_n(z)$) sono quindi olomorfe per $z \neq 0$ e, qualunque sia λ, vale la relazione

$$L_n(\lambda) = L_n(-\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(s)} g_n(z - s)\, e^{-\lambda(z-s)}\, dz$$

e cioè

$$L_n(\lambda)\, e^{-\lambda s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(s)} g_n(z - s)\, e^{-\lambda z}\, dz.$$

(5) Vedasi ad es. G. PÓLYA [6], Lemma 8, p. 633.
(6) V. BERNSTEIN [1], formula (5), p. 27.

Tenendo conto che $L_n(\lambda_j) = 0$ se $j \neq n$, si ottiene allora

$$a_n L_n(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(s)} g_n(z - s) \varphi(z) \, dz . \tag{3.3}$$

Dalla disuguaglianza $|L_n(z)| \leqslant |L(i|z|)|$ si deduce facilmente che le funzioni $g_n(z)$ sono equilimitate per $|z| \geqslant r$ ($r > 0$ arbitrario). Di conseguenza, ricordando la (3.1), da (3.3) si ricava la limitazione

$$|a_n L_n(\lambda_n)| e^{-\lambda_n \sigma} \leqslant A(\mathfrak{M}(\sigma - \varepsilon))^{(3+\alpha)/4} \tag{3.4}$$

($A = A(\varepsilon)$ indipendente da n).

Per ogni $\eta > 0$, $n \geqslant n_0(\eta)$, in forza della (3.2) risulta

$$1/|L_n(\lambda_n)| \leqslant \exp(\eta \lambda_n)$$

e quindi da (3.4) segue

$$|a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leqslant A e^{\eta \lambda_n} (\mathfrak{M}(\sigma - \varepsilon))^{(3+\alpha)/4} . \tag{3.5}$$

Sia $\mu(\sigma)$ il « termine massimo » (7) della serie (2.1) e $\nu(\sigma)$ il suo indice. Da (3.5) si ottiene, in particolare, per $\sigma \leqslant \sigma_1(\eta)$,

$$\log \mu(\sigma) \leqslant \frac{3 + \alpha}{4} \log \mathfrak{M}(\sigma - \varepsilon) + \eta \, \nu(\sigma) + B \tag{3.6}$$

($B = B(\varepsilon)$ indipendente da σ).

Dalla relazione

$$\log \mu(\sigma - \varepsilon) = \log \mu(\sigma) + \int\limits_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} \nu(\sigma) \, d\sigma \tag{3.7}$$

si deduce che

$$\log \mu(\sigma) \geqslant \log \mu(\sigma - \varepsilon) - \varepsilon \, \nu(\sigma - \varepsilon) .$$

---

(7) Sia cioè:

$$\mu(\sigma) = |a_{\nu(\sigma)}| e^{-\lambda_{\nu(\sigma)} \sigma} = \operatorname*{Max}_n (|a_n| e^{-\lambda_n \sigma}) .$$

Se per qualche σ esistono più indici n pei quali è soddisfatta l'uguaglianza precedente, si conviene di assumere come $\nu(\sigma)$ il massimo di tali indici n.

Da (3.6) si ricava allora

$$\log \mu(\sigma - \varepsilon) \leqslant \frac{3+\alpha}{4} \log \mathfrak{M}(\sigma - \varepsilon) + (\eta + \varepsilon)\, \nu(\sigma - \varepsilon) + B\,.$$

Dividiamo per $\log \mu(\sigma - \varepsilon)$ e facciamo tendere σ a $-\infty$. Tenendo presente che per la funzione $\varphi(s)$ valgono le relazioni

$$\lim_{\sigma \to -\infty} \frac{\log \mathfrak{M}(\sigma)}{\log \mu(\sigma)} = 1 \quad (^8)\,,$$

$$\overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\nu(\sigma)}{\log \mu(\sigma)} = l < +\infty \quad (^9)\,,$$

si perviene alla disuguaglianza

$$1 \leqslant \frac{3+\alpha}{4} + l(\eta + \varepsilon)$$

assurda, essendo $\alpha < 1$ ed η, ε arbitrari.

Il Teorema I è così dimostrato.

---

(8) K. Sugimura [9], teorema 5, p. 265.

(9) Infatti, se fosse $l = +\infty$, per ogni $k > 0$, $\sigma \leqslant \sigma_0(k)$ sarebbe $\nu(\sigma) > k \log \mu(\sigma)$. Da (3.7) si otterrebbe allora, per ogni $\delta > 0$, $\sigma \leqslant \sigma_0(k)$,

$$\log \mu(\sigma - \delta) \geqslant \log \mu(\sigma) + \delta \log \nu(\sigma) > (1 + \delta\, k) \log \mu(\sigma)$$

e quindi, per ogni n intero positivo,

$$\log \mu(\sigma_0 - n\delta) > (1 + \delta\, k)^n \log \mu(\sigma_0)\,.$$

Essendo allora

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\log \log \mu(\sigma_0 - n\,\delta)}{-(\sigma_0 - n\delta)} \geqslant \frac{\log(1 + \delta\, k)}{\delta}\,,$$

l'ordine ϱ secondo Ritt di $\varphi(s)$ dovrebbe soddisfare, per ogni $k > 0$, $\delta > 0$, la limitazione

$$\varrho \geqslant \frac{\log(1 + k\delta)}{\delta}\,,$$

il che è assurdo essendo $\varrho < +\infty$.

4. - Dimostrazione del Teorema II.

È ben noto che un valore eccezionale secondo PICARD (v. e. P.) di una funzione intera non costante è anche un valore asintotico per tale funzione ([10]). Prendiamo allora in esame gli eventuali valori asintotici di $\varphi(s)$.

Supponiamo che al tendere di s a infinito lungo una linea continua γ esista

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ s\in\gamma}} \varphi(s) = \alpha$$

e distinguiamo i tre possibili casi seguenti ($s = \sigma + i\tau$):

a) $\lim\limits_{\substack{s\to\infty \\ s\in\gamma}} \sigma = -\infty$; allora, per il Teorema I, è necessariamente $\alpha = \infty$.

b) $\overline{\lim\limits_{\substack{s\to\infty \\ s\in\gamma}}}\, \sigma = \sigma_0$ $(-\infty < \sigma_0 < +\infty)$; allora α appartiene alla chiusura dell'insieme dei valori assunti da $\varphi(s)$ sulla retta $\sigma = \sigma_0$ e quindi ([11]) non può essere v. e. P. di $\varphi(s)$.

c) $\overline{\lim\limits_{\substack{s\to\infty \\ s\in\gamma}}}\, \sigma = +\infty$; allora è necessariamente $\alpha = 0$.

L'unico eventuale v. e. P. di $\varphi(s)$ è dunque il valore zero. Ma se $\varphi(s)$ si annullasse al piú un numero finito di volte, la funzione

$$\varphi_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-(\lambda_n - \lambda_0)s}$$

avrebbe come v. e. P. il valore $-a_0 \neq 0$ e questo è assurdo perchè $\varphi_1(s)$ soddisfa anch'essa le condizioni del Teorema II.

La funzione $\varphi(s)$ assume quindi infinite volte qualunque valore finito.

5. - Un esempio.

Sia $\delta > 0$ arbitrario; daremo ora un esempio di funzione intera $\varphi(s)$ di ordine secondo RITT finito, con la successione $\{\lambda_n\}$ di densità zero e indice di condensazione δ e per la quale, al tendere di s a $\mathfrak{Re}\, s = -\infty$ lungo il semiasse reale negativo, la (2.2) non è verificata.

([10]) Vedasi ad es. G. PÓLYA e G. SZEGÖ [7] vol. II, n. 194, p. 34 e p. 215.
([11]) Vedasi ad es. J. FAVARD [2], p. 131.

Poniamo

$$\lambda_{2n} = n \log n, \qquad \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n} + \exp(-\delta\, \lambda_{2n});$$
$$a_{2n} = -a_{2n+1} = -(\lambda_{2n}/e)^{-\lambda_{2n}}$$

$(n = 3, 4, \ldots)$ e consideriamo la funzione

$$\varphi(s) = \sum_{n=6}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s}.$$

La successione $\{\lambda_n\}$ ha densità zero e il suo indice di condensazione è uguale a

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left(\frac{1}{\lambda_{2n}} \log \frac{1}{\lambda_{2n+1} - \lambda_{2n}}\right) = \delta.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} (\lambda_n\, |a_n|^{1/\lambda_n}) = e, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1,$$

la funzione intera $\varphi(s)$ ha ordine e tipo secondo RITT uguali a 1 ([12]) ed è inoltre ad accrescimento perfettamente regolare ([13]). Per ogni $\varepsilon > 0$, $\sigma < \sigma_0(\varepsilon)$ risulta quindi

$$\log \mathfrak{M}(\sigma) > (1-\varepsilon)\, e^{-\sigma}. \tag{5.1}$$

Esaminiamo il comportamento di $\varphi(s)$ sulla semiretta $s = \sigma$ $(\sigma < 0)$.

Fissato σ, sia N il minimo intero n per il quale è verificata la disuguaglianza $\delta\, \lambda_{2n} > \log(-\sigma)$. La funzione

$$\varphi_1(\sigma) = \sum_{n=6}^{2N-1} a_n\, e^{-\lambda_n \sigma}$$

soddisfa evidentemente le disuguaglianze

$$|\varphi_1(\sigma)| < (2N-1)\, e^{-\lambda_{2N-1}\sigma} < \lambda_{2N-1}\, e^{-\lambda_{2N-1}\sigma} <$$
$$< \left(\frac{\log(-\sigma)}{\delta} + 1\right) \exp\left[-\left(\frac{\log(-\sigma)}{\delta} + 1\right)\sigma\right],$$

([12]) J. F. RITT [8], p. 78.
([13]) YU CHIA-YUNG [12], teorema 2.3, p. 72.

da cui si ottiene

$$|\varphi_1(\sigma)| = o(e^{\sigma^2}) \qquad \text{per} \qquad \sigma \to -\infty. \tag{5.2}$$

Consideriamo ora la funzione

$$\varphi_2(\sigma) = \sum_{n=2N}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma}.$$

Se $0 < x < 1$, vale la disuguaglianza $e^x - 1 < e\, x$; quindi

$$|\varphi_2(s)| = \sum_{n=N}^{\infty} |a_{2n}| e^{-\lambda_{2n}\sigma} (e^{-\sigma \exp(-\delta\lambda_{2n})} - 1) \leqslant -e\,\sigma \sum_{n=N}^{\infty} |a_{2n}| e^{-\lambda_{2n}(\sigma+\delta)}$$

$$\leqslant -e\,\sigma \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{e^{1-\delta}}{\lambda_{2n}}\right)^{\lambda_{2n}} e^{-\lambda_{2n}\sigma} = -e\,\sigma \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_{2n}\sigma}.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|1/\alpha_n|}{\lambda_{2n}\log\lambda_{2n}} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} (\lambda_{2n}\ |\alpha_n|^{1/\lambda_{2n}}) = e^{1-\delta},$$

la funzione intera $\sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_{2n}\sigma}$ ha ordine e tipo secondo RITT rispettivamente uguali a 1 ed $e^{-\delta}$. Per ogni $\varepsilon > 0$, $\sigma < \sigma_1(\varepsilon)$, è quindi

$$\log|\varphi_2(\sigma)| < (e^{-\delta} + \varepsilon)\, e^{-\sigma}.$$

Dalla relazione evidente $\varphi(\sigma) = \varphi_1(\sigma) + \varphi_2(\sigma)$, tenendo conto della (5.2), si deduce allora

$$\log|\varphi(\sigma)| < (e^{-\delta} + \varepsilon)\, e^{-\sigma}$$

per ogni $\varepsilon > 0$, $\sigma < \sigma_2(\varepsilon)$.

Ricordando (5.1), si ha infine

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\log|\varphi(\sigma)|}{\log \mathfrak{M}(\sigma)} \leqslant \frac{e^{-\delta}+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\log|\varphi(\sigma)|}{\log \mathfrak{M}(\sigma)} \leqslant e^{-\delta} < 1,$$

come dovevasi dimostrare.

Bibliografia.

[1] V. BERNSTEIN, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Gauthier-Villars, Paris 1933.

[2] J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Gauthier-Villars, Paris 1933.

[3] W. H. J. FUCHS, *Proof of a conjecture of G. Pólya concerning gap series*, Illinois J. Math. **7** (1963), 661-667.

[4] T. KÖVÁRI, *A gaptheorem for entire functions of infinite order*, Michigan Math. J. **12** (1965), 133-140.

[5] T. KÖVÁRI, *On the asymptotic paths of entire functions with gap power series*, J. Analyse Math. **15** (1965), 281-286.

[6] G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*, Math. Z. **29** (1929), 549-640.

[7] G. PÓLYA und G. SZËGO, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, J. Springer, Berlin 1925.

[8] J. F. RITT, *On certain points in the theory of Dirichlet series*, Amer. J. Math. **50** (1928), 73-86.

[9] K. SUGIMURA, *Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen*, Math. Z. **29** (1929), 264-277.

[10] F. SUNYER BALAGUER, *On the distribution of values of an entire function represented by a lacunary Dirichlet series*, Rev. Acad. Ci. Zaragoza (2) **5** (1950), 25-73.

[11] F. SUNYER BALAGUER, *Values of entire functions represented by Dirichlet series*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 310-322.

[12] YU CHIA-YUNG, *Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **68** (1951), 65-104.

Summary.

A well known theorem of G. Pólya concerning the entire functions represented by gap power series is extended to the gap Dirichlet series. We prove also that these functions cannot have Picard exceptional values.

* * *