Riv. Mat. Univ. Parma (2) 8 (1967), 1-26

ANTONIO PIGNEDOLI (*)

Sul moto di un corpo rigido di massa variabile, libero nello spazio. (**)

1. - Introduzione.

Del moto di un corpo rigido di massa variabile, libero di muoversi nello spazio, cominciai ad occuparmi in studi precedenti, concretatisi in conferenze di seminario tenute presso l'Università di Bari ed in una comunicazione tenuta al congresso della Österreichische Mathematische Gesellschaft in Graz nel 1964 (1).

In questa Memoria espongo, in modo abbastanza ampio, alcuni risultati generali recentemente ottenuti, che sono stati anche oggetto di comunicazioni di seminario presso l'Università di Parma e nei quali rientrano come casi particolari quelli sopracitati.

Per un corpo rigido libero di muoversi nello spazio le equazioni caratteristiche del movimento sono le due equazioni cardinali:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{R}$ è il risultante delle forze esterne rispetto ad un polo O, $\boldsymbol{M}$ è il momento risultante delle forze esterne medesime rispetto allo stesso polo. Assumendo

(*) Indirizzo: via Montefiorino 4, Bologna, Italia.
(**) Ricevuto: 2-XII-1966.
(1) Cfr. A. PIGNEDOLI, *Razzi e satelliti artificiali*, Zanichelli, Bologna 1963; A. PIGNEDOLI, *Über das Problem der Bewegung eines freien Körpers im Raum*, Internationale Mathematische Nachrichten **79** Sonderheft (1965), p. 66 (Vortragsbericht). Dello stesso autore cfr. anche: *Meccanica celeste e satelliti artificiali*, Conferenze tenute presso il Centro di studio in Trento della Università di Bologna, 1958.

come coordinate individuanti la posizione del corpo rigido considerato le tre coordinate ξ_G, η_G, ζ_G del suo baricentro G ed i tre angoli di EULERO θ, φ, ψ, che dànno l'orientamento della terna principale d'inerzia x, y, z di origine G rispetto alla terna fissa ξ, η, ζ, essendo il polo O coincidente col baricentro G ($G \equiv O$), le equazioni cardinali (1) diventano:

$$\left\{\begin{aligned} & m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{R} \\ & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Proiettando ora la prima delle (2) sugli assi fissi ξ, η, ζ e la seconda sugli assi principali d'inerzia x, y, z (essendo p, q, r le componenti rispetto a tali assi della velocità angolare di rotazione $\boldsymbol{\omega}$ ed A, B, C i momenti principali d'inerzia), si ottengono, come si sa, le sei equazioni differenziali scalari:

$$\left\{\begin{aligned} & m\,\ddot{\xi}_G = R_\xi\,, \quad m\,\ddot{\eta}_G = R_\eta\,, \quad m\,\ddot{\zeta}_G = R_\zeta && \left(\ddot{\xi}_G = \frac{\mathrm{d}^2 \xi_G}{\mathrm{d}t^2}, \dots\right) \\ & A \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + (C - B)\, q\, r = M_x && (M_x = M_{Gx}) \\ & B \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + (A - C)\, r\, p = M_y && (M_y = M_{Gy}) \\ & C \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + (B - A)\, p\, q = M_z && (M_z = M_{Gz})\,, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

dove le p, q, r sono legate ai tre angoli di EULERO θ, φ, ψ e alle loro derivate rispetto al tempo dalle equazioni differenziali

$$\left\{\begin{aligned} & p = \dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi \\ & q = -\dot{\theta} \sin\varphi + \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi \\ & r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta \end{aligned}\right. \qquad \left(\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \dots\right), \tag{4}$$

e dove le R_ξ, R_η, R_ζ, M_x, M_y, M_z sono, in generale, funzioni note di ξ_G, η_G, ζ_G, θ, φ, ψ, delle loro derivate rispetto al tempo e del tempo stesso.

Il problema del moto del baricentro può essere scisso da quello del moto relativo al baricentro stesso quando si verifichi che le R_ξ, R_η, R_ζ dipendano soltanto dalle ξ_G, η_G, ζ_G, dalle loro derivate rispetto al tempo e da quest'ultimo; mentre le M_x, M_y, M_z dipendono soltanto dagli angoli di EULERO, dalle loro derivate rispetto al tempo e dal tempo medesimo. In tali casi, che si chiamano di « disaccoppiamento », il problema dello studio del moto di un corpo rigido libero si scinde in due: il primo problema, retto dalla prima delle equazioni differenziali (2), è un problema di moto di un punto materiale e concerne il movimento del centro di gravità; il secondo problema, retto dalla seconda delle equazioni differenziali (2), riguarda il moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso; precisamente è il movimento *intorno* al baricentro.

Un caso importante di « disaccoppiamento » è quello rappresentato dal moto per inerzia del corpo rigido libero. In tale caso si hanno le equazioni differenziali vettoriali del moto:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_G}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}_G}{\mathrm{d}t} = 0\,. \tag{5}$$

Queste ci dicono che il baricentro è in quiete oppure in moto rettilineo uniforme e che il moto intorno al baricentro è un moto alla POINSOT, il quale per $A = B$ si riduce ad una *precessione regolare*, mentre per $A = B = C$ è un *moto rotatorio uniforme*.

Un altro caso importante di disaccoppiamento è quello del corpo rigido libero, soggetto all'azione del proprio peso. Il baricentro si muoverà in tal caso di moto uniformemente accelerato; mentre il moto intorno al baricentro sarà un moto alla POINSOT.

Un terzo caso di disaccoppiamento è quello in cui si consideri un corpo solido i cui elementi costitutivi siano attratti da un centro fisso proporzionalmente alla distanza. In tal caso il baricentro descrive un ellisse di centro il punto fisso ed il moto intorno al baricentro si presenta ancora come moto alla POINSOT.

Infine ricorderemo il caso classico di un pianeta costituito da involucri sferici concentrici ed omogenei ([2]).

2. - Le equazioni differenziali euleriane «corrette», per il sistema a struttura giroscopica.

Un caso di alto interesse della teoria del moto di un corpo rigido libero nello spazio è quello rappresentato dal problema del moto di un sistema ruotante, di massa $m(t)$, funzione assegnata del tempo t e per il quale si faccia l'ipotesi

---

([2]) P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, Tome 2, Gauthier-Villars, Paris 1911.

della rigidità, cioè della applicabilità delle equazioni differenziali di EULERO (3).

Noi ci occuperemo qui, sotto condizioni assai generali, di un sistema che emetta massa per un certo intervallo di tempo $0 \vdash\!\dashv t_c$ e ne studieremo i moti relativi al baricentro. Ciò faremo mediante l'uso di equazioni euleriane corrette in dipendenza della variabilità nel tempo della massa $m = m(t)$ e dei momenti di inerzia $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$; prescindendo, invece, dalle vibrazioni che si verificano nei razzi. Ci riferiremo ad una terna solidale x, y, z, con l'origine nel baricentro del sistema. Indicando con $\boldsymbol{K}$ il vettore momento della quantità di moto e con $\boldsymbol{\omega}$ il vettore velocità angolare di rotazione, l'equazione differenziale vettoriale del moto del sistema intorno al baricentro sarà:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{M}, \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ è il vettore che rappresenta la variazione rispetto al tempo del momento della quantità di moto trasferita dal sistema ai getti emittenti massa ed $\boldsymbol{M}$ è il momento risultante delle forze esterne.

I getti saranno pensati come proiettati da un insieme di N ugelli sistemati ad una estremità del sistema (di forma allungata), il centro di ognuno dei quali sia definito da un vettore di posizione

$$\boldsymbol{r}_s = x_s\, \boldsymbol{i} + y_s\, \boldsymbol{j} - l\, \boldsymbol{k} \qquad (s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N),$$

dove l è la distanza del baricentro del veicolo dal piano delle uscite dei getti ed $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sono i versori dei prescelti assi solidali x, y, z. Gli ugelli saranno pensati

---

(3) Tale impostazione interessa anche la teoria del moto dei razzi. Naturalmente è quasi superfluo osservare che l'applicazione delle equazioni di EULERO per questi ultimi comporta un processo di schematizzazione assai notevole di fronte alla concreta situazione fisica, in quanto i razzi sono, in realtà, strutture flessibili. Per quanto concerne il moto del baricentro di un razzo, si ha, come ben noto, l'equazione differenziale:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},$$

dove $\boldsymbol{F}$ è la forza esterna complessiva agente sul sistema, $\boldsymbol{v}$ la velocità del baricentro all'istante t, $\boldsymbol{u}$ la velocità dei prodotti di scarico (getto) rispetto al veicolo stesso.

Nella schematizzazione in cui non si considerino le vibrazioni dovute alla flessibilità della struttura del razzo, si considereranno poi, oltre al moto del baricentro, i moti intorno al baricentro, caratterizzati mediante equazioni di EULERO opportunamente corrette, tenendo conto della variabilità della massa e dei momenti di inerzia A, B, C nel tempo, quindi anche del trasferimento di momento angolare dal sistema ai getti (vedasi: J. W. ELLIS and C. W. MCARTHUR, *Applicability of Euler's dynamical equations to rocket motion*, A.R.S. Journal, novembre 1959.

disposti simmetricamente rispetto all'asse delle z. Si farà subito inoltre l'ipotesi che il sistema sia dotato di struttura giroscopica ($A = B$).

Essendo:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) = p(t)\,\boldsymbol{i} + q(t)\,\boldsymbol{j} + r(t)\,\boldsymbol{k}\,,$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(t) = A(t)\,[p(t)\,\boldsymbol{i} + q(t)\,\boldsymbol{j}] + C(t)\,r(t)\,\boldsymbol{k}\,,$$

risulterà intanto:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{K} = &\left\{\dot{A}(t)\,p(t) + A(t)\,\dot{p}(t) + [C(t) - A(t)]\,q(t)\,r(t)\right\}\boldsymbol{i} + \\ &+\left\{\dot{A}(t)\,q(t) + A(t)\,\dot{q}(t) + [A(t) - C(t)]\,r(t)\,p(t)\right\}\boldsymbol{j} + \\ &+\left\{\dot{C}(t)\,r(t) + C(t)\,\dot{r}(t)\right\}\boldsymbol{k}\,.\end{aligned}$$

Il termine di trasferimento di momento della quantità di moto dal sistema ai getti, termine mancante nel caso in cui siano nulle le componenti della velocità angolare di rotazione del sistema, potrà essere calcolato come segue (4). Dipendentemente dalla rotazione relativa all'asse delle z, la variazione nella unità di tempo della quantità di moto trasferita dal sistema ai getti, è

$$\mathcal{T}_z = -\,r(t)\sum_{s=1}^{N}\dot{m}_s\,r_s^2 = -\,\dot{m}\,\varrho^2\,r(t)\,,$$

con

$$\varrho^2 = \Big(\sum_{s=1}^{N} m_s\,r_s^2\Big)\,/\,\dot{m}\,,\qquad \dot{m}_s = \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} < 0\,,\qquad \dot{m} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0\,,$$

e dove $m(t)$ è la massa totale del sistema, $m_s(t)$ la massa di un getto. Dipendentemente dalle rotazioni relative all'asse delle x ed all'asse delle y, si ha invece:

$$\mathcal{T}_x = -\,p(t)\sum_{s=1}^{N}\dot{m}_s\,(l^2 + y_s^2) = -\,\dot{m}\left(l^2 + \frac{\varrho^2}{2}\right)p(t)\,,$$

$$\mathcal{T}_y = -\,q(t)\sum_{s=1}^{N}\dot{m}_s\,(l^2 + x_s^2) = -\,\dot{m}\left(l^2 + \frac{\varrho^2}{2}\right)q(t)\,.$$

---

(4) Cfr. J. W. Ellis and C. W. McArthur, loc. cit.; vedi anche: K. Jarmolow, *Dynamics of a spinning rocket with varying inertia and applied moment*, J. Appl. Phys. **28** (1957), 308-313.

Detti ora, rispettivamente, $\Delta_x(t) = \Delta_y(t)$ e $\Delta_z(t)$ i raggi di inerzia relativi all'asse delle x ed all'asse delle z, si ha, tenendo conto della ipotesi di struttura giroscopica del sistema:

$$(7) \qquad \begin{cases} A(t) = B(t) = m(t)\, \Delta_x^2(t) \\ C(t) = m(t)\, \Delta_z^2(t) \\ \dot{A}(t) = \dot{B}(t) = \dot{m}(t)\, \Delta_x^2(t) + m(t) \dfrac{\mathrm{d}\Delta_x^2(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dot{C}(t) = \dot{m}(t)\, \Delta_z^2(t) + m(t) \dfrac{\mathrm{d}\Delta_z^2(t)}{\mathrm{d}t}\,. \end{cases}$$

Si hanno allora, per i moti intorno al baricentro del sistema considerato, le equazioni differenziali euleriane « corrette »:

$$(8) \qquad \begin{cases} A(t)\,\dot{p}(t) + [C(t) - A(t)]\, q(t)\, r(t) - f(t)\, p(t) = M_x(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, t) \\ A(t)\,\dot{q}(t) + [A(t) - C(t)]\, r(t)\, p(t) - f(t)\, q(t) = M_y(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \psi, t) \\ C(t)\,\dot{r}(t) - g(t)\, r(t) \qquad\qquad = M_z(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \psi, t)\,, \end{cases}$$

dove le $A(t)$ e $C(t)$ sono funzioni note del tempo t, le M_x, M_y, M_z sono funzioni assegnate degli angoli di EULERO, delle loro derivate rispetto al tempo e del tempo medesimo, e dove anche $f(t)$ e $g(t)$ sono funzioni assegnate del tempo, essendo assegnate le leggi di variazione nel tempo della massa e dei momenti di inerzia. Si ha precisamente:

$$(9) \qquad f(t) = \dot{m}\,(l^2 + \tfrac{1}{2}\varrho^2 - \Delta_x^2) - m \frac{\mathrm{d}\Delta_x^2}{\mathrm{d}t}\,, \qquad g(t) = \dot{m}\,(\varrho^2 - \Delta_z^2) - m \frac{\mathrm{d}\Delta_z^2}{\mathrm{d}t}\,.$$

Sulle funzioni $f(t)$ e $g(t)$ va osservato quanto segue. Esse saranno funzioni reali della variabile reale t, definite per ogni $t \geqslant 0$, limitate dovunque e saranno, in generale, diverse da zero nell'intervallo $0 \mapsto t_c$ ed uguali a zero per $t \geqslant t_c$, in quanto, cessando per $t = t_c$ il fenomeno di emissione della massa, si avrà:

$$\dot{m} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\Delta_x^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Delta_z^2}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad \text{per } t > t_c\,.$$

Dunque la $f(t)$ e la $g(t)$ potranno essere pensate come funzioni reali di variabile reale, limitate e generalmente continue in tutto il semiasse reale $t \geqslant 0$, con una sola discontinuità limitata (eventuale) nel punto $t = t_c$. Esse saranno dunque integrabili secondo RIEMANN in ogni intervallo di tempo finito $0 \vdash\dashv t$ che possa interessarci agli effetti meccanici. Anzi, dal punto di vista fisico, va osservato che la discontinuità in $t = t_c$, in questione, può essere eliminata, tenendo presente che il fenomeno di emissione di massa (dovuto, nel caso dei razzi, alla combustione del propellente) non cesserà istantaneamente, ma in un sia pur breve intervallo di tempo, dando luogo ad un raccordo con continuità.

3. - Integrazione delle equazioni euleriane corrette nel caso di momenti sollecitanti dipendenti soltanto dal tempo.

Facciamo ora l'ipotesi che i momenti sollecitanti M_x, M_y ed M_z non dipendano dagli angoli di EULERO né dalle loro derivate, ma soltanto dal tempo t e che, inoltre, il sistema abbia inizialmente, e mantenga nel tempo, struttura giroscopica. La terza delle (8) fornisce immediatamente:

$$(10) \qquad r(t) = R(t, r_0) = \exp\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\,dt \cdot \left[\int_0^t \frac{M_z(t)}{C(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\,dt\right) \cdot dt + r_0\right]$$

con $r_0 = r_{t=0}$. Abbiamo con ciò $r(t)$, per mezzo di quadrature, come funzione $R(t, r_0)$ del tempo e del valore iniziale, limitata per ogni t. Consideriamo poi le prime due equazioni di EULERO. Sostituendovi il trovato valore di $r(t)$, esse diventano:

$$(11) \qquad \begin{cases} A(t)\,\dot{p}(t) + [C(t) - A(t)]\,q(t)\,R(t, r_0) = M_x(t) + f(t)\,p(t) \\ A(t)\,\dot{q}(t) - [C(t) - A(t)]\,p(t)\,R(t, r_0) = M_y(t) + f(t)\,q(t). \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda delle (11) per $i = \sqrt{-1}$ e sommando con la prima, dopo aver posto

$$(12) \qquad \omega_{12}(t) = p(t) + i\,q(t) \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

si ottiene, per la funzione complessa $\omega_{12}(t)$, l'equazione differenziale:

$$(13) \qquad \dot{\omega}_{12}(t) = \left\{\frac{f(t)}{A(t)} + i\,\frac{[C(t) - A(t)]\,R(t, r_0)}{A(t)}\right\}\omega_{12}(t) + \left\{\frac{M_x(t)}{A(t)} + i\,\frac{M_y(t)}{A(t)}\right\}.$$

Questa ammette l'integrale generale

$$\omega_{12}(t) = \exp\psi(t)\cdot\left\{\cos\Phi(t) + i\sin\Phi(t)\right\}\cdot \tag{14}$$
$$\cdot\left[\int_0^t \left\{\frac{M_x(t)}{A(t)} + i\,\frac{M_y(t)}{A(t)}\right\}\left\{\cos\Phi(t) - i\sin\Phi(t)\right\}\exp(-\psi(t))\cdot dt + K_1\right],$$

dove si è posto:

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{f(t)}{A(t)}\,dt\,, \qquad \Phi(t) = \int_0^t \frac{[C(t) - A(t)]\,R(t,\,r_0)}{A(t)}\,dt \tag{15}$$

(funzioni limitate per ogni valore di t); nella (14) la costante di integrazione K^{I} si determina in base alle condizioni iniziali. Essendo per $t = 0$, $p = p_0$ e $q = q_0$, risulterà:

$$\omega_{12}(0) = p_0 + i\,q_0 = K_1\,. \tag{16}$$

In definitiva, separando la parte reale dalla parte immaginaria e raggruppando i risultati ottenuti, si hanno, per il caso che stiamo considerando, le componenti $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ della velocità angolare di rotazione del sistema rispetto ai suoi assi principali di inerzia, e ciò per mezzo di integrali definiti. Per quanto già detto sulle funzioni $f(t)$, $g(t)$, $R(t,\,r_0)$, $\psi(t)$ e $\Phi(t)$, tali componenti della velocità angolare di rotazione risulteranno limitate per ogni valore del tempo t, come si vede dalle seguenti formule che esprimono, appunto, $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$:

$$\tag{17}\left\{\begin{aligned}
p(t) &= p_0 + e^{\psi(t)}\cos\Phi(t)\cdot\int_0^t\left(\frac{M_x(t)}{A(t)}\cos\Phi(t) + \frac{M_y(t)}{A(t)}\sin\Phi(t)\right)e^{-\psi(t)}\,dt\,-\\
&\qquad - e^{\psi(t)}\sin\Phi(t)\cdot\int_0^t\left(\frac{M_y(t)}{A(t)}\cos\Phi(t) - \frac{M_x(t)}{A(t)}\sin\Phi(t)\right)e^{-\psi(t)}\,dt\\
q(t) &= q_0 + e^{\psi(t)}\sin\Phi(t)\cdot\int_0^t\left(\frac{M_x(t)}{A(t)}\cos\Phi(t) + \frac{M_y(t)}{A(t)}\sin\Phi(t)\right)e^{-\psi(t)}\,dt\,+\\
&\qquad + e^{\psi(t)}\cos\Phi(t)\cdot\int_0^t\left(\frac{M_y(t)}{A(t)}\cos\Phi(t) - \frac{M_x(t)}{A(t)}\sin\Phi(t)\right)e^{-\psi(t)}\,dt\\
r(t) &= R(t,\,r_0) = \exp\int_0^t\frac{g(t)}{C(t)}\,dt\cdot\left[\int_0^t\frac{M_z(t)}{C(t)}\exp\left(-\int_0^t\frac{g(t)}{C(t)}\,dt\right)\cdot dt + r_0\right].
\end{aligned}\right.$$

Con ciò le equazioni euleriane corrette del moto del sistema sono, come si vede, nel caso considerato, risolte per mezzo di quadrature. Si può anche determinare il primo degli angoli di EULERO θ. Invero, per quanto concerne l'angolo θ formato dalla direzione del vettore momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}$ con l'asse delle z, essendo

$$K^2 = (\mathrm{mod}\ \boldsymbol{K})^2 = A^2\, p^2 + B^2\, q^2 + C^2\, r^2\,,$$

si avrà:

$$\cos\theta = \frac{C(t)\ r(t)}{K(t)} = \frac{C(t)\ r(t)}{\sqrt{A^2(t)\ p^2(t) + B^2(t)\ q^2(t) + C^2(t)\ r^2(t)}}\,, \tag{18}$$

dove in luogo di $p(t)$, $q(t)$ ed $r(t)$ dovranno essere pensati sostituiti i valori forniti dalle (17).

4. - Soluzione del problema rispetto agli assi inerziali, nel caso in cui sia $M_z \equiv 0$.

Presenta particolare interesse il caso in cui sia $M_z \equiv 0$, in quanto esso consente la soluzione del problema delle rotazioni rispetto ad assi inerziali. In tal caso, riprendiamo in considerazione le equazioni differenziali cui soddisfano gli angoli di EULERO:

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi \\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi \\ r = \psi \cos\theta + \dot\varphi\,. \end{cases} \tag{19}$$

Essendo $M_z \equiv 0$, cioè avendosi (in virtù della struttura giroscopica) dalla terza equazione di EULERO del moto, $r = r_0 =$ costante, la terza delle (19) fornirà:

$$r = r_0 = \dot\psi \cos\theta + \varphi\,, \qquad \dot\psi = (r_0 - \dot\varphi)/\cos\theta\,. \tag{20}$$

Dalle prime due delle (19) si otterrà poi:

$$\omega_{12}(t) = p + i\, q = (\dot\psi \sin\theta - i\, \dot\theta)\ (\sin\varphi + i \cos\varphi) = \tag{21}$$

$$= (\dot\theta + i\, \dot\psi \sin\theta) \exp(-\, i\, \varphi) = [\dot\theta + i\, (r_0 - \dot\varphi)\ \mathrm{tg}\theta]\ e^{-i\varphi}\,.$$

Nel caso, particolarmente interessante dal punto di vista fisico, di piccoli angoli θ, si potrà assumere $\operatorname{tg}\theta \sim \theta$ e quindi si avrà:

$$(22) \qquad \omega_{12} \sim [\dot{\theta} + i\,(r_0 - \dot{\varphi})\,\theta]\exp(-\,i\,\varphi)\,.$$

Introducendo con H. Leon (5) «l'angolo complesso d'attacco» $\theta_{12} = \theta_{1,2}(t)$, definito come

$$(23) \qquad \theta_{12} = \theta\exp(-\,i\,\varphi)$$

e tale che si ha, quindi,

$$(24) \qquad \dot{\theta}_{12} = \dot{\theta}\exp(-\,i\,\varphi) - i\,\theta\exp(-\,i\,\varphi)\,, \qquad \dot{\varphi} = (\dot{\theta} - i\,\theta\,\dot{\varphi})\exp(-\,i\,\varphi)\,,$$

si trova, per l'angolo complesso d'attacoo medesimo, l'equazione differenziale:

$$(25) \qquad \dot{\theta}_{12} = -\,i\,r_0\,\theta_{12} + \omega_{12}\,,$$

la quale fornisce θ_{12} una volta che sia nota la velocità angolare complessa $\omega_{12} = p + i\,q$. Nota quest'ultima, si ha, invero:

$$(26) \qquad \theta_{12}(t) = \exp\,(-\,i\,r_0\,t)\cdot\left[\int_0^t \omega_{12}(t)\,e^{i r_0 t}\,dt + \theta_{12}(0)\right].$$

Ora basta determinare $\omega_{12}(t)$, perchè il problema delle rotazioni riferite a coordinate inerziali possa ritenersi risolto nel caso considerato.

Sostituendo il valore costante r_0 di r nelle prime due equazioni euleriane, si ha, invero:

$$(27) \qquad \begin{cases} A(t)\,\dot{p}(t) + [C(t) - A(t)]\,q(t)\,r_0 = M_x(t) + f(t)\,p(t) \\[2ex] i\,A(t)\,\dot{q}(t) - i\,[C(t) - A(t)]\,p(t)\,r_0 = i\,M_y(t) + i\,f(t)\,p(t)\,. \end{cases}$$

Sommandole membro a membro si ottiene:

$$\dot{\omega}_{12}(t) = \left[\frac{f(t)}{A(t)} + \frac{i\,r_0\,\{C(t) - A(t)\}}{A(t)}\right]\omega_{12}(t) + \frac{M_x(t)}{A(t)} + i\,\frac{M_y(t)}{A(t)}\,;$$

(5) Cfr. H. Leon, *Angle of attack convergence of a spinning missile descending through the atmosphere*, J. Aerospace Sci. **25** (1958); H. Leon, *Spin dynamics of rockets and space vehicles in vacuum*, T. R. 59-0000-00787, Space Technology Laboratories, 1959.

e questa fornisce:

$$\omega_{12}(t) = \exp\left[\int_0^t \left\{\frac{f(t)}{A(t)} + i\,\frac{r_0\,(C(t) - A(t))}{A(t)}\right\} \mathrm{d}t\right] \cdot \tag{28}$$

$$\cdot \left[\int_0^t \frac{M_x(t) + i\,M_y(t)}{A(t)} \exp\left[-\int_0^t \left\{\frac{f(t)}{A(t)} + \frac{i\,(C(t) - A(t))}{A(t)}\right\} \mathrm{d}t\right] \cdot \mathrm{d}t + \omega_{12}(0)\right],$$

dove con $\omega_{12}(0)$ si indica il valore della velocità angolare complessa all'istante $t = 0$. Con ciò la questione, nel caso ora considerato, può ritenersi risolta.

5. - Caso in cui la forza sollecitante formi, con l'asse z, un piano perpendicolare all'asse delle x.

Un altro caso di interesse fisico indubbio è quello in cui si abbia $A(t) = B(t) \neq C(t)$ ed in cui, inoltre, la forza sollecitante, funzione del tempo t, abbia direzione formante un piano con l'asse delle z e tale piano sia perpendicolare all'asse delle x. Essendo $M_y(t) = M_z(t) = 0$, $M_x(t) \neq 0$, le equazioni euleriane che reggono il moto intorno al baricentro diventano:

$$\begin{cases} A(t)\,\dot{p}(t) + [C(t) - A(t)]\,q(t)\,r(t) - f(t)\,p(t) = M_x(t) \\ A(t)\,\dot{q}(t) + [A(t) - C(t)]\,r(t)\,p(t) - f(t)\,q(t) = 0 \\ C(t)\,\dot{r}(t) = g(t)\,r(t)\,. \end{cases} \tag{29}$$

La terza fornisce

$$r(t) = r_0 \exp\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\,\mathrm{d}t = R_1(t, r_0)\,, \tag{30}$$

dove $R_1(t, r_0)$ è, come si vede, a meno di una quadratura, funzione nota dei suoi argomenti; ed è chiaro il simbolismo. Dopodichè si procede, evidentemente, in modo analogo a quanto precedentemente fatto.

Va ancora osservato che, nel caso del moto alla Poinsot del sistema (sempre a struttura giroscopica), essendo $M_x = M_y = M_z = 0$, le equazioni euleriane del moto forniscono ancora:

$$r = r_0 \exp\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\,\mathrm{d}t = R_1(t, r_0) \tag{31}$$

ed inoltre:

$$\log \frac{\omega_{12}(t)}{\omega_{12}(0)} = i \int_0^t \left[\frac{C(t) - A(t)}{A(t)} R_1(t, r_0) + f(t) \right] dt; \tag{32}$$

da cui, separando, si ottiene:

$$\begin{cases} p(t) = p_0 \cos Q(t) - q_0 \sin Q(t) \\ q(t) = q_0 \cos Q(t) + p_0 \sin Q(t)\,, \end{cases} \tag{33}$$

dove si è posto

$$Q(t) = \int_0^t \left[\frac{C(t) - A(t)}{A(t)} R_1(t, r_0) + f(t) \right] dt\,.$$

6. - Caso particolare del sistema a struttura giroscopica, con momenti di inerzia indipendenti dal tempo e momenti sollecitanti funzioni del tempo.

Considereremo ora il caso particolare in cui la massa m del sistema ed i suoi momenti di inerzia siano costanti, avendo sempre il sistema struttura giroscopica ed essendo il sistema stesso sollecitato da momenti $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$ funzioni assegnate del tempo.

Le equazioni euleriane del moto del sistema rigido in questione intorno al proprio baricentro saranno le seguenti:

$$\begin{cases} A \dfrac{dp(t)}{dt} + (C - A)\, q(t)\, r(t) = M_x(t) \\ A \dfrac{dq(t)}{dt} + (A - C)\, r(t)\, p(t) = M_y(t) \\ C \dfrac{dr(t)}{dt} = M_z(t) \end{cases} \qquad (A \text{ e } C \text{ costanti}). \tag{34}$$

La terza fornirà immediatamente:

$$r(t) = \frac{1}{C} \int_0^t M_z(t)\, dt = R(t, r_0), \tag{35}$$

dove è $r_0 = r_{t=0}$ e dove $R(t, r_0)$ sarà pensata, d'ora in avanti, come funzione nota dei suoi argomenti, determinata dalla (35). Sostituendo quindi nelle prime due delle (34), si otterrà il sistema di equazioni differenziali:

$$
\begin{cases} A \dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} + (C - A)\, R(t, r_0)\, q(t) = M_x(t) \\[2ex] A \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + (A - C)\, R(t, r_0)\, p(t) = M_y(t)\,. \end{cases} \tag{36}
$$

Introducendo, al solito, la « velocità angolare complessa »

$$
\omega_{12}(t) = p(t) + i\, q(t)\,, \tag{37}
$$

si otterrà, per la medesima, l'equazione differenziale:

$$
\frac{\mathrm{d}\omega_{12}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{i\,(C - A)\, R(t\,,\, r_0)}{A}\, \omega_{12}(t) + \frac{M_x(t)}{A} + i\, \frac{M_y(t)}{A}\,, \tag{38}
$$

la quale, tenuto conto della condizione iniziale, fornirà l'integrale:

$$
\omega_{12}(t) = \exp\left[\frac{i\,(C - A)}{A} \int_0^t R(t,\, r_0)\, \mathrm{d}t\right] \cdot
$$

$$
\cdot \left[\int_0^t \left(\frac{M_x(t)}{A} + i\, \frac{M_y(t)}{A}\right) \exp\left\{-\frac{i\,(C - A)}{A} \int_0^t R(t,\, r_0)\, \mathrm{d}t\right\} \cdot \mathrm{d}t + \omega_{12}(0)\right] = \tag{39}
$$

$$
= [\cos\Lambda(t) + i\, \sin\Lambda(t)] \left[\int_0^t \left(\frac{M_x(t)}{A} + i\, \frac{M_y(t)}{A}\right) \big(\cos\Lambda(t) - i\, \sin\Lambda(t)\big)\, \mathrm{d}t + p_0 + iq_0\right],
$$

avendo posto

$$
\Lambda(t) = \frac{C - A}{A} \int_0^t R(t,\, r_0)\, \mathrm{d}t\,. \tag{40}
$$

Separando la parte reale dalla parte immaginaria e conglobando i risultati, si ottengono le componenti p, q, r della velocità angolare di rotazione del sistema, in funzione del tempo t:

$$(41)\qquad \begin{cases} p(t) = \cos A(t)\cdot\left[p_0 + \int\limits_0^t \left(\frac{M_x(t)}{A}\cos A(t) - \frac{M_y(t)}{A}\sin A(t)\right) \mathrm{d}t\right] - \\ \qquad - \sin A(t)\cdot\left[q_0 + \int\limits_0^t \left(\frac{M_y(t)}{A}\cos A(t) - \frac{M_x(t)}{A}\sin A(t)\right) \mathrm{d}t\right] \\ q(t) = \cos A(t)\cdot\left[q_0 + \int\limits_0^t \left(\frac{M_y(t)}{A}\cos A(t) - \frac{M_x(t)}{A}\sin A(t)\right) \mathrm{d}t\right] + \\ \qquad + \sin A(t)\cdot\left[p_0 + \int\limits_0^t \left(\frac{M_x(t)}{A}\cos A(t) - \frac{M_y(t)}{A}\sin A(t)\right) \mathrm{d}t\right] \\ r(t) = r_0 + \frac{1}{C}\int\limits_0^t M_z(t)\,\mathrm{d}t = R(t,\ r_0)\,. \end{cases}$$

Questo caso è stato considerato anche da V. L. NADOLSCHI ([6]), il quale ha ridotto le equazioni di EULERO ad una sola equazione differenziale del tipo:

$$(42)\qquad 2\,F(t)\,\ddot{P}(t) + \dot{F}(t)\,\dot{P}(t) + 2\,P(t) = G(t)\,,$$

dove $F(t)$ e $G(t)$ sono funzioni note del tempo t, essendolo $M_x(t)$, $M_y(t)$ ed $M_z(t)$. Mediante la trasformazione

$$(43)\qquad \tau = \int [\sqrt{F(t)}\,]^{-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

NADOLSCHI riduce l'equazione differenziale soprascritta (42) a quella, integrabile immediatamente,

$$(44)\qquad \frac{\mathrm{d}^2P(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} + P(\tau) = G(\tau)\,,$$

essendo $G(\tau)$ una funzione nota della nuova variabile τ. Nel caso in cui la forza sollecitante, funzione del tempo, abbia direzione formante con l'asse delle z

([6]) Cfr. V. L. NADOLSCHI, *Sur un nouveau cas intégrable du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe*, Ann. Sci. Univ. Jassy (Sect. I) **30** (1948), 43-74.

un piano perpendicolare all'asse delle x, si avrà:

$$M_x = M_x(t) \neq 0 , \qquad M_y = M_z = 0 .$$

La terza equazione euleriana fornirà $r = r_0 =$ costante, e le prime due forniranno, per la velocità angolare complessa $\omega_{12}(t) = p(t) + i\, q(t)$, l'equazione differenziale

$$\dot{\omega}_{12}(t) - i\, r_0 \frac{C-A}{A}\, \omega_{12}(t) = \frac{M_x(t)}{A} \qquad (i = \sqrt{-1}\,). \tag{45}$$

Questa ammette la soluzione

$$\omega_{12}(t) = \omega_{12}(0) \exp(i\,\lambda\, t) + \frac{1}{A}\int_0^t M_x(\tau) \exp[i\,\lambda\,(t-\tau)]\, d\tau \qquad \left(\lambda = r_0 \frac{C-A}{A}\right). \tag{46}$$

Separando la parte reale dalla parte immaginaria e raggruppando i risultati, si ha il seguente quadro delle componenti, rispetto alla terna solidale baricentrica considerata di riferimento, della velocità angolare di rotazione del sistema:

$$\left\{\begin{aligned} p &= p_0 \cos\lambda t - q_0 \sin\lambda t + \frac{1}{A}\int_0^t M_x(\tau) \cos\lambda(t-\tau)\, d\tau \\ q &= q_0 \cos\lambda t + p_0 \sin\lambda t + \frac{1}{A}\int_0^t M_x(\tau) \sin\lambda(t-\tau)\, d\tau \qquad \left(\lambda = r_0 \frac{C-A}{A}\right) \\ r &= r_0 = \text{costante}\,. \end{aligned}\right. \tag{47}$$

Le componenti suddette della velocità angolare di rotazione possono anche essere espresse in altro modo. Invero le equazioni euleriane, che possono essere scritte

$$\dot{p} + \lambda\, q = M_x(t)/A\,, \qquad p = (1/\lambda)\, \dot{q}\,, \qquad r = r_0\,,$$

dànno luogo immediatamente all'equazione differenziale:

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = (\lambda/A)\; M_x(t)\,,$$

la quale fornisce la soluzione

$$q(t) = q_0 \cos\lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda}\sin\lambda t + \frac{1}{A}\int_0^t M_x(\tau)\sin\lambda(t-\tau)\, d\tau . \tag{48}$$

Derivando e sostituendo, si ha poi:

$$p(t) = -q_0 \sin\lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda}\cos\lambda t + \frac{1}{A}\int_0^t M_x(\tau)\cos\lambda(t-\tau)\, d\tau . \tag{49}$$

Se, più semplicemente, il momento sollecitante M_x è costante, la velocità angolare complessa $\omega_{12}(t)$ si riduce alla:

$$\omega_{12}(t) = \omega_{12}(0)\exp(i\lambda t) + \frac{iM_x}{\lambda A}[1-\exp(i\lambda t)], \tag{50}$$

e le componenti della velocità angolare rispetto al prescelto riferimento solidale, risultano:

$$\left\{\begin{aligned} p(t) &= p_0\cos\lambda t - q_0\sin\lambda t + \frac{M_x}{\lambda A}\sin\lambda t \\ q(t) &= p_0\sin\lambda t + q_0\cos\lambda t + \frac{M_x}{\lambda A}(1-\cos\lambda t) \\ r(t) &= r_0 \end{aligned}\right. \tag{51}$$

od anche

$$\left\{\begin{aligned} p(t) &= \left(-q_0 + \frac{M_x}{\lambda A}\right)\sin\lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda}\cos\lambda t \\ q(t) &= \frac{M_x}{\lambda A} + \left(q_0 - \frac{M_x}{\lambda A}\right)\cos\lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda}\sin\lambda t \\ r(t) &= r_0 . \end{aligned}\right. \tag{51$'$}$$

Circa l'angolo α formato dalla direzione del vettore momento angolare $\boldsymbol{K}$ con l'asse delle z, si ha in ogni caso:

$$\cos\alpha = C\, r/\mathrm{mod}\, \boldsymbol{K} = C\, r_0/\sqrt{p^2+q^2+r_0^2}, \tag{52}$$

dove, in luogo di p e di q, si sostituiranno i valori trovati nelle varie condizioni considerate. Circa il problema delle rotazioni riferite a coordinate inerziali, noteremo infine quanto segue. Sempre per struttura giroscopica del sistema e nella ipotesi che $M_x(t)$ ed $M_y(t)$ siano noti in funzione del tempo t, e che si abbia inoltre $M_z = 0$, il problema in parola può essere risolto facendo uso, al solito, dell'angolo complesso d'attacco.

7. - Caso particolare dei momenti di inerzia variabili nel tempo, struttura giroscopica e momenti sollecitanti proporzionali, rispettivamente, alle componenti del vettore velocità angolare di rotazione.

Ritorniamo ora all'ipotesi di massa e momenti di inerzia $A = B$ e C variabili nel tempo e di presenza del termine di trasferimento ai getti. Può essere interessante il caso in cui sia $M_x(t) = -k\,p(t)$, $M_y(t) = -k\,q(t)$, $M_z(t) = -k\,r(t)$, con k costante. Le equazioni euleriane del moto diventano

$$(53)\qquad \begin{cases} A(t)\,\dot p(t) + [C(t) - A(t)]\,q(t)\,r(t) = [f(t) - k]\,p(t) \\ A(t)\,\dot q(t) + [A(t) - C(t)]\,r(t)\,p(t) = [f(t) - k]\,q(t) \\ C(t)\,\dot r(t) = [g(t) - k]\,r(t)\,. \end{cases}$$

La terza di queste fornisce subito:

$$(54)\qquad r(t) = r_0 \exp \int_0^t \frac{g(t) - k}{C(t)}\,dt = R_2(t,\ r_0)\,.$$

Sostituendo nelle prime due e introducendo, al solito, la velocità angolare complessa $\omega_{12}(t) = p(t) + i\,q(t)$, si ottiene per la medesima l'equazione differenziale:

$$\dot\omega_{12}(t) = [i\{C(t) - A(t)\}\,R_2(t\,,\ r_0) + f(t) - k]\,\omega_{12}(t),$$

da cui si ha immediatamente $\omega_{12}(t)$ e quindi, separando la parte reale da quella immaginaria, $p(t)$ e $q(t)$. Anche qui si può dare al solito modo l'angolo che la direzione del vettore momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}$ forma con l'asse delle z, e, nel caso in cui sia $M_z = 0$, si può risolvere, con l'ausilio dell'angolo complesso d'attacco, il problema delle rotazioni del sistema riferite a coordinate inerziali.

8. - Moti di puro beccheggio del sistema di massa variabile.

Veniamo ora alla considerazione di moti di puro beccheggio, cioè di pure rotazioni intorno all'asse trasversale baricentrico del sistema, asse trasversale che sarà per noi l'asse delle x. Supponiamo che l'emissione di massa avvenga in coda, dando luogo così ad una variazione di momento $-l\,\omega\,\dot{m}(t)$ perpendicolare all'asse longitudinale del sistema, dove ω indica la velocità angolare di rotazione, l la distanza fra il baricentro e la coda del sistema. L'equazione del moto del sistema stesso relativamente al baricentro sarà:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)\,\omega(t)] - \dot{m}(t)\,l^2\,\omega(t) = M(t) \qquad \left(\dot{m}(t) = \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}\right), \tag{55}$$

dove $M(t)$ è il momento sollecitante pensato come funzione del solo tempo t e dove $A(t)$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse delle x (asse di beccheggio). Se $\Delta(t)$ è il relativo raggio d'inerzia, la (55) diventa:

$$A(t)\,\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} - \omega(t)\,[l^2 - \Delta^2(t)]\,\dot{m}(t) + \omega(t)\,m(t)\,\frac{\mathrm{d}\Delta^2(t)}{\mathrm{d}t} = M(t)\,. \tag{56}$$

Quest'ultima potrà scriversi:

$$\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{l^2 - \Delta^2(t)}{A(t)}\,\dot{m}(t) - \frac{m(t)}{A(t)}\,\frac{\mathrm{d}\Delta^2(t)}{\mathrm{d}t}\right]\omega(t) + \frac{M(t)}{A(t)}\,, \tag{57}$$

dove porremo

$$\frac{M(t)}{A(t)} = G(t)\,, \qquad \frac{l^2 - \Delta^2(t)}{A(t)}\,\dot{m}(t) - \frac{m(t)}{A(t)}\,\frac{\mathrm{d}\Delta^2(t)}{\mathrm{d}t} = F(t)\,, \tag{58}$$

e dove terremo presente che le funzioni $G(t)$ e $F(t)$ saranno pensate come funzioni note del tempo. La (57) ammetterà dunque l'integrale:

$$\omega(t) = \exp\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t\cdot\Big[\int_0^t G(t)\,\exp\Big(-\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t\Big)\cdot\mathrm{d}t + \omega(0)\Big]\,, \tag{59}$$

che fornisce la velocità angolare di beccheggio del sistema.

9. - Moti di un sistema a struttura quasi-giroscopica, con momenti d'inerzia funzioni del tempo e momenti sollecitanti dipendenti dal tempo.

Dedicheremo ora la nostra attenzione ad un problema di moti « variati », nel senso che ora preciseremo. Considereremo, cioè, il problema dei moti relativi al baricentro di un sistema con massa e momenti di inerzia variabili nel tempo per effetto di getti e con struttura poco differente dalla struttura giroscopica, nell'ipotesi che i momenti sollecitanti siano funzioni assegnate del tempo t; precisamente:

L'ipotesi di quasi-giroscopicità di cui abbiamo detto sopra si traduce nel fatto che si abbia, per ogni t,

$$A(t) - B(t) = \varepsilon\, A(t)\,, \qquad B(t) = (1 - \varepsilon)\, A(t)\,, \tag{60}$$

con ε quantità piccola del primo ordine. I moti del sistema intorno al baricentro saranno retti dalle equazioni euleriane:

$$\left\{\begin{aligned} & A(t)\,\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} + [C(t) - B(t)]\, q(t)\, r(t) - f(t)\;\; p(t) = M_x(t) \\ & B(t)\,\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + [A(t) - C(t)]\, r(t)\, p(t) - f_1(t)\; q(t) = M_y(t) \\ & C(t)\,\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + [B(t) - A(t)]\, p(t)\, q(t) - g(t)\, r(t) = M_z(t)\,, \end{aligned}\right. \tag{61}$$

dove è

$$f_1(t) = f(t) + \varepsilon\, \Delta_x^2(t).$$

Si cercherà di soddisfare alle equazioni differenziali euleriane soprascritte mediante soluzioni della forma

$$\left\{\begin{aligned} p(t) &= \bar{p}(t) + \xi(t) \\ q(t) &= \bar{q}(t) + \eta(t) \\ r(t) &= \bar{r}(t) + \zeta(t)\,, \end{aligned}\right. \tag{62}$$

dove $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ sono « variazioni » nel senso di POINCARÉ, i termini di ordine superiore al primo nelle quali e nelle derivate rispetto al tempo delle quali si trascureranno. Inoltre $\bar{p}(t)$, $\bar{q}(t)$, $\bar{r}(t)$ indicano le soluzioni delle equazioni euleriane nel caso *a struttura giroscopica* precedentemente considerato al n. 3.

Sostituendo nelle (61), si ha:

$$(63)\quad \begin{cases} A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{p}(t)}{\mathrm{d}t} + A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} + [C(t) - (1-\varepsilon)A(t)]\,\big(\bar{q}(t)+\eta(t)\big)\big(\bar{r}(t)+\zeta(t)\big) - \\ \qquad\qquad - f(t)\,\big(\bar{p}(t)+\xi(t)\big) = M_x(t) \\ (1-\varepsilon)\,A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{q}(t)}{\mathrm{d}t} + (1-\varepsilon)\,A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t} + \big(A(t)-C(t)\big)\big(\bar{r}(t)+\zeta(t)\big)\big(\bar{p}(t)+\xi(t)\big) - \\ \qquad\qquad - [f(t)+\varepsilon\,\Delta_x^2(t)]\,\big(\bar{q}(t)+\eta(t)\big) = M_y(t) \\ C(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{r}(t)}{\mathrm{d}t} + C(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\mathrm{d}t} - \varepsilon\,A(t)\,\big(\bar{p}(t)+\xi(t)\big)\,\big(\bar{q}(t)+\eta(t)\big) - \\ \qquad\qquad - g(t)\,\big(\bar{r}(t)+\zeta(t)\big) = M_z(t)\,. \end{cases}$$

Siccome è:

$$(64)\quad \begin{cases} A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{p}(t)}{\mathrm{d}t} + [C(t)-A(t)]\,\bar{q}(t)\,\bar{r}(t) - f(t)\,\bar{p}(t) = M_x(t) \\ A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{q}(t)}{\mathrm{d}t} + [A(t)-C(t)]\,\bar{p}(t)\,\bar{r}(t) - f(t)\,\bar{q}(t) = M_y(t) \\ C(t)\,\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} - g(t)\,\bar{r}(t) = M_z(t), \end{cases}$$

ne risultano, per le funzioni $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$, le equazioni alle variazioni che seguono:

$$(65)\quad \begin{cases} A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} + [C(t)-A(t)]\,[\bar{q}(t)\,\zeta(t)+\bar{r}(t)\,\eta(t)] + \varepsilon\,A(t)\,\bar{q}(t)\,\bar{r}(t) - \\ \qquad\qquad - f(t)\,\xi(t) = 0 \\ A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t} + [A(t)-C(t)]\,[\bar{r}(t)\,\xi(t)+\bar{p}(t)\,\zeta(t)] - \varepsilon\,A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{q}(t)}{\mathrm{d}t} - \\ \qquad\qquad - \varepsilon\,\Delta_x^2(t)\,\bar{q}(t) - f(t)\,\eta(t) = 0 \\ C(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)\,\zeta(t) + \varepsilon A(t)\,\bar{p}(t)\,\bar{q}(t)\,. \end{cases}$$

La terza delle (65) fornisce:

$$(66)\qquad \zeta(t) = \zeta(t,\,\zeta_0) = e^{\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\mathrm{d}t}\left[\varepsilon\int_0^t \frac{A(t)\,\bar{p}(t)\,\bar{q}(t)}{C(t)}\,e^{-\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \zeta_0\right],$$

dove ζ_0 indica, evidentemente, il valore di ζ per $t = 0$.

Essendo le funzioni

$$\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\,dt, \qquad \int_0^t \frac{A(t)\,\bar{p}(t)\,\bar{q}(t)}{C(t)}\, e^{-\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}dt}\, dt$$

limitate per ogni t e nella ipotesi, aderente alla realtà, che, preso ad arbitrio un $\delta > 0$ sia $|\zeta_0| < \delta$, si vede subito che la variazione $\zeta(t)$ si mantiene « piccola » per ogni t. Infatti è

$$|\zeta(t)| \leqslant \varepsilon\, e^{\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}dt} \left| \int_0^t \frac{A(t)\,\bar{p}(t)\,\bar{q}(t)}{C(t)}\, e^{-\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}dt}\, dt \right| + e^{\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}dt} |\zeta_0| \,.$$

Sostituendo ora il valore trovato di ζ nelle prime due delle (65), si ottiene il sistema:

$$\text{(67)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\xi(t)}{dt} + \frac{C(t) - A(t)}{A(t)}\,\bar{r}(t)\,\eta(t) + U(t) - W(t)\,\xi(t) = 0 \\ &\frac{d\eta(t)}{dt} - \frac{C(t) - A(t)}{A(t)}\,\bar{r}(t)\,\xi(t) + V(t) - W(t)\,\eta(t) = 0 \,, \end{aligned} \right.$$

dove si è posto:

$$U(t) = \frac{C(t) - A(t)}{A(t)}\,\bar{q}(t)\,\zeta(t, \zeta_0) + \varepsilon\,\bar{q}(t)\,\bar{r}(t) \,,$$

$$V(t) = \frac{A(t) - C(t)}{A(t)}\,\bar{p}(t)\,\zeta(t, \zeta_0) - \varepsilon\,\frac{d\bar{q}(t)}{dt} - \frac{\varepsilon\,\Delta_x^2(t)\,\bar{q}(t)}{A(t)} \,,$$

$$W(t) = f(t)/A(t) \,.$$

La funzione $W(t)$ risulta limitata per ogni t. Per quanto riguarda le funzioni $U(t)$ e $V(t)$, diremo che esse risultano « piccole » per ogni t. Invero si ha:

$$|U(t)| \leqslant \left| \frac{C(t) - A(t)}{A(t)}\,\bar{q}(t) \right| |\zeta(t, \zeta_0)| + \varepsilon\,|\bar{q}(t)\,\bar{r}(t)| \,,$$

$$|V(t)| \leqslant \left| \frac{C(t) - A(t)}{A(t)}\,\bar{p}(t) \right| |\zeta(t, \zeta_0)| + \varepsilon \left| \frac{d\bar{q}(t)}{dt} \right| + \varepsilon \left| \frac{\Delta_x^2(t)\,\bar{q}(t)}{A(t)} \right| .$$

Ora, moltiplicando la seconda delle (67) per $i = \sqrt{-1}$ e sommando con la prima, dopo aver posto

$$\chi_{12}(t) = \xi(t) + i\,\eta(t) \,,$$

si ottiene, per la « variazione complessa » $\chi_{12}(t)$, l'equazione differenziale:

$$\dot{\chi}_{12}(t) = \left[\frac{i\,\{C(t) - A(t)\}\,\bar{r}(t)}{A(t)} + W(t)\right] \chi_{12}(t) - [U(t) + i\,V(t)]. \tag{68}$$

Questa fornisce la soluzione:

$$\begin{aligned} \chi_{12}(t) = {} & e^{W_1(t)}\{\cos S(t) + i\sin S(t)\}\cdot \\ & \cdot\left[\int_0^t -[U(t) + i\,V(t)]\,e^{-W_1(t)}\,[\cos S(t) - i\sin S(t)]\,\mathrm{d}t + \chi_{12}(0)\right], \end{aligned} \tag{69}$$

dove si è posto

$$W_1(t) = \int_0^t W(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad S(t) = \int_0^t \frac{C(t) - A(t)}{A(t)}\,\bar{r}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

e dove $W_1(t)$ ed $S(t)$ sono funzioni limitate per ogni valore di t. Separando la parte reale dalla parte immaginaria e riunendo i risultati, si ricavano le seguenti espressioni per le variazioni $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$:

$$\left\{\begin{aligned} \xi = \xi(t, \xi_0, \eta_0) = {} & -e^{W_1(t)}\cos S(t)\int_0^t e^{-W_1(t)}\,U(t)\cos S(t)\,\mathrm{d}t - \\ & - e^{W_1(t)}\cos S(t)\int_0^t e^{-W_1(t)}\,V(t)\sin S(t)\,\mathrm{d}t - \\ & - e^{W_1(t)}\sin S(t)\int_0^t e^{-W_1(t)}\,U(t)\sin S(t)\,\mathrm{d}t + \\ & + e^{W_1(t)}\sin S(t)\int_0^t e^{-W_1(t)}\,V(t)\cos S(t)\,\mathrm{d}t + \\ & + \xi_0\,e^{W_1(t)}\cos S(t) - \eta_0\,e^{W_1(t)}\sin S(t) \\ \eta = \eta(t, \xi_0, \eta_0) = {} & \quad e^{W_1(t)}\cos S(t)\int_0^t e^{-W_1(t)}\,U(t)\sin S(t)\,\mathrm{d}t - \\ & - e^{W_1(t)}\cos S(t)\int_0^t e^{-W_1(t)}\,V(t)\cos S(t)\,\mathrm{d}t - \\ & - e^{W_1(t)}\sin S(t)\int_0^t e^{-W_1(t)}\,U(t)\cos S(t)\,\mathrm{d}t - \\ & - e^{W_1(t)}\sin S(t)\int_0^t e^{-W_1(t)}\,V(t)\sin S(t)\,\mathrm{d}t + \\ & + \xi_0\,e^{W_1(t)}\sin S(t) + \eta_0\,e^{W_1(t)}\cos S(t) \\ \zeta(t) = \zeta(t, \zeta_0) = {} & e^{\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\mathrm{d}t}\left[\varepsilon\int_0^t \frac{A(t)\,\bar{p}(t)\,\bar{q}(t)}{C(t)}\,e^{-\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \zeta_0\right]. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

Con ciò le equazioni alle variazioni sono risolte.

In virtù di quanto già stabilito su $|U(t)|$ e $|V(t)|$ nonchè su $|\zeta(t, \zeta_0)|$ e nell'ipotesi che, come ζ_0, anche ξ_0 ed η_0 siano «piccole», ipotesi fisicamente corretta nella quale ci mettiamo, dall'esame delle funzioni $\xi(t)$ ed $\eta(t)$, come esse risultano fornite dalle prime due delle (70), appare chiaro che tali funzioni si mantengono «piccole» per ogni t e che si può concludere per una stabilità dei moti nel caso a struttura giroscopica precedentemente considerato.

Fisseremo ora l'attenzione su di un caso particolare, di notevole importanza fisica, cioè quello in cui si abbia, sensibilmente, l'indipendenza dal tempo dei raggi d'inerzia e, inoltre, ci si arresti a considerare la variazione della massa nel tempo come data da legge lineare. Nel caso in questione si avrà, dunque:

$$\text{(71)} \qquad \begin{cases} A(t) - B(t) = \varepsilon\, A(t) & (\varepsilon \text{ piccolo del } 1^{\circ} \text{ ordine}) \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\Delta_x^2(t)}{\mathrm{d}t} \sim \dfrac{\mathrm{d}\Delta_y^2(t)}{\mathrm{d}t} \sim \dfrac{\mathrm{d}\Delta_z^2(t)}{\mathrm{d}t} \sim 0 \\[2mm] m(t) = m_0 - m't\,, \end{cases}$$

con m_0 (massa iniziale) ed m' costanti, dal che discende che ϱ^2 è pure costante

Le equazioni euleriane del moto diventeranno:

$$\text{(72)} \qquad \begin{cases} A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} + [C(t) - (1-\varepsilon)A(t)]\, q(t)\, r(t) - \dot{m}\cdot(l^2 + \frac{1}{2}\varrho^2 - \Delta_x^2)\, p(t) = M_x\,. \\[2mm] (1-\varepsilon)A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + [A(t) - C(t)]\, r(t)\, p(t) - \dot{m}\cdot(l^2 + \frac{1}{2}\varrho^2 - (1-\varepsilon)\Delta_x^2)\, q(t) = M_y \\[2mm] C(t)\,\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + \varepsilon\, A(t)\, p(t)\, q(t) - \dot{m}\cdot(\varrho^2 - \Delta_z^2)\, r(t) = M_z. \end{cases}$$

E le equazioni alle variazioni saranno le seguenti:

$$\text{(73)} \qquad \begin{cases} A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} + [C(t) - A(t)]\,\big(\bar{q}(t)\,\zeta(t) + \bar{r}(t)\,\eta(t)\big) + \\ \qquad\qquad + \varepsilon\, A(t)\,\bar{q}(t)\,\bar{r}(t) - \dot{m}\cdot(l^2 + \frac{1}{2}\varrho^2 - \Delta_x^2)\,\xi(t) = 0 \\[2mm] A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t} + [A(t) - C(t)]\,\big(\bar{r}(t)\,\xi(t) + \bar{p}(t)\,\zeta(t)\big) - \\ \qquad\qquad - \varepsilon\, A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{q}(t)}{\mathrm{d}t} - \varepsilon\,\Delta_x^2(t)\,\bar{q}(t) - \dot{m}\cdot(l^2 + \frac{1}{2}\varrho^2 - \Delta_x^2)\,\eta(t) = 0 \\[2mm] C(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{m}\cdot(\varrho^2 - \Delta_z^2)\,\zeta(t) + \varepsilon\, A(t)\,\bar{p}(t)\,\bar{q}(t). \end{cases}$$

Queste equazioni si risolvono col metodo già esposto, e ad esse si applicano, in particolare, le considerazioni svolte circa la stabilità.

10. - Caso particolare dei moti non variati con momenti sollecitanti nulli.

Considereremo, infine, il caso particolare dei moti non variati (struttura giroscopica) con $M_x = M_y = M_z = 0$, ed in cui si abbia ancora:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_x^2(t)}{\mathrm{d}t} \sim \frac{\mathrm{d}\Delta_y^2(t)}{\mathrm{d}t} \sim \frac{\mathrm{d}\Delta_z^2(t)}{\mathrm{d}t} \sim 0$$

ed $m(t) = m_0 - m't$, con m_0 ed m' costanti. Si avranno le equazioni euleriane:

$$\begin{cases} A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} + [C(t) - A(t)]\,q(t)\,r(t) - \dot{m}\cdot(l^2 + \frac{1}{2}\varrho^2 - \Delta_x^2)\,p(t) = 0 \\[2ex] A(t)\,\dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + [A(t) - C(t)]\,r(t)\,p(t) - \dot{m}\cdot(l^2 + \frac{1}{2}\varrho^2 - \Delta_x^2)\,q(t) = 0 \\[2ex] C(t)\,\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} - \dot{m}\cdot(\varrho^2 - \Delta_z^2)\,r(t) = 0\,. \end{cases}$$

In tale caso la terza delle equazioni euleriane fornirà:

$$C(t)\,\frac{\mathrm{d}\bar{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}\,(\varrho^2 - \Delta_z^2)\,\bar{r}(t) \qquad [C(t) = m(t)\,\Delta_z^2]\,,$$

per cui si avrà:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 \left(\frac{m(t)}{m_0}\right)^{(\varrho^2/\Delta_z^2)-1} = \bar{r}_0 \left(\frac{m_0 - m't}{m_0}\right)^{(\varrho^2/\Delta_z^2)-1}. \tag{74}$$

Procedendo al solito modo sulle prime due equazioni euleriane, si troverà per la velocità angolare complessa la seguente espressione:

$$\bar{\omega}_{12}(t) = \bar{\omega}_{12}(0)\left(\frac{m_0 - m't}{m_0}\right)^{\frac{l^2 + (\varrho^2/2) - \Delta_x^2}{\Delta_x^2}} \cdot \tag{75}$$
$$\cdot \exp\left\{-i\,\bar{r}_0\,\frac{m_0}{m'}\,\frac{\Delta_z^2}{\varrho^2}\left(1 - \frac{\Delta_z^2}{\Delta_x^2}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{m't}{m_0}\right)^{\frac{\varrho^2}{\Delta_z^2}}\right]\right\}.$$

Separando la parte reale dalla parte immaginaria si otterranno $\bar{p}(t)$ e $\bar{q}(t)$, cioè, precisamente:

$$(76)\qquad \bar{p}(t) = \bar{p}_0 \left(\frac{m_0 - m't}{m_0}\right)^{\frac{l^2+(\varrho^2/2)-\Delta_x^2}{\Delta_x^2}} \cos\left\{\bar{r}_0\, \frac{m_0}{m'}\, \frac{\Delta_z^2}{\varrho^2}\left(1 - \frac{\Delta_z^2}{\Delta_x^2}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{m't}{m_0}\right)^{\frac{\varrho^2}{\Delta_z^2}}\right]\right\} +$$

$$+ \bar{q}_0 \left(\frac{m_0 - m't}{m_0}\right)^{\frac{l^2+(\varrho^2/2)-\Delta_x^2}{\Delta_x^2}} \sin\left\{\bar{r}_0\, \frac{m_0}{m'}\, \frac{\Delta_z^2}{\varrho^2}\left(1 - \frac{\Delta_z^2}{\Delta_x^2}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{m't}{m_0}\right)^{\frac{\varrho^2}{\Delta_z^2}}\right]\right\},$$

$$(77)\qquad \bar{q}(t) = \bar{q}_0 \left(\frac{m_0 - m't}{m_0}\right)^{\frac{l^2+(\varrho^2/2)-\Delta_x^2}{\Delta_x^2}} \cos\left\{\bar{r}_0\, \frac{m_0}{m'}\, \frac{\Delta_z^2}{\varrho^2}\left(1 - \frac{\Delta_z^2}{\Delta_x^2}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{m't}{m_0}\right)^{\frac{\varrho^2}{\Delta_z^2}}\right]\right\} -$$

$$- \bar{p}_0 \left(\frac{m_0 - m't}{m_0}\right)^{\frac{l^2+(\varrho^2/2)-\Delta_x^2}{\Delta_x^2}} \sin\left\{\bar{r}_0\, \frac{m_0}{m'}\, \frac{\Delta_z^2}{\varrho^2}\left(1 - \frac{\Delta_z^2}{\Delta_x^2}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{m't}{m_0}\right)^{\frac{\varrho^2}{\Delta_z^2}}\right]\right\}.$$

Le componenti della velocità angolare di rotazione del sistema sono, dunque, funzioni oscillanti con frequenza crescente e con ampiezza decrescente nel tempo.

Riassunto.

Si prende in considerazione il problema del moto di un corpo rigido, a struttura giroscopica, di massa variabile (senza che si alteri la struttura giroscopica del sistema), libero nello spazio: ciò partendo dalle equazioni differenziali euleriane, « corrette » per effetto della variazione della massa e dei momenti principali di inerzia.

Si integrano le equazioni differenziali euleriane « corrette », nel caso di momenti sollecitanti funzioni del solo tempo, senza introdurre speciali ipotesi sulla legge di variazione della massa nel tempo; e, nel caso in cui il terzo momento sollecitante sia nullo, si risolve il problema anche rispetto agli assi inerziali con l'ausilio dell' «angolo complesso di attacco».

Il metodo si particolarizza in alcuni casi speciali e cioè:

a) *il caso in cui la forza sollecitante formi, con l'asse delle z, un piano perpendicolare all'asse delle x;*

b) *il caso del sistema a struttura giroscopica con momenti di inerzia indipendenti dal tempo e momenti sollecitanti funzioni del tempo, anche, in particolare, nella condizione in cui la forza sollecitante, funzione del tempo, abbia direzione formante con l'asse delle z un piano perpendicolare all'asse delle x;*

c) *il caso di momenti di inerzia variabili nel tempo e di momenti sollecitanti proporzionali, rispettivamente, alle componenti del vettore velocità angolare di rotazione;*

d) *il caso di moti di puro beccheggio del sistema di massa variabile.*

Si immagina poi di istituire una piccola differenza fra i due primi momenti principali di inerzia e si studiano, facendo uso delle « equazioni alle variazioni » delle equazioni di Eulero corrette, i moti di un sistema a struttura « quasi-giroscopica », con momenti di *inerzia funzioni del tempo e momenti sollecitanti dipendenti dal tempo. Si risolvono le equazioni alle variazioni e si fa vedere che le « variazioni » si mantengono sempre « piccole » nel tempo, consentendo così di concludere per una affermazione di stabilità dei moti nel caso a struttura giroscopica precedentemente considerato.*

Si esaminano infine alcuni casi particolari.

Summary.

One considers the problem of the motion of a rigid body, with gyroscopic structure and variable mass, free in the space.

The problem is studied starting from the Eulerian differential equations, which are modified in correspondence with the variability of the mass and of the principal moments of inertia of the system.

The differential equations of the motion are integrated for external moments depending only from the time and without particular assumptions on the law of variation of the mass with the time. In the case in which the third external moment is equal to zero, one gives the solution of the problem also with respect to inertial axes with the aid of the « complex angle of attack ».

One studies some particular situations:

1) *the case in which the external force makes with the axis z a plane which is perpendicular to the axis x;*

2) *the case of the system with gyroscopic structure, with moments of inertia independent from the time and with external moments depending from the time;*

3) *the case in which the moments of inertia are variable with the time and the external moments are proportional, respectively, to the components of the vector angular velocity;*

4) *the case of the pure rotations about the transverse axis of the vehicle.*

Afterwards one considers the case of a little difference between the first two moments of inertia of the vehicle and studies the problem of the motion using the variational Poincaré's equations of the modified Eulerian dynamical equations. The moments of inertia and the external forces are depending from the time. One solves the variational equations and demonstrates the stability of the considered movements. After all one studies some particular cases.

* * *