Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 27-53

A. CRUMEYROLLE (*)

Variétés différentiables à structure complexe hyperbolique. Application à la théorie unitaire relativiste des champs. (**)

1. - Extension quadratique de l'anneau R des réels.

R désigne l'ensemble des nombres réels; on appelle ici extension quadratique de R, une algèbre associative A par rapport à R ayant une base de deux éléments dont l'un est identifié par un abus classique de notation à l'élément unité de R, ε désigne le second élément de cette base. On sait [1] que la multiplication dans A est entièrement déterminée par la connaissance de ε^2, elle est commutative, et on peut toujours se ramener au cas où $\varepsilon^2 = \gamma \in R$.

Si γ n'est pas un carré dans R, A est un corps (si $\varepsilon^2 = -1$ c'est le corps des complexes C) (cas elliptique).

Si γ est un carré dans R, $\gamma = \mu^2 \neq 0$, A est un anneau non intègre, et en prenant comme nouvelle base:

$$e_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu}\right), \qquad e_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\mu}\right),$$

$$e_{\mathrm{I}}\, e_{\mathrm{II}} = 0, \qquad e_{\mathrm{I}}^2 = e_{\mathrm{I}}, \qquad e_{\mathrm{II}}^2 = e_{\mathrm{II}},$$

on voit que A est composé direct de deux corps ($R\, e_{\mathrm{I}}$) et ($R\, e_{\mathrm{II}}$) isomorphes à R (cas hyperbolique).

Enfin si $\gamma = 0$, A est un anneau non intègre (nombres duaux) (cas parabolique).

(*) Indirizzo: Faculté des Sciences, Université, Toulouse, France.
(**) Ricevuto: 20-III-1965. Voir le «Sommaire» à la fin de ce travail.

Dans les trois cas l'application qui à $z = a + \varepsilon b$ associe $\bar{z} = a - \varepsilon b$ est un automorphisme involutif de A. On pose $N(z) = z\bar{z}$.

Si $z = \bar{z}$ on dit que z est «réel», il sera dit «complexe» dans le cas contraire. De plus $N(z) = 0$ exprime que z est inversible.

On peut définir sur A une topologie soit par $\| a + \varepsilon b \| = \text{Sup}\,(|a|, |b|)$, soit de manière équivalente par $|a| + |b|$.

f étant une application de A dans A

$$(f) \quad z \to f(z) = P(x, y) + \varepsilon Q(x, y), \quad \text{où } P \text{ et } Q \text{ sont à valeurs réelles,}$$

nous désignerons $P(x, y)$ par $\mathscr{R}[f(z)]$ et $Q(x, y)$ par $\mathscr{T}[f(z)]$ (partie « réelle » et « imaginaire »).

Il n'y aura rien de particulier à dire sur la continuité, par contre nous allons examiner la notion de différentiabilité.

2. - Fonctions différentiables en un point.

Nous dirons que f est différentiable au point $z = x + \varepsilon y$, s'il existe $A(x, y)$ et $B(x, y)$ à valeurs réelles, telles que

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & P(x+h, y+k) + \varepsilon Q(x+h, y+k) - P(x, y) - \varepsilon Q(x, y) = \\ & = (A + \varepsilon B)(h + \varepsilon k) + \alpha(z, h + \varepsilon k) \, \| h + \varepsilon k \| , \end{aligned} \right.$$

avec $\lim\limits_{(h+\varepsilon k) \to 0} \alpha(z, h + \varepsilon k) = 0$.

Il en résulte que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au sens usuel et que nécessairement

$$(2) \qquad A(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$(3) \qquad B(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \varepsilon^2 B(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$A + \varepsilon B = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sera appelé coefficient différentiel de $f(z)$ au point z et noté $\dfrac{df}{dz}$ (le lecteur établira facilement des proprietés élémentaires évidentes). Réciproquement: si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au sens usuel, les conditions (2) et (3) étant satisfaites, $f(z)$ est bien différentiable au point z.

Si $\varepsilon^2 = -1$, nous retrouvons une situation classique.

Si $\varepsilon^2 = 1$ (et nous nous bornerons ci-dessous à ce cas en posant $A = H$), nous dirons que nous avons affaire à des nombres complexes hyperboliques (H-complexes), que $f(z)$ est holomorphe dans un domaine de R^2 si elle est différentiable en tout point de ce domaine, que les deux équations

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

traduisent l'harmonicité hyperbolique. (Pour plus de détails, cf. les nn. 4 et 5 ci-dessous, où l'on fera $n = 1$.)

Remarque. Si on avait considéré le cas général $\varepsilon^2 = \lambda\,\varepsilon + \gamma$, on trouverait $\gamma \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \lambda \dfrac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y} - \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ et la condition analogue pour Q. Le changement de base de H qui ramène à l'un des trois cas fondamentaux permet de ramener l'equation aux dérivées partielles précédente à une forme canonique: elliptique, hyperbolique ou parabolique, et cela de manière très naturelle.

3. - Modules sur l'anneau H des nombres complexes hyperboliques.

Considérons E, H-module unitaire admettant une base finie (e_λ) à n éléments. Pour $v \in E$, posons

$$v = (a^\lambda + \varepsilon\, a^{\lambda^*})\, e_\lambda\,.$$

On sait que toute autre base de E a n éléments et se déduit des (e_λ) par une matrice carrée inversible. Un tel module peut d'ailleurs être identifié à un espace vectoriel sur R de dimension $2n$, de base $(e_\lambda\,,\, e_{\lambda^*})$ avec $\varepsilon\, e_\lambda = e_{\lambda^*}$.

F_R étant un espace vectoriel sur R de dimension n, de base (f_λ), on peut plonger F_R dans un H-module unitaire F_H: on sait que l'image de F_R par l'application R-linéaire

$$(\varphi) \qquad x \to 1 \otimes x\,,$$

engendre le H-module F_H; φ est un R-isomorphisme de F_R dans F_H, $(1 \otimes f_\lambda)$ est une base de F_H dont on écrira encore les éléments (f_λ), $F_H = H \underset{R}{\otimes} F_R$, et nous dirons que F_H est l'amplifié de F_R par extension de R à H. Ainsi H^n est l'amplifié de R^n (cf. [2]).

4. - L'automorphisme $\mathscr{I}$.

E^n_H étant un H-module de dimension H-complexe n, soit f un isomorphisme de H^n sur E^n_H. On pourra définir sur E^n_H une anti-involution

$$\tau = f \circ \sigma \circ f^{-1} \qquad \text{avec} \quad (\sigma) \ z^i \to \overline{z^i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

telle que

$$\tau(\alpha + \beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta), \qquad \tau(\lambda\alpha) = \bar{\lambda}\, \tau(\alpha)$$

quels que soient α, β appartenant à E et λ appartenant à H. Pour l'essentiel on pourra reprendre la théorie des espaces vectoriels complexes (cf. [4]). En particulier E^{2n}_R étant un R-module de dimension réelle $2n$ on pourra introduire son amplifié E^{2n}_R et si

$$E^{2n}_H = S^n_H \otimes \tau\, S^n_H ,$$

où S^n_H est de dimension H-complexe n, on dira que E^{2n}_R possède une structure complexe hyperbolique.

Tout espace E^{2n}_R peut être muni d'une structure complexe hyperbolique, d'une infinité de manières.

Soit (f_α), (f_{α^*}) une base de E^{2n}_R $(\alpha, \alpha^* = 1, \dots, n)$.

Posons

$$\varepsilon_\alpha = e_{\mathrm{I}} f_\alpha + e_{\mathrm{II}} f_{\alpha^*}, \qquad \varepsilon_{\alpha^*} = e_{\mathrm{II}} f_\alpha + e_{\mathrm{I}} f_{\alpha^*}.$$

Inversement:

$$f_\alpha = e_{\mathrm{I}}\, \varepsilon_\alpha + e_{\mathrm{II}}\, \varepsilon_{\alpha^*}, \qquad f_{\alpha^*} = e_{\mathrm{II}}\, \varepsilon_\alpha + e_{\mathrm{I}}\, \varepsilon_{\alpha^*},$$

de sorte que les $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha^*})$ constituent une base de E^{2n}_H amplifié de E^{2n}_R. On vérifie que $\tau\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha^*}$, donc (ε_α) et (ε_{α^*}) engendrent respectivement deux sous-modules conjugués de E^{2n}_H et le résultat est établi.

Nous pourrons alors définir canoniquement un automorphisme $\mathscr{I}$ attaché à cette structure, tel que $\mathscr{I}^2 = I$, opérant dans E^{2n}_R.

En effet les éléments « réels » de E^{2n}_H sont des éléments de la forme $a = \lambda + \tau\lambda$, $\lambda \in S^n_H$; cela permet de définir un R-isomorphisme h de S^n_H sur E^{2n}_R (h) $\lambda \to h(\lambda) = a$, puis $\mathscr{I} = h \circ \varepsilon 1 \circ h^{-1}$ et on a bien $\mathscr{I}^2 = I$.

Cherchons la matrice de $\mathscr{I}$ relativement au repère (f_α, f_{α^*}):

$$\mathscr{I}(f_\alpha) = (e_{\mathrm{I}}\, \varepsilon)(\varepsilon_\alpha) - (e_{\mathrm{II}}\, \varepsilon)(\varepsilon_{\alpha^*}) = (e_{\mathrm{I}}\, \varepsilon)\, f_\alpha - (e_{\mathrm{II}}\, \varepsilon)\, f_\alpha ,$$

$$\mathscr{I}(f_\alpha) = f_\alpha , \qquad \mathscr{I}(f_{\alpha^*}) = -f_{\alpha^*} ,$$

donc $\mathcal{I}$ est diagonalisable et son polynôme caractéristique est

$$(X^2 - 1)^n .$$

Réciproquement, si on se donne un automorphisme $\mathcal{I}$ de E_R^{2n} tel que $\mathcal{I}^2 = I$ et que son polynôme caractéristique admette les racines $+1$ et -1 au même ordre n [1], on peut trouver une base (f_α), (f_{α^*}) de E_R^{2n} telle que $\mathcal{I}(f_\alpha) = f_\alpha$, $\mathcal{T}(f_{\alpha^*}) = - f_{\alpha^*}$; en posant

$$\varepsilon_\alpha = e_{\mathrm{I}} f_\alpha + e_{\mathrm{II}} f_{\alpha^*} , \qquad \varepsilon_{\alpha^*} = e_{\mathrm{II}} f_\alpha + e_{\mathrm{I}} f_{\alpha^*} , \qquad (\alpha, \alpha^* = 1, 2, \ldots, n)$$

on peut définir une base de E_H^{2n} et écrire une décomposition de ce module en somme directe des sous-modules engendrés respectivement par les (ε_α) et les (ε_{α^*}), conjugués l'un de l'autre, et obtenir ainsi une structure complexe hyperbolique sur E_H^{2n} à laquelle $\mathcal{I}$ est canoniquement attachée.

Il nous sera utile d'introduire plus loin des repères (e_α), (e_{α^*}) «réels»:

$$e_\alpha = f_\alpha + f_{\alpha^*} , \qquad \varepsilon_\alpha = \tfrac{1}{2} (e_\alpha + \varepsilon\, e_{\alpha^*}) ,$$

$$e_{\alpha^*} = f_\alpha - f_{\alpha^*} , \qquad \varepsilon_{\alpha^*} = \tfrac{1}{2} (e_\alpha - \varepsilon\, e_{\alpha^*}) ,$$

tels que

$$\mathcal{I} e_\alpha = e_{\alpha^*} , \qquad \mathcal{I} e_{\alpha^*} = e_\alpha ,$$

et pour lesquels la matrice de $\mathcal{I}$ prend la forme simple

$$\begin{Vmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{Vmatrix} ,$$

tandis que dans le repère $(\varepsilon_\alpha , \varepsilon_{\alpha^*})$ la matrice de $\mathcal{I}$ s'écrit

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon\, I_n & 0 \\ 0 & -\varepsilon I_n \end{Vmatrix} .$$

Il n'est pas sans intérêt de noter que les sous-espaces propres de $\mathcal{I}$ dans E_R^{2n}, connus à un isomorphisme près, déterminent S_H^n et $\tau\, S_H^n$ de manière intrinsèque, indépendamment du choix de la base $(f_\alpha , f_{\alpha^*})$.

---

[1] Il est équivalent de dire que le polynôme minimum de $\mathcal{I}$ est $x^2 - 1$ et que la trace de $\mathcal{I}$ est nulle.

En effet si $v \in E^{2n}_H$ est tel que:

$$\mathscr{I} v = \varepsilon\, v\,,$$

$$\mathscr{I}(v^\alpha\, \varepsilon_\alpha + v^{\alpha^*}\, \varepsilon_{\alpha^*}) = \varepsilon\, (v^\alpha\, \varepsilon_\alpha + v^{\alpha^*}\, \varepsilon_{\alpha^*})\,,$$

$$(\varepsilon\, \varepsilon_\alpha) v^\alpha - (\varepsilon\, \varepsilon_{\alpha^*})\, v^{\alpha^*} = (\varepsilon\, \varepsilon_\alpha)\, v^\alpha + (\varepsilon\, \varepsilon_{\alpha^*})\, v^{\alpha^*}\,,$$

d'où $v^{\alpha^*} = 0$ (car ε est régulier), donc

$$v \in S^n_H\,,$$

de même, si $\mathscr{I}\, v = -\, \varepsilon\, v$,

$$v \in \tau\, S^n_H\,.$$

Le repère $(\varepsilon_\alpha\,,\ \varepsilon_{\alpha^*})$ sera dit adapté à la structure H-complexe, le repère $(e_\alpha\,,\, e_{\alpha^*})$ lui étant associé. $(f_\alpha\,,\, f_{\alpha^*})$ est le repère « produit ».

Deux repères adaptés se déduisent l'un de l'autre par une matrice $\| A^i_j \|$ régulière telle que

$$A^{\alpha^*}_{\beta^{*\prime}} = \overline{A^\alpha_{\beta'}}\,, \qquad A^{\alpha^*}_{\beta'} = A^\alpha_{\beta^{*\prime}} = 0\,.$$

Si $A^\alpha_{\beta'} = B^\alpha_{\beta'} + \varepsilon\, C^\alpha_{\beta'}$, la base $(e_{i'})$ se déduit de la base (e_i) au moyen de la matrice réelle régulière $2n \times 2n$

$$\begin{Vmatrix} B & C \\ C & B \end{Vmatrix}$$

et $(f_{i'})$ de (f_i) par

$$\begin{Vmatrix} B + C & 0 \\ 0 & B - C \end{Vmatrix}.$$

Nous noterons que si $v = z^\alpha\, \varepsilon_\alpha + z^{\alpha^*}\, \varepsilon_{\alpha^*}$ avec

$$z^\alpha = x^\alpha + \varepsilon\, x^{\alpha^*}\,, \qquad z^{\alpha^*} = +\, \overline{z^\alpha}\,, \qquad\qquad (x^\alpha \text{ et } x^{\alpha^*} \text{ réels}),$$

v est un élément de E^{2n}_R, dont les composantes sur les $(e_\alpha\,,\, e_{\alpha^*})$ sont $(x^\alpha,\, x^{\alpha^*})$, et sur les (f_α, f_{α^*})

$$\xi^\alpha = x^\alpha + x^{\alpha^*}, \qquad \xi^{\alpha^*} = x^\alpha - x^{\alpha^*}.$$

Ainsi les trois sortes de composantes de v s'obtiennent très simplement à partir des premières en prenant dans le R-module H, soit la base $(1, \varepsilon)$ ce qui donne les coordonnées (x^α, x^{α^*}), soit la base $(e_{\mathrm{I}}, e_{\mathrm{II}})$ ce qui donne les coordonnées $(\xi^\alpha, \xi^{\alpha^*})$.

5. - Variétés différentiables a structure complexe hyperbolique.

Soit V_R^{2n} une variété réelle différentiable de classe C^∞, de dimension $2n$. Nous appellerons carte locale H-complexe de V_R^{2n}, une représentation topologique d'un voisinage ouvert U de V_R^{2n} sur un ouvert de H^n, H^n étant munie de la topologie, produit de la topologie des H, définie plus haut. Une telle carte associe à tout point (p), de V_R^{2n}, n nombres H-complexes z^α:

$$z^\alpha = x^\alpha + \varepsilon\, x^{\alpha^*} = e_1\, \xi^\alpha + e_2\, \xi^{\alpha^*} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

qui sont les coordonnées de (p) dans la carte considérée.

La variété V_R^{2n} admet une structure différentiable H-complexe s'il existe un ensemble de cartes H-complexes dont les domaines recouvrent la variété, le passage d'un système de coordonnées (z^α) à un autre $(z^{\alpha'})$ en tout point commun à l'intersection de deux voisinages, utilisant des fonctions f^{α^*} des (z^λ), différentiables, de matrice jacobienne régulière. Comme d'habitude on complète cette définition par une relation d'équivalence entre les systèmes de cartes ou atlas.

Les hypothèses de différentiabilité se traduisent ici par:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^{i*'}}{\partial x^{i*}} \qquad [i = 1, 2, \ldots, 2n; \quad * = (\pm n)], \tag{4}$$

quand on pose $z^{\alpha'} = f^{\alpha'}(z^\lambda) = x^{\alpha'} + \varepsilon\, x^{\alpha^{*'}}$.

Elles se traduisent encore très simplement quand on pose

$$z^\alpha = e_1\, \xi^\alpha + e_2\, \xi^{\alpha^*},$$

(4) équivaut à

$$\frac{\partial \xi^{\alpha'}}{\partial \xi^{\lambda^*}} = \frac{\partial \xi^{\alpha'}}{\partial \xi^{\lambda}} = 0 \tag{5}$$

et il vient

$$\frac{\partial \xi^{\alpha'}}{\partial \xi^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda^*}}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \xi^{\alpha *'}}{\partial \xi^{\lambda^*}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda^*}}. \tag{7}$$

(5) montre que V_R^{2n} est le produit de 2 variétés réelles identiques

$$V_R^{2n} = W_R^n \times W_R^n.$$

C'est pourquoi nous appellerons (ξ^α, ξ^{α^*}) coordonnées produits. Il est clair que si l'on introduit l'espace tangent en un point de V_R^{2n}, soit T_H^{2n}, son complexifié T_H^{2n} et leurs duaux T_H^{*2n} et T_H^{*1n}, les dz^α, dz^{α^*} constituent une base adaptée de T_H^{2n}, les dx^α, dx^{α^*} la base associée et les $d\xi^\alpha$, $d\xi^{\alpha^*}$ la base produit. On peut introduire les bases duales de T_H^{2n} et T_R^{2n} est muni d'une structure complexe hyperbolique. Les repères adaptés naturels se déduisent l'un de l'autre par des matrices régulières ($2n \times 2n$) à éléments H-complexes de la forme

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{Vmatrix},$$

où $A = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial z^{\alpha'}}{\partial z^{\lambda}} \end{Vmatrix}$, avec

$$\frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial z^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}} + \varepsilon \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda^*}} = e_1 \frac{\partial \xi^{\alpha *'}}{\partial \xi^{\lambda}} + e_2 \frac{\partial \xi^{\alpha *'}}{\partial \xi^{\lambda^*}}.$$

Les (dz^α), (dz^{α^*}) définissent ainsi deux sous-modules $(S_H^n)^*$ et $\tau(S_H^n)^*$ dont la somme directe est $(T_H^{2n})^*$, permettant d'introduire sur V_R^{2n} un champ d'opérateurs linéaires $\mathscr{I}$, tels que $\mathscr{I}^2 = I$, d'équation caractéristique $(X^2 - 1)^n = 0$ et de trace nulle.

Sur une variété réelle V_R^{2n}, donnée a priori, on pourrait définir une structure presque H-complexe à l'aide d'un champ d'opérateurs linéaires $\mathscr{I}$, tels que $\mathscr{I}^2 = I$ d'équation caractéristique $(X^2 - 1)^n$ et de trace nulle, et développer une théorie parallèle à celle de M. LICHNEROWICZ [4]: nous signalons simplement le fait.

6. - Construction d'une variété a structure complexe hyperbolique.

On a vu que si V_R^{2n} admet une structure complexe hyperbolique, c'est nécessairement le produit d'une variété réelle W_R^n par elle-même.

Réciproquement, étant donnée une varieté différentiable réelle W_R^n, considérons le produit topologique $W_R^n \times W_R^n$. De tout atlas de la variété W_R^n on déduit classiquement un atlas de la variété produit:

si (p) et (q) de coordonnées (ξ^α) et (ξ^{α^*}) appartiennent aux domaines U_α et U_{α^*} de deux cartes de W_R^n, le point (p, q) est muni des coordonnées $(\xi^\alpha, \xi^{\alpha^*})$ dans le domaine $U_\alpha \times U_{\alpha^*}$ de $W_R^n \times W_R^n$, avec la condition que si $(p, q) \in$ $\in (U_\alpha \times U_{\alpha^*}) \cap (U_{\alpha'} \times U_{\alpha^{*\prime}}) \neq \varnothing$ [$U_{\alpha'}$ et $U_{\alpha^{*\prime}}$ étant deux autres domaines de cartes de W_R^n contenant respectivement (p) et (q)], les coordonnées $(\xi^{\alpha'}, \xi^{\alpha^{*\prime}})$ de (p, q) dans $U_{\alpha'} \times U_{\alpha^{*\prime}}$ sont liées à ses coordonnées dans $U_\alpha \times U_{\alpha^*}$ par

$$\xi^{\alpha'} = \Phi^{\alpha'}(\xi^\lambda) , \qquad \xi^{\alpha^{*\prime}} = \Phi^{\alpha^{*\prime}}(\xi^{\lambda^*}) ,$$

$\Phi^{\alpha'}$ et $\Phi^{\alpha^{*\prime}}$ étant des fonctions réelles, différentiables, de variables réelles, à jacobien non nul dans l'intersection.

Posant allors:

$$z^\alpha = e_1\, \xi^\alpha + e_2\, \xi^{\alpha^*} , \qquad z^{\alpha'} = e_1\, \xi^{\alpha'} + e_2\, \xi^{\alpha^{*\prime}} ,$$

le passage des (z^α) aux $(z^{\alpha'})$ satisfait aux conditions (5) pour les variétés à structure complexe hyperbolique.

Ainsi la donnée d'une variété V_R^{2n} à structure complexe hyperbolique équivaut à celle du produit de deux variétés réelles identiques de dimension n.

7. - Sous-variété diagonale.

Soit $\mathscr{V}_R^n$ la sous-variété de $V_R^{2n} = W_R^n \times W_R^n$ formée de couples dont les éléments p et q sont identiques.

A tout recouvrement de $\mathscr{V}_R^n$ par une famille d'ouverts, domaines de cartes admissibles, on peut associer un recouvrement d'un voisinage de $\mathscr{V}_R^n$, dans V_R^{2n}, par le procédé suivant.

Soit U_α un voisinage de $p(\xi^\alpha)$, domaine d'un système de coordonnées de $\mathscr{V}_R^n$; les éléments $(U_\alpha \times U_\alpha)$ constituent un système de voisinages de $\mathscr{V}_E^n$ dans V_R^{2n}. Si q de coordonnées (ξ^{α^*}) appartient aussi à U_α, nous munissons le point (p, q) des coordonnées $(\xi^\alpha, \xi^{\alpha^*})$ dans $U_\alpha \times U_\alpha$, avec la condition que si $(p, q) \in (U_\alpha \times U_\alpha) \cap (U_{\alpha'} \times U_{\alpha'}) \neq \varnothing$ ($U_{\alpha'}$ étant le domaine d'une autre carte de $\mathscr{V}^n_R$ contenant p et q), les coordonnées $(\xi^{\alpha'}, \xi^{\alpha^{*'}})$ de (p, q) dans $U_{\alpha'} \times U_{\alpha'}$ s'expriment par

$$\xi^{\alpha'} = \Phi^{\alpha'}(\xi^\lambda) , \qquad \xi^{\alpha^{*'}} = \Phi^{\alpha^{*'}}(\xi^{\lambda^{*'}}) ,$$

$\Phi^{\alpha'}$ et $\Phi^{\alpha^{*'}}$ étant des fonctions réelles, *identiques*, à jacobien non nul dans l'intersection.

Dans le système (z^α), il correspond à ces changements de coordonnées des fonctions $f^{\alpha'}$, H-complexes, différentiables *et qui se réduisent sur* $\mathscr{V}^n_R$ *à des fonctions réelles.* Réciproquement, à de telles fonctions $f^{\alpha'}$ sont associés des changements de coordonnées $(\xi^\alpha, \xi^{\alpha^*})$ du type précédent.

En effet:

$$z^{\alpha'} = e_1\, \xi^{\alpha'} + e_2\, \xi^{\alpha^{*'}} , \qquad \bar{z}^{\alpha'} = e_2\, \xi^{\alpha'} + e_1\, \xi^{\alpha^{*'}} .$$

Le symbole $\wedge$ désignera dans ce qui suit les restrictions des fonctions à $\mathscr{V}^n_R$, avec cette écriture il vient:

$$\hat{z}^{\alpha'} - \hat{\bar{z}}^{\alpha'} = (e_1 - e_2)\, (\hat{\xi}^{\alpha'} - \hat{\xi}^{\alpha^{*'}})$$

et comme $e_1 - e_2 = \varepsilon$, élément régulier de A,

$$\hat{\bar{z}}^{\alpha'} = \hat{z}^{\alpha'} \iff \hat{\xi}^{\alpha^{*'}} = \hat{\xi}^{\alpha'} \iff \Phi^{\alpha'} = \Phi^{\alpha^{*'}} ,$$

ce qui'il fallait établir.

On aura alors, d'après (6) et (7),

$$\frac{\partial \hat{x}^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda^*}} = \frac{\partial \hat{x}^{\alpha^{*'}}}{\partial x^\lambda} = 0 , \tag{8}$$

égalités valables uniquement sur $\mathscr{V}^n_R$ *et avec ce système de coordonnées que nous appellerons diagonales, système compatible avec la structure de* V^{2n}_R.

8. - Connexions linéaires complexes hyperboliques.

Étant donnée une variété différentiable V^m_R on peut considérer au point (p) de V^m_R l'espace tangent T^m_R et son amplifié T^m_H. Les repères de T^m_H aux différents points de V^m_R définissent un espace fibré principal $H(V^m_R)$ de groupe structural $GL(m, H)$. Une connexion linéaire H-complexe est une connexion infinitésimale sur cet espace fibré principal.

V_R^m étant munie d'un recouvrement par des voisinages U, une telle connexion peut être définie par la donnée dans chaque voisinage U d'une forme ω_u à valeurs dans l'algèbre de LIE du groupe linéaire complexe hyperbolique, représentable en chaque point par une matrice $m \times m$ dont les éléments sont des formes linéaires à valeurs H-complexes:

$$\omega_u = \omega_j^i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

satisfaisant dans l'intersection de deux voisinages $U \cap V \neq \varnothing$ à la condition habituelle de cohérence.

Les notions de connexions conjuguées, de connexions réelles se définissent sans difficulté comme dans le cas complexe [4].

Sur la variété V_R^{2n} munie d'une structure complexe hyperbolique on peut définir des connexions presque complexes relativement au sous-groupe de $GL(2n, H)$ formé des matrices régulières:

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{Vmatrix}.$$

Les matrices de connexion sont de la forme:

$$\pi_\beta^\alpha, \quad \pi_{\beta^*}^{\alpha^*} \quad (\pi_{\beta^*}^{\alpha^*} = \bar{\pi}_\beta^\alpha), \qquad \pi_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha + \varepsilon\, \omega_{\beta^*}^\alpha, \tag{10}$$

où les ω sont à valeurs réelles.

A toute connexion presque H-complexe on peut associer une connexion linéaire réelle par passage aux repères associés, et par laquelle la dérivée covariante du tenseur Δ, canoniquement associé à $\mathscr{I}$, est nulle [4].

9. - Les connexions de type «unitaire».

Pour des raisons justifiées plus loin, nous nous attacherons à l'étude de certaines connexions réelles pour lesquelles la dérivée covariante du tenseur presque complexe Δ est liée simplement au tenseur de torsion par des conditions dites de type unitaire.

En repères adaptés (coordonnées z^α, z^{α^*}) les coefficients de connexions seront désignés par

$$W_{jk}^i \qquad (i, j, k = 1, \ldots, 2n),$$

et en repères associés (x^α, x^{α^*}) par

$$L^i_{jk} \qquad (i,\ j,\ k = 1, \dots, 2n)\,.$$

Les conditions fondamentales de « type unitaire » seront les suivantes:

$$\nabla_r\, \Delta^s_i = 2\, S^k_{ri}\, \Delta^s_k \tag{11}$$

(S^k_{ri} désignant le tenseur de torsion), et *elles entraînent immédiatement la nullité du vecteur de torsion de la connexion* [12].

Elles se traduisent: en repères naturels associés par

$$L^r_{st} = L^{r^*}_{t^*\,s}\,. \tag{12}$$

Soit:

$$L^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\beta^*\,\gamma^*} = L^{\alpha^*}_{\gamma^*\beta} = L^{\alpha^*}_{\gamma\beta^*}\,, \qquad L^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\,\gamma^*} = L^\alpha_{\gamma^*\beta} = L^\alpha_{\gamma\beta^*}\,;$$

en repères adaptés par

$$W^\alpha_{\beta\gamma} = W^\alpha_{\gamma\beta}\,, \qquad W^\alpha_{\beta^*\,\gamma^*} = -\,W^\alpha_{\gamma^*\,\beta^*}\,, \qquad W^\alpha_{\beta^*\gamma} = W^\alpha_{\beta\gamma^*} = 0\,, \tag{13}$$

et (f. C. C.) en repères produits par

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\,, \qquad \Gamma^\alpha_{\beta^*\,\gamma^*} = -\,\Gamma^\alpha_{\gamma^*\,\beta^*}\,, \qquad \Gamma^\alpha_{\beta^*\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma^*} = 0 \tag{14}$$

et formules analogues.

Le commutateur de ∇ et de Δ.

Soit (v) un champ de vecteurs sur un domaine quelconque de V^{2n}_R muni d'une structure complexe hyperbolique et de la connexion dont les coefficients satisfont à (11).

Il vient alors:

$$\Delta^k_l\,(\nabla v^l) = \nabla(\Delta^k_l\, v^l) - (\nabla\, \Delta^k_l)\, v^l\,,$$

$$\nabla(\Delta^k_l\, v^l) - \Delta^k_l(\nabla\, v^l) = (\nabla_t \Delta^k_l)\, v^l\, dx^t\,,$$

$$\nabla(\Delta^k_l\, v^l) - \Delta^k_l\,(\nabla\, v^l) = 2\, S^r_{tl}\, \Delta^k_r\, v^l\, dx^t\,. \tag{15}$$

Si nous désignons par $\widetilde{\nabla}$ la dérivation covariante relativement à la connexion transposée $L^i_{jk} = L^{\tilde{i}}_{kj}$, nous avons

$$\nabla_r(\Delta^s_l v^l) = 2\, S^l_{rt}\, \Delta^s_l v^t + \Delta^s_l(\partial_r v^l) + L^l_{tr}\, \Delta^s_l v^t = (\tilde{\nabla}_r\, v^l)\, \Delta^s_l\,. \tag{15'}$$

Soit:

$$\nabla \circ \Delta = \Delta \circ \tilde{\nabla}\,,$$

il est immédiat de constater que cette dernière relation équivaut à (11).

Notons aussi que l'antisymétrie de S^r_{tl} en t et l entraîne la propriété suivante (non caractéristique pour ces connexions):

Si on attache à un vecteur quelconque (v) de l'espace tangent son transformé $(\mathscr{I}v)$, le couple $(v, \mathscr{I}v)$ est invariant dans la transformation linéaire induite par le transport de l'espace tangent, relativement à la connexion de type unitaire, le long des géodésiques issues de (v) ou de $(\mathscr{I}v)$.

10. - La forme quadratique fondamentale.

On peut introduire localement, au moins, sur V^{2n}_R un tenseur symétrique réel de composantes covariantes, en coordonnées adaptée (z^α, z^{α^*}):

$$\gamma_{\alpha\beta}\,, \qquad \gamma_{\alpha^*\beta^*}\,, \qquad \gamma_{\alpha\beta^*}\,,$$

et en coordonnées associées (x^α, x^{α^*}):

$$g_{\alpha\beta}\,, \qquad g_{\alpha^*\beta^*}\,, \qquad g_{\alpha\beta^*}\,.$$

Posant:

$$\begin{cases} \gamma_{\alpha\beta} = \mathscr{R}_{\alpha\beta} + \varepsilon \mathscr{I}_{\alpha\beta} \\ \gamma_{\alpha^*\beta^*} = \mathscr{R}_{\alpha^*\beta^*} + \varepsilon \mathscr{I}_{\alpha^*\beta^*}\,, \\ \gamma_{\alpha\beta^*} = \mathscr{R}_{\alpha\beta^*} + \varepsilon \mathscr{I}_{\alpha\beta^*} \end{cases} \qquad \bar{\gamma}_{ij} = \gamma_{i^*j^*}\,,$$

on observe que les trois type de composantes γ_{ij} se transforment de manière autonome par changement de repères adaptés. Un calcul facile montre que:

$$g_{\alpha\beta} = 2(\mathscr{R}_{\alpha\beta} + \mathscr{R}_{\alpha\beta^*})\,, \qquad g_{\alpha\beta^*} = 2(\mathscr{I}_{\alpha\beta} + \mathscr{I}_{\alpha^*\beta})\,,$$

$$g_{\alpha^*\beta^*} = 2(\mathscr{R}_{\alpha\beta} - \mathscr{R}_{\alpha\beta^*})\,, \qquad g_{\alpha^*\beta} = 2(\mathscr{I}_{\alpha\beta} - \mathscr{I}_{\alpha^*\beta})\,.$$

Il est possible de supposer que sur V_R^n $\hat{g}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha^*\beta^*} = 0$ (coordonnées diagonales associées) car sur V_R^n les trois sortes de coefficients $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha^*\beta^*}$, $g_{\alpha\beta^*}$ se transforment de manière autonome.

Ainsi $\widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta} = \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*} = 0$.

Et dans tout changement de coordonnées diagonales associées

$$\hat{g}_{\alpha'\beta^{*\prime}} = \frac{\partial \hat{x}^\lambda}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial \hat{x}^{\mu^*}}{\partial x^{\beta^{*\prime}}} \hat{g}_{\lambda\mu^*} = \frac{\partial \hat{x}^\lambda}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial \hat{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta'}} \hat{g}_{\lambda\mu^*}.$$

Ainsi les $\hat{g}_{\lambda\mu^*}$ se transforment comme les coefficients $\mathscr{G}_{\lambda\mu}$ qui définiraient un tenseur de $\mathscr{V}_R^n$ (coordonnées x^α).

En prenant les coordonnées diagonales adaptées il vient:

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = \varepsilon \frac{\hat{g}_{\alpha\beta^*} + \hat{g}_{\alpha^*\beta}}{4}, \qquad \hat{\gamma}_{\alpha\beta^*} = \varepsilon \frac{\hat{g}_{\alpha^*\beta} - \hat{g}_{\alpha\beta^*}}{4},$$

et f. C. C..

Sur V_R^{2n} il est impossible de supposer que tous les coefficients γ_{ij} sont des fonctions H-holomorphes, avec la condition $\gamma_{\alpha\beta^*} = \overline{\gamma_{\alpha^*\beta}}$, comme on le voit immédiatement, mais il est possible de supposer $\gamma_{\alpha\beta}$ H-holomorphe avec $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ donné sur $\mathscr{V}_R^n$, « imaginaire » pur.

En effet $\varepsilon\,\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ étant « réel » sur $\mathscr{V}_R^n$, si l'on pose

$$\varepsilon\,\gamma_{\alpha\beta} = e_1 P_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \xi^{\alpha^*}) + e_2 Q_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \xi^{\alpha^*}),$$

avec

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial \xi^{\lambda^*}} = \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\lambda} = 0.$$

De la réalité de $\varepsilon\,\gamma_{\alpha\beta}$ on déduit

$$\widehat{P}_{\alpha\beta}(\xi^\alpha) = \widehat{Q}_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha^*}), \qquad \varepsilon\,\gamma_{\alpha\beta} = e_1 P_{\alpha\beta}(\xi^\alpha) + e_2 P_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha^*}),$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{P_{\alpha\beta}(\xi^\alpha) - P_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha^*}) + \varepsilon\,[P_{\alpha\beta}(\xi^\alpha) + P_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha^*})]}{2}.$$

Ainsi la donnée de $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ étant fonction différentiable des z^α, détermine $\gamma_{\alpha\beta}$ dans tout voisinage diagonal.

On a alors:

$$\frac{\partial \gamma_{\alpha^*\beta^*}}{\partial z^\varrho} = 0\,, \qquad \frac{\partial \gamma_{\alpha^*\beta^*}}{\partial z^{\varrho^*}} = \overline{\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial z^\varrho}}\,.$$

11. - Les conditions de Ricci.

On peut considérer les connexions de type unitaire sur V_R^{2n} et essayer d'imposer à ces connexions et aux coefficients de la forme quadratique fondamentale d'être liés par les conditions dites de Ricci:

$$\nabla_k \gamma_{ij} = 0\,.$$

En repères adaptés ces conditions s'écrivent en détail:

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial z^\varrho} - W^\sigma_{\alpha\varrho}\gamma_{\alpha\beta} - W^\sigma_{\beta\varrho}\gamma_{\alpha\sigma} - W^{\sigma^*}_{\alpha\varrho}\gamma_{\sigma^*\beta} - W^{\sigma^*}_{\beta\varrho}\gamma_{\alpha\sigma^*} = 0 \\ \dfrac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial z^\varrho} - W^\sigma_{\sigma\varrho}\gamma_{\alpha\beta^*} - W^{\sigma^*}_{\alpha\varrho}\gamma_{\sigma^*\beta^*} = 0 \\ \dfrac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial z^{\varrho^*}} = 0\,, \end{cases}$$

et f. C. C..

On déduit facilement de $(16)_2$ [2]:

$$W^\sigma_{\alpha\varrho}\gamma_{\sigma\beta^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\varrho} + \frac{\partial \gamma_{\varrho\beta^*}}{\partial z^\alpha}\right), \qquad W^{\sigma^*}_{\alpha\varrho}\gamma_{\alpha^*\beta^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\varrho} - \frac{\partial \gamma_{\varrho\beta^*}}{\partial z^\alpha}\right).$$

Posant sous des conditions de regularité évidentes:

$$\gamma_{\lambda\beta^*}\gamma^{\lambda\alpha^*} = \delta^{\alpha^*}_{\beta^*}\,, \qquad \gamma_{\lambda^*\beta^*}\gamma^{\lambda^*\alpha^*} = \delta^{\alpha^*}_{\beta^*}\,,$$

(où les $\delta^{\alpha^*}_{\beta^*}$ sont les symboles de Kronecker). Il vient

$$(17)\qquad W^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\lambda^*}\left(\frac{\partial \gamma_{\beta\lambda^*}}{\partial z^\gamma} + \frac{\partial \gamma_{\gamma\lambda^*}}{\partial z^\beta}\right),$$

$$(18)\qquad W^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha^*\lambda^*}\left(\frac{\partial \gamma_{\beta\lambda^*}}{\partial z^\gamma} - \frac{\partial \gamma_{\gamma\lambda^*}}{\partial z^\beta}\right).$$

---

[2] Par $(16)_1$, $(16)_2$, ... nous désignons respectivement la première, la deuxième, ... des (16).

$(16)_3$ traduit une condition d'holomorphie des coefficients $\gamma_{\alpha\beta}$, condition qui n'a rien d'impossible a priori.

Mais $(16)_1$ donne une condition de possibilité qui se traduit par:

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\varrho} + \frac{\partial \gamma_{\varrho\beta^*}}{\partial z^\alpha}\right) - 2\gamma_{\lambda\beta^*}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\varrho\end{Bmatrix} = \\ &= \gamma^{\theta\lambda}\gamma^{\sigma^*\varphi^*}\gamma_{\lambda\beta^*}\left\{\gamma_{\alpha\sigma^*}\left(\frac{\partial \gamma_{\varrho\varphi^*}}{\partial z^\theta} - \frac{\partial \gamma_{\theta\varphi^*}}{\partial z^\varrho}\right) + \gamma_{\varrho\sigma^*}\left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\varphi^*}}{\partial z^\theta} - \frac{\partial \gamma_{\theta\varphi^*}}{\partial z^\alpha}\right)\right\}, \end{aligned}\right.$$

où les $\gamma^{\alpha\beta}$, $\gamma^{\alpha^*\beta^*}$ sont donnés, $\gamma^{\alpha\beta}$ étant une fonction différentiable des (z^ϱ) seuls,

$$\gamma^{\alpha^*\beta^*} = \overline{\gamma^{\alpha\beta}},$$

et les $\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\,\varrho\end{Bmatrix}$ désignent les symboles de CHRISTOFFEL construits à l'aide des $\gamma_{\alpha\beta}$.

Si $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha^*\beta^*} = 0$, le calcul précédent n'est pas valable, alors $(16)_2$ donne:

$$\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\varrho} = \frac{\partial \gamma_{\varrho\beta^*}}{\partial z^\alpha} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma^{\alpha\beta^*} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^\alpha\, \partial z^{\beta^*}}$$

(où on peut supposer que Φ est une fonction à valeurs réelles),

$$W^\alpha_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha\lambda^*}\frac{\partial \gamma_{\beta\gamma^*}}{\partial z^\gamma} = 0, \qquad\qquad W^{\sigma^*}_{\alpha\varrho}\gamma_{\sigma^*\beta} + W^{\sigma^*}_{\beta\varrho}\gamma_{\alpha\sigma^*} = 0,$$

qui sont des conditions d'antisymétrie.

Si $\gamma_{\alpha\beta^*} = \gamma_{\alpha^*\beta} = 0$, alors $W^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = 0$ en général et les $W^\alpha_{\beta\gamma}$ sont les symboles de CHRISTOFFEL de $\gamma_{\alpha\beta}$.

12. - Une géométrisation et une généralisation de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger.

Nous nous proposons de montrer que les conditions $\widehat{\nabla_k g_{ij}} = 0$ (ou $\widehat{\nabla_k \gamma_{ij}} = 0$) permettent de retrouver et de généraliser les équations aux connexions d'E. S.. (On suppose maintenant $n = 4$.)

Sur $\mathscr{V}^n_R$, munie de sa structure de variété différentiable induite par son immersion dans $\mathscr{V}^{2n}_R$, considérons les composantes en repères associés diagonaux induits:

1) d'un champ de tenseurs du second ordre $\mathscr{G}_{\alpha\beta}$,

2) d'un champ de tenseurs du troisième ordre $\wedge^\alpha_{\beta\gamma}$,

3) d'un champ de connexions $\mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma}$;

et sur V^{2n}_R, dans les repères correspondants, un champ de tenseurs symétriques (g_{ij}) et de connexions (L^i_{jk}) satisfaisant aux conditions intrinsèques:

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha^*\beta^*} = 0 \,, \qquad L^i_{jk} = L^{i^*}_{k^*j} \,.$$

L'application linéaire (φ_1) qui à $(g_{\alpha\beta})$ associe $(\hat{g}_{ij})$ et l'application (φ_2) qui a $(\wedge^\alpha_{\beta\gamma}\,,\ \mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma})$ associe $(\widehat{L}^i_{jk})$ quand

$$\mathscr{G}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta^*}\,, \qquad \wedge^\alpha_{\beta\gamma} = \widehat{L}^{\alpha^*}_{\beta\gamma}\,, \qquad \mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma} = \widehat{L}^\alpha_{\beta\gamma}$$

sont biunivoques et intrinsèques [**12**].

Demandons-nous si nous pouvons trouver (g_{ij}) et (L^i_{jk}) composantes en repères associés du tenseur (γ_{ij}) et de la connexion (W^i_{jk}) tels que:

$$(20) \qquad \begin{cases} \widehat{\nabla_k g_{ij}} = 0\,, \qquad \hat{g}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha^*\beta^*} = 0\,, \qquad \hat{g}_{\alpha\beta^*} = \mathscr{G}_{\alpha\beta} \\[2ex] \widehat{L}^\alpha_{\beta\gamma} = \mathscr{L}^\alpha_{\beta\gamma}, \qquad \widehat{L}^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = \wedge^\alpha_{\beta\gamma}\,. \end{cases}$$

Si ce problème « aux limites » est possible il conduit au système (cf. [**12**]):

$$(21) \qquad \begin{cases} \partial_\varrho \mathscr{G}_{\alpha\beta} - \mathscr{L}^\sigma_{\alpha\varrho} \mathscr{G}_{\sigma\beta} - \mathscr{L}^\sigma_{\varrho\beta} \mathscr{G}_{\varkappa\sigma} = 0 \\ \wedge^\sigma_{\varrho\alpha} \mathscr{G}_{\sigma\beta} + \wedge^\sigma_{\varrho\beta} \mathscr{G}_{\sigma\alpha} = 0 \\ \wedge^\sigma_{\alpha\varrho} \mathscr{G}_{\beta\sigma} + \wedge^\sigma_{\beta\varrho} \mathscr{G}_{\alpha\sigma} = 0\,, \end{cases}$$

où l'on reconnaît les équations aux connexions d'E. S. et deux nouveaux systèmes qui disparaissent quand $\wedge^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ (3).

Utilisons les composantes $\gamma_{ij}\,,\ W^i_{jk}$.

Nous avons $\widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta} = \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*} = 0$ et d'après $(16)_3$

$$\frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho} = \frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\varrho^*}}\,, \qquad \frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\varrho^*}} = \frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho}\,.$$

---

(3) Il convient de noter que (21) ne traduit pas complètement les conditions $\widehat{\nabla_k g_{ij}} = 0$. Il faudrait écrire de plus les trois équations $\widehat{\nabla_{\varrho^*} g_{ij}} = 0$ qui donnent sur $\mathscr{V}^n_R$ les « dérivées transversales » $\widehat{\partial_{\varrho^*} g_{ij}}$.

Donc:

$$\frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho} = \frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^\varrho} = \frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\varrho^*}} = 0\,,$$

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon\, \mathscr{G}_{(\alpha\beta)}}{2} = \frac{\varepsilon}{2} h_{\alpha\beta}\,, \qquad \hat{\gamma}_{\alpha\beta^*} = -\frac{\varepsilon\, \mathscr{G}_{[\alpha\beta]}}{2} = -\frac{\varepsilon}{2} k_{\alpha\beta}\,.$$

Calculons les restrictions à $\mathscr{V}^n_R$ des dérivées partielles du tenseur g_{ij}:

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho} = \frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho} + \frac{\varepsilon\, \partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho} = \frac{\varepsilon\, \partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \mathscr{G}_{(\alpha\beta)}}{\partial x^\varrho} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho}\,,$$

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^\varrho} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^\varrho} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}} + \varepsilon\, \frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}}\right) =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{1}\frac{\partial \mathscr{G}_{[\alpha\beta]}}{\partial x^\varrho} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}} + \frac{1}{2}\frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^\varrho} = \frac{1}{2}\frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^\varrho} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}} - \frac{1}{2}\frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial x^\varrho}\right).$$

Dans le cas général où $\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta^*}$ sont réguliers le problème « aux limites » posé se ramène à la détermination par le système (19), restreint à $\mathscr{V}^n_R$, des « paramètres » $\dfrac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}}$ et $\dfrac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}}$ qui permettront ensuite de calculer les connexions en fonction de $\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta^*}$ et de leurs dérivées par rapport aux x^ϱ

$$\widehat{W}^\alpha_{\beta\gamma} = -\frac{k^{\alpha\lambda}}{2}\left[\frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\gamma\lambda^*}}{\partial x^{\beta^*}} + \frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\beta\lambda^*}}{\partial x^{\gamma^*}} + \varepsilon\left(\frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\beta\lambda^*}}{\partial x^{\gamma^*}} + \frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\gamma\lambda^*}}{\partial x^{\beta^*}}\right)\right],$$

$$\widehat{W}^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = \frac{h^{\alpha\lambda}}{2}\left[\frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\lambda^*}}{\partial x^{\beta^*}} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\beta\lambda^*}}{\partial x^{\gamma^*}} - \varepsilon\left(\frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\beta\lambda^*}}{\partial x^{\gamma^*}} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{I}}_{\gamma\lambda^*}}{\partial x^{\beta^*}}\right)\right] + (\text{termes réels donnés}).$$

Par ailleurs

$$\widehat{W}^\alpha_{\beta\gamma} = \mathscr{L}^\alpha_{(\beta\gamma)} + \varepsilon \wedge^\alpha_{(\beta\gamma)}\,, \qquad \widehat{W}^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = \mathscr{L}^\alpha_{[\beta\gamma]} + \varepsilon \wedge^\alpha_{[\beta\gamma]}\,.$$

Le problème se résout en séparant dans (19) restreint à $\mathscr{V}^n_R$ la partie réelle et la partie imaginaire.

Nous poserons:

$$\widehat{\gamma}_{\alpha\beta^*} = -\frac{\varepsilon}{2}\,k_{\alpha\beta}\,, \qquad \widehat{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2}\,h_{\alpha\beta}\,,$$

$$\widehat{\gamma}^{\alpha\beta} = 2\,\varepsilon\,h^{\alpha\beta}\,, \qquad \widehat{\gamma}^{\alpha^*\beta^*} = -2\varepsilon\,h^{\alpha\beta}\,,$$

$$T^{\alpha}_{\beta} = k_{\sigma\beta}\;h^{\sigma\alpha} = -\widehat{\gamma}_{\lambda\beta^*}\,\widehat{\gamma}^{\alpha\lambda^*} = -\gamma_{\lambda^*\beta}\,\gamma^{\alpha^*\lambda^*}\,.$$

a) *Partie imaginaire.* Posant

$$\frac{\partial\widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}} - \frac{\partial\widehat{\mathscr{R}}_{\varrho\beta^*}}{\partial x^{\alpha^*}} = \mathfrak{S}_{\alpha\varrho\beta} - \mathfrak{S}_{\varrho\alpha\beta}\,,$$

(19) donne

$$\frac{\partial\widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}} + \frac{\partial\widehat{\mathscr{R}}_{\varrho\beta^*}}{\partial x^{\alpha^*}} \cong T^{\theta}_{\beta}\,T^{\varphi}_{\alpha}\,\mathfrak{S}_{\varrho\theta\varphi} + T^{\theta}_{\beta}\,T^{\varphi}_{\varrho}\,\mathfrak{S}_{\alpha\theta\varphi}\,,$$

où $\cong$ désigne une égalité, modulo des termes donnés.

On voit facilement que $\sum\limits_{\mathrm{PC}} \mathfrak{S}_{\alpha\beta\gamma} = 0$ (exactement), d'où l'on deduit

$$\mathfrak{S}_{\alpha\beta\gamma} + T^{\theta}_{\beta}\,T^{\varphi}_{\gamma}\,\mathfrak{S}_{\alpha\theta\varphi} + T^{\theta}_{\alpha}\,T^{\varphi}_{\gamma}\,\mathfrak{S}_{\theta\beta\varphi} + T^{\theta}_{\beta}\,T^{\varphi}_{\alpha}\,\mathfrak{S}_{\varphi\theta\gamma} \cong 0\,. \tag{22}$$

Si (22) permet de calculer les 24 coefficients $\mathfrak{S}_{\alpha\beta\lambda}$ *alors on aura la partie réelle de* W^{i}_{jk} sans ambiguïté; nous y reviendrons plus bas.

b) *Partie réelle.* Posons:

$$U_{\alpha\varrho\beta} = \frac{\partial\widehat{\mathscr{J}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}} - \frac{\partial\widehat{\mathscr{J}}_{\varrho\beta^*}}{\partial x^{\alpha^*}}\,, \qquad U_{\alpha\beta\varrho} = -U_{\beta\alpha\varrho}\,,$$

$$\frac{\partial\widehat{\mathscr{J}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}} + \frac{\partial\widehat{\mathscr{J}}_{\varrho\beta^*}}{\partial x^{\alpha^*}} = T^{\theta}_{\alpha}\,T^{\varphi}_{\beta}\,U_{\varrho\theta\varphi} + T^{\theta}_{\alpha}\,T^{\varphi}_{\varrho}\,U_{\beta\theta\varphi}\,.$$

Tenant compte de

$$\frac{\partial\widehat{\mathscr{J}}_{\alpha^*\beta}}{\partial x^{\varrho^*}} = -\frac{\partial\widehat{\mathscr{J}}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\varrho^*}}\,,$$

il vient:

$$U_{\alpha\beta\gamma} + U_{\alpha\gamma\beta} + T^0_\alpha T^\varphi_\gamma U_{\beta 0 \varphi} + T^\varphi_\beta T^0_\alpha U_{\gamma 0 \varphi} = 0 \, . \tag{23}$$

Si ce système est possible, il a une infinité de solutions — c'est ce que nous verrons —, donc la partie imaginaire de W^i_{jk} est partiellement indeterminée.

Pour résoudre effectivement (22) et (23) il est commode d'utiliser sur $\mathscr{V}^n_R$ des repères pour lesquels T^α_β prend une forme simple. On aboutit alors à une résolution en cascade qui ne présente pas d'autre difficulté que la longueur des calculs.

13. - Réduction d'une forme bilinéaire antisymétrique, en repères orthonormés relativement à une métrique de signature hyperbolique (et en dimension 4).

Les considérations suivantes sont purement locales. E_4 désignant l'espace tangent à la variété fondamentale $\mathscr{V}^n_R$, au point x^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), et $\mathscr{G}_{\alpha\beta}$ désignant le tenseur fondamental, posons selon des notations classiques:

$$\mathscr{G}_{\alpha\beta} = \mathscr{G}_{(\alpha\beta)} + \mathscr{G}_{[\alpha\beta]} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} \, .$$

$\varphi(u) = h_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta$ est une forme quadratique non dégénérée de type hyperbolique normal ([5], [6]). Il existe des repères tels que

$$k_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1) \, .$$

Associons à $k_{\alpha\beta}$ l'opérateur linéaire T tel que $T^\alpha_\beta = k_{\sigma\beta}\, h^{\sigma\alpha}$. Si nous posons $h_{\alpha\beta}\, v^\alpha\, w^\beta = (v, w)$ (v et w appartenant à E_4), nous constatons aisément que $(Tv, w) = -(v, T w)$, donc $(Tv, v) = 0$, v et Tv sont orthogonaux.

En repères orthonormés $T^\alpha_\beta = \pm T^\beta_\alpha$, $T^\alpha_\alpha = 0$ (sans sommation en α).

La trace de T est nulle.

Si v est un sous-espace de E_4, invariant par T, alors il en est de même de $v^\perp$, $v^\perp$ désignant le sous-espace orthogonal ($\dim V + \dim v^\perp = 4$). Toutes ces propriétés sont immédiates. Le vecteur v est isotrope si $\varphi(v) = 0$. Un sous-espace est isotrope si son intersection avec le sous-espace orthogonal ne se réduit pas à 0. Il est totalement isotrope s'il est contenu dans le sous-espace orthogonal.

On appelle indice de φ, la dimension maximum r des sous-espaces totalement isotropes ($r \leqslant 2$) [3].

Dans le cas étudié ici, il n'y a pas de plan totalement isotrope ($r < 2$). En effet s'il existait de tels plans, φ serait une forme neutre [3] et la matrice de

$h_{\alpha\beta}$ serait semblable à

$$\left\| \begin{matrix} O & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & O \end{matrix} \right\|,$$

ce qui entraînerait dét$\| h_{\alpha\beta} \| > 0$, inégalité impossible, en raison de la signature. Rappelons aussi que si un plan est isotrope sans être totalement isotrope, il contient une isotrope et une seule; de plus par toute isotrope il passe des plans non isotrope [3].

Étant donné un vecteur $u \neq 0$ de E_4, on sait qu'il lui correspond un polynôme unitaire m_u de degré inférieur ou égal à 4 tel que $m_u(T)(u) = 0$ et qui relativement à cette propriété est de degré minimum, m_u divise le polynôme minimal de T, et donc son polynôme caractéristique [7]. Si m_u est de degré plus grand que 2, posons $m_u = m'm''$. Si $m''(T)(u) = v$, v est différent de 0 car $d^0 m'' < d^0 m_u$ et de plus $m_v = m'$. Donc on peut supposer que m_u est de degré 1 ou 2.

1) *Supposons d'abord T régulière.*

a) *S'il existe m_u de degré* 2, il existe un plan P contenant u qui est invariant par T, selon un résultat classique [7]. Si P est isotrope, alors il convient une isotrope ω et une seule. Si $x \neq \omega$ appartient à P, comme $(Tx, x) = 0$ Tx appartient à P et à $(x)^\perp$, mais $(x)^\perp \cap P$ est nécessairement de dimension inférieure à 2. Ce qui fait que $Tx = \omega$. Donc tous les vecteurs de P s'appliquent sur ω, ce qui est contraire à l'hypothèse de régularité. P n'est pas isotrope.

P et $P^\perp$ sont donc supplémentaires et, séparément invariants par T, en prenant dans P et $P^\perp$ deux bases orthonormées, leur réunion constitue une base de E_4, T_α^β se met sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & \alpha \\ \pm\alpha & 0 \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\|$$

et $k_{\alpha\beta}$ sous une forme analogue, $\pm\alpha$ étant remplacé par $-\alpha$ $(\alpha\beta \neq 0)$.

b) *S'il n'existe aucun polynôme m_u de degré 2,* m_u est de degré 1 quel que soit u, donc le polynôme minimal m de T est de degré 1 (car il existe toujours u tel que $m_u = m$) [7]. Alors le polynôme caractéristique a une racine quadruple nulle (car la trace de T est nulle), donc $m_u = X$ et $T_u = 0$, quel que soit u. C'est manifestement impossible.

2) *Supposons maintenant* T *non régulière* (dét$\| k_{\alpha\beta} \| = 0$). Pour cela il faut et il suffit que l'équation caractéristique admette la valeur propre $\varrho = 0$, qui sera aussi racine du polynôme minimal.

a) *S'il n'y a pas d'autre valeur propre réelle que* $\varrho = 0$, le polynôme caractéristique s'écrit $X^2(X^2 + a^2)$ ou X^4. Le noyau du polynôme X (ensemble des u tels que $T_u = 0$) a la dimension 2 au moins (exposant de X dans le polynôme caractéristique) [7]. Si ce noyau contien un vecteur non isotrope u, alors u invariant par T est de dimension 3, $u \cap u^{\perp} = 0$ et, en choisissant un repère orthonormé dont u est l'un des vecteurs et dont les 3 autres sont dans $u^{\perp} = E_3$, on met T^{α}_{β} sous la forme:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & \pm\lambda & 0 & \nu \\ 0 & -\mu & -\nu & 0 \end{Vmatrix}.$$

Or ce noyau contient certainement un vecteur non isotrope car il contient au moins un plan non totalement isotrope, l'indice de φ étant 1.

b) *S'il existe une autre valeur propre* $\varrho_1 \neq 0$ (ϱ_1 réel), v_1 étant un vecteur propre associé à ϱ_1,

$$(Tv_1 , v_1) = \varrho_1 , \qquad (v_1 , v_1) = 0 ,$$

donc v_1 est isotrope, et il est distinct de tout vecteur v associé à $\varrho = 0$ car $Tv_1^1 = \varrho_1 v_1 = 0$ tandis que $Tv = 0$.

Si v est isotrope, le plan (v, v_1) ne l'est pas, on retrouve le cas du 1) a) (avec $\alpha\beta = 0$).

Si v n'est pas isotrope on retrouve le cas précédent du 2) a).

Il reste donc à étudier la réduction de la restriction de T^{α}_{β} (au de $k_{\alpha\beta}$) à un sous-espace E_3 non isotrope.

Si la restriction de $h_{\alpha\beta}$ à E_3 est de signature (– – –) il n'y a plus de difficulté, le résultat est connu. C'est celui du 1) a) avec $\beta = 0$.

Si la signature est $(+---)$ la matrice k_{ij} $(i,j=1,2,3)$ étant symétrique gauche, sont déterminant est nul, il existe $u=0$ tel que $k_{ij}u^j=0$.

Si u n'est pas isotrope dans E_3 on peut le prendre comme premier vecteur d'un repère orthonormé de E_3: $u^1=0$, $u^2=u^3=0$, ce qui donne $k_{i1}=0$ $(i=1,2,3)$.

Si u est isotrope dans E_3, par ce vecteur passe un plan $\prod$ non isotrope de E_3, au sens de la restriction de Φ à E_3 (restriction non dégénérée).

On peut choisir dans ce plan e_1 et e_3 orthonormés [la restriction de $h_{\alpha\beta}$ à ce plan est de signature $(+-)$] et compléter par e_3 dans $\prod^{\perp}$ (sous-espace de E_3 de dimension 1): on a alors $(u^1)-(u^3)^2=0$, $u^3=0$, donc $u^1=\pm u^2$ et $k_{12}=$ $=\pm k_{13}$, $k_{23}=0$.

Donc finalement, lorsque T n'est pas régulière, on a les 2 formes réduites possibles pour $k_{\alpha\beta}$ en repère orthonormé [9].

$$\left\| \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{matrix} & O \\ O & O \end{matrix} \right\| , \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \varepsilon\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon\gamma & 0 & 0 \end{matrix} \right\| , \qquad \varepsilon = \pm 1 .$$

14. - Résolution du système (23).

Nous ne reproduirons pas ici les calculs de résolution de (22). Ce problème a été traité par M^me^ TONNELAT [6], HLAVATY et SAENS [9] au moyen de procédés différents, et on sait que dans le cas général (22) admet une solution et une seule.

Nous allons appliquer notre méthode au système (23) en retenant que son emploi pour (22) serait aussi facile.

1°) Supposons que

$$h_{11}=h_{22}=k_{33}=k^{11}=k^{22}=k^{33}=-1\,,$$

$$h_{00}=h^{00}=1\,, \qquad k_{12}=-k_{21}=\alpha\,, \qquad k_{30}=-k_{03}=\beta\,,$$

(et les autres $k_{\lambda\mu}$ nuls).

On trouve aisément:

$$\left\{\begin{array}{l} U_{200} = U_{323} = -\alpha\beta U_{013} \\ U_{301} = (1+\beta^2) U_{013} \\ U_{310} = -U_{013}\,, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} U_{322} = U_{311} = -\alpha\beta U_{201} \\ U_{120} = (1-\alpha^2) U_{201} \\ U_{102} = -U_{201}\,, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} U_{100} = U_{313} = \alpha\beta U_{023} \\ U_{302} = (1+\beta^2) U_{023} \\ U_{230} = U_{023}\,, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} U_{022} = U_{011} = -\alpha\beta U_{231} \\ U_{123} = (1-\alpha^2) U_{231} \\ U_{132} = -U_{231}\,, \end{array}\right.$$

$$U_{300} = U_{303} = U_{212} = U_{211} = 0\,.$$

Si de plus $\wedge^{\varrho}_{[\varrho\alpha]} = 0$, alors tous les coefficients sont nuls, sauf si $\alpha\beta = 0$ (c'est-à-dire si dét$\| k_{\alpha\beta} \| = 0$), auquel cas $\wedge^{\varrho}_{[\varrho\alpha]} = 0$ est identiquement satisfaite. Il reste alors quatre coefficients essentiellement distincts:

$$U_{013}\,, \qquad U_{201}\,, \qquad U_{023}\,, \qquad U_{231}\,.$$

Remarque. Dans le cas où dét$\| k_{\alpha\beta} \| = 0$ le calcul de $W^{\alpha}_{\beta\gamma}$ par (17) conduit à une impossibilité, mais de $(16)_1$ on tire, sous la seule hypothèse de régularité de $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$,

$$\widehat{W}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \begin{Bmatrix} \hat{\alpha} \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix} - (\widehat{W}^{\alpha^*}_{\varrho\gamma}\, \hat{\gamma}_{\beta\alpha^*} + \widehat{W}^{\alpha^*}_{\varrho\beta}\, \hat{\gamma}_{\alpha^*\gamma})\, \hat{\gamma}^{\varrho\alpha} \tag{17 bis}$$

et, portant dans $(16)_2$, on retrouve (19) sans hypothèse de regularité sur $\gamma_{\varrho\beta^*}$.

2°) Supposons avec les mêmes hypothèses sur $h_{\alpha\beta}$ que

$$k_{23} = -k_{32} = \gamma\,, \qquad k_{20} = -k_{07} = \varepsilon\gamma \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

(les autres $k_{\lambda\mu}$ étant nuls). Alors dét$\| k_{\alpha\beta} \| = 0$ et on trouve aisément:

$$\begin{array}{ll} U_{103} = U_{031} = U_{310}\,, & U_{123} = U_{312}\,, \\ U_{320} = (1-\gamma^2) U_{032}\,, & U_{012} = U_{120}\,, \\ U_{203} = (1+\gamma^2) U_{032}\,, & U_{021} = \varepsilon\chi^2 U_{312} - (\gamma^8+1) U_{120}\,, \\ U_{233} = v_{200} = \varepsilon\gamma^2 U_{032}\,, & U_{231} = \varepsilon\gamma^2 U_{120} + (1-\gamma^2) U_{312}\,. \end{array}$$

Tous les autres coefficients distincts a priori des précédents sont nuls. Si de plus $\wedge^{\varrho}_{[\alpha\varrho]} = 0$, ces quatre conditions sont identiquement satisfaites.

Il y a donc 4 coefficients essentiellement distincts dans ce dernier cas (comme dans le 1er cas, lorsque dét$\| k_{\alpha\beta}\| = 0$).

Lorsque $k_{\alpha\beta} = 0$ (ou $\widehat{\gamma}_{\alpha\beta^*} = 0$), $\widehat{\gamma}_{\alpha\beta}$ étant régulier,

$$\widehat{W}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \widehat{\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix} h$$

d'après (17 bis),

$$\widehat{W}^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = \frac{h^{\alpha\lambda}}{2}\left[\frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\alpha\lambda^*}}{\partial x^{\beta^*}} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{R}}_{\beta\lambda^*}}{\partial x^{\alpha^*}} - \varepsilon\left(\frac{\partial \widehat{\mathscr{J}}_{\beta\lambda^*}}{\partial x^{\alpha^*}} - \frac{\partial \widehat{\mathscr{J}}_{\alpha\lambda^*}}{\partial x^{\beta^*}}\right)\right],$$

le calcul précédent s'applique encore et donne encore 4 coefficients essentiellement distincts dans les repères privilégiés. $\widehat{W}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ est réel. C'est-à-dire que $\wedge^{\alpha}_{\beta\gamma}$ est antisymétrique en β et γ, mais de plus on voit facilement que $L^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = 0$, $\widehat{W}^{\alpha^*}_{\beta\gamma}$ est imaginaire pur, $\widehat{W}^{\alpha^{*\prime}}_{\beta\gamma}\, h_{\alpha\sigma}$ est antisymétrique en β, γ, σ et on s'explique qu'il y ait ainsi quatre coefficients essentiellement distincts dans $\widehat{W}^{\alpha^*}_{\beta\gamma}$ [12].

La nullité du vecteur de torsion.

En théorie unitaire d'E.S. on postule que $\mathscr{L}^{\lambda}_{[\alpha\lambda]} = 0$. Il est possible d'interpréter ici une telle condition.

Sur V^{2n}_{R}, muni de repères associés, une égalité $T^{i}_{jk} = \theta^{i^*}_{j^*k^*}$ entre composantes de deux tenseurs (resp. connexions) ou d'un même tenseur (resp. connexion) est intrinsèque. Considérons un champ de vecteurs de composants $(v^{\alpha}, v^{\alpha^*})$ en repères associés tels que les $v^{\alpha} + \varepsilon\, v^{\alpha^*}$ soient des fonctions différentiables des (z^{θ}), réelles sur $\mathscr{V}^{n}_{R}$.

Alors:

$$\frac{\partial v^{i}}{\partial x_{j}} = \frac{\partial v^{i*}}{\mathrm{d}x_{j}^{*}},$$

$$\nabla_{\lambda} v^{\lambda} = \partial_{\lambda} v^{\lambda} + L^{\lambda}_{r\lambda} v^{r}, \qquad \nabla_{\lambda^*} v^{\lambda^*} = \partial_{\lambda^*} v^{\lambda^*} + L^{\lambda^*}_{r\lambda^*} v^{r}.$$

La condition $\mathscr{L}^{\lambda}_{\alpha\lambda} = \mathscr{L}^{\lambda}_{\lambda\alpha}$ *exprime que* $\widehat{\nabla}_{\lambda} v^{\lambda} = \widehat{\nabla}_{\lambda^*} v^{\lambda^*}$ *quel que soit le champ de vecteurs* (v) *à composantes différentiables dont la restriction à* $\mathscr{V}^{n}_{R}$ *est réelle.*

En effet:

$$\widehat{\nabla}_\lambda v^\lambda - \widehat{\nabla}_{\lambda^*} v^{\lambda^*} = (\widehat{L}^\lambda_{\alpha\lambda} - \widehat{L}^{\lambda^*}_{\alpha\lambda^*}) \widehat{v^\alpha} = (\mathscr{L}^\lambda_{\alpha\lambda} - \mathscr{L}^\lambda_{\lambda\alpha}) \widehat{v^\alpha} .$$

De même:

$$\nabla_\lambda v^{\lambda^*} = \partial_\lambda v^{\lambda^*} + L^{\lambda^*}_{r\lambda} v^r , \qquad \nabla_{\lambda^*} v^\lambda = \partial_{\lambda^*} v^\lambda + L^\lambda_{r\lambda^*} v^r ,$$

avec les même conditions pour (v):

$$\widehat{\nabla}_\lambda v^{\lambda^*} - \widehat{\nabla}_{\lambda^*} v^\lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\Lambda}^\lambda_{[\alpha\lambda]} = 0 .$$

Il convient de noter que les quatre expressions

$$\widehat{\nabla}_\lambda v^\lambda , \qquad \widehat{\nabla}_{\lambda^*} v^{\lambda^*} , \qquad \widehat{\nabla}_\lambda v^{\lambda^*} , \qquad \widehat{\nabla}_{\lambda^*} v^\lambda$$

sont des scalaires.

Bibliographie.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre linéaire,* Hermann, Paris 1955. (Cf. Chapitre II.)

[2] N. Bourbaki, *Algèbre multilinéaire,* Hermann, Paris 1948.

[3] N. Bourbaki, *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques,* Hermann, Paris 1959.

[4] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie,* Dunod, Paris 1955.

[5] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme,* Masson, Paris 1955.

[6] A. Tonnelat, *Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements,* Gauthier-Villars, Paris 1955.

[7] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra,* Van Nostrand, Amsterdam 1953. (Cf. Tome II.)

[8] N. Bourbaki, *Modules sur les anneaux principaux,* Hermann, Paris 1952.

[9] V. Hlavatý and A. W. Saens, *Uniqueness theorems in the unified theory of relativity,* J. Math. Mech. 2 (1953), 523-536.

[10] B. L. van der Waerden, *Modern algebra,* Frederik Ungar, New York 1953. (Cf. Tome II.)

[11] O. COSTA DE BEAUREGARD, *L'hypthèse de l'effet inertial de spin*, C. R. Acad. Sci. Paris **247** (1958), 1092-1094.

[12] A. CRUMEYROLLE, *Sur quelques interprétations physiques et théoriques des équations du champ unitaire d'Einstein-Schrödinger*, Thèse: (*I*), Riv. Mat, Univ. Parma (2) 3 (1962), 331-391; (*II*), Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 85-132. Résumé en C. R. Acad. Sci. Paris **256** (1963), 2121-2123, et dans les comunications au «VII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Genova 1963».

Sommaire.

On considère une extension quadratique H de l'anneau R des réels, ensemble des $z = x + \varepsilon y$ $(x, y \in R)$ avec $\varepsilon^2 = 1$. Tout espace vectoriel sur R, F_R, de dimension n, peut être plongé dans un H-module F_H. Si $n = 2m$, on peut définir sur F_R une structure dite complexe hyperbolique. Une application f de H dans H est différentiable au point $z = x + \varepsilon y$ si $f(z) = P(x, y) + \varepsilon Q(x, y)$ avec

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Le produit de deux variétés réelles identiques de dimensions m peut être considéré comme une variété à structure complexe hyperbolique. On établit la réciproque.

Si $m = 4$, on introduit des connexions linéaires L^i_{jk} telles que $\nabla_r \Delta^s_l = 2S^k_{rl}\Delta^s_k$, ou $L^k_{ij} = L^{k*}_{j*i}$ $(* = \pm 4)$ dans certains repères dits diagonaux, en désignant par Δ^i_j le tenseur canoniquement associé à l'endomorphisme Δ tel que $\Delta^2 = I$ et de trace nulle. Les coefficients g_{ij} étant ceux d'une forme quadratique, les conditions

$$\widehat{\nabla_k g_{ij}} = 0\,,$$

sur la sous-variété diagonale, donnent un système qui généralise les équations aux connexions écrites par Einstein et Schrödinger. Ce nouveau formalisme conduit naturellement à une nouvelle méthode de résolution de ces équations et du système qui les généralise, et permet d'introduire un nouveau champ dont la signification physique n'e.t pas examinée ici.

* * *