Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 295-304

CORRADO SCARAVELLI (*)

Equazioni ricorrenti lineari ed equazioni differenziali lineari, per i polinomi di Appell. (**)

Introduzione.

L'APPELL, in una sua importante Memoria (cfr. [1]), ha indicato un metodo trascendente (nel quale si opera formalmente su serie, anche non convergenti) per ottenere equazioni ricorrenti lineari ed equazioni differenziali lineari alle quali soddisfano certi polinomi, detti ora « polinomi di APPELL » (1).

In questo lavoro mi propongo di indicare, invece, un metodo diretto, del tutto elementare, per giungere alle sopraddette equazioni. Precisamente: dapprima, espongo in breve tale metodo nella sua forma generale (cfr. § 1); poi, dimostro un'affermazione essenziale per il detto metodo (cfr. § 2); infine, applico tale metodo in alcuni casi semplici (cfr. § 3).

§ 1. - Il metodo diretto ed elementare (2).

1.1. - Equazioni ricorrenti lineari per i polinomi di Appell $A_n(x)$.

Consideriamo una successione di polinomi di APPELL:

$$A_n(x) \equiv a_n \stackrel{n}{:} x^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \tag{1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C. N. R., per l'anno 1966-67. — Ricevuto il 1-XII-1966.

(1) Su questi polinomi vedasi [2].

(2) Per la terminologia e i simbolismi qui seguiti cfr. [2].

Suppongo che le quantità a_n [formanti la successione generatrice $\{a_n\}$ degli $A_n(x)$] siano legate fra loro da una relazione ricorrente lineare, di un certo ordine s (intero positivo),

$$(2) \qquad p_0(n)\, a_{n+s} + p_1(n)\, a_{n+s-1} + \ldots + p_{s-1}(n)\, a_{n+1} + p_s(n)\, a_n = 0,$$

dove $p_0(n) \neq 0$, $p_1(n), \ldots, p_{s-1}(n)$, $p_s(n)$ sono dati polinomi interi in n. Precisamente sia:

$$p_k(n) = \sum_0^{m_k}{}_h\, c_{h,k}\, n^{m_k-h} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, s),$$

con $c_{h,k}$ date costanti.

Sostituendo in (2) ai coefficienti $p_k(n)$ le loro espressioni, si ha

$$(2') \qquad \sum_0^{s}{}_k \sum_0^{m_k}{}_h\, c_{h,k}\, n^{m_k-h}\, a_{n+s-k} = 0.$$

Se ora la (2′) si moltiplica, binomialmente n, per x^n [3], si ottiene:

$$(3) \qquad \sum_0^{s}{}_k \sum_0^{m_k}{}_h\, c_{h,k}\, (n^{m_k-h}\, a_{n+s-k} \overset{n}{\cdot} x^n) = 0 \ \text{[4]}.$$

Osservo qui che la quantità in parentesi nel primo membro di (3) è della forma (indicando con ν ed r degli interi non negativi prefissati)

$$(4) \qquad n^\nu\, a_{n+r} \overset{n}{\cdot} x^n ,$$

che è un polinomio di APPELL di successione generatrice $n^\nu\, a_{n+r}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Questi polinomi (4) si possono poi esprimere tutti linearmente con i polinomi di APPELL $A_n(x)$ (cfr. Lemma del § 2). Tenendo conto di ciò, la (3) diventa una relazione ricorrente lineare fra tali polinomi $A_n(x)$ (e l'ordine di tale relazione risulta $\geqslant s$). Ne discende subito la corrispondente equazione ricorrente lineare (d'ordine $\geqslant s$) alla quale soddisfano i polinomi di APPELL $A_n(x)$.

---

(3) Cfr. [2], n. 1.3.

(4) Si è potuto porre in evidenza $c_{h,k}$ in quanto esso *non* dipende da n: infatti, si prova immediatamente che, se c è una costante rispetto ad n, si ha:

$$c\, \alpha_n \overset{n}{\cdot} x^n = c\, (\alpha_n \overset{n}{\cdot} x^n)\,.$$

1.2. - Equazioni differenziali lineari per i polinomi di Appell $A_n(x)$.

Dalla precedente relazione ricorrente lineare fra i polinomi $A_n(x)$, segue immediatamente, ricordando che è (5)

$$A_{n-\mu}(x) = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-\mu+1)} A_n^{(\mu)}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \dots, n), \tag{5}$$

una relazione differenziale lineare (d'ordine $\geqslant s$) fra tali polinomi. Ne discende subito la corrispondente equazione differenziale lineare (d'ordine $\geqslant s$) alla quale soddisfano i polinomi di APPELL $A_n(x)$.

§ 2. - Un lemma.

2.1. - Lemma.

Ogni polinomio di Appell della forma

$$n^\nu a_{n+r} \overset{n}{:} x^n \qquad (\nu,\ r \text{ interi non negativi prefissati}) \tag{4}$$

si può esprimere linearmente con i polinomi di Appell

$$A_n(x) \equiv a_n \overset{n}{:} x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1}$$

La dimostrazione segue gradualmente dai successivi nn. di questo §.

2.2. - Un'utile identità numerica.

Si ha:

$$n^\nu = \sum_0^\nu {}_s (-1)^{\nu-s} \frac{\Delta^{s+1} 0^{\nu+1}}{s+1} \begin{bmatrix} n+s \\ s \end{bmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \tag{6}$$

dove le $\Delta^s 0^\nu$ $(s = 0, 1, 2, \dots;\ \nu = 0, 1, 2, \dots)$ indicano le cosiddette « differenze s-esime di 0^ν » (6).

(5) Cfr. [2], n. **2.2.**

(6) Com'è noto, abbiamo per definizione:

$$\Delta^s 0^\nu = \sum_0^s {}_r (-1)^{s-r} \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} r^\nu,$$

da cui segue la classica relazione ricorrente:

$$\Delta^s 0^\nu = s\,(\Delta^s 0^{\nu-1} + \Delta^{s-1} 0^{\nu-1}).$$

Dimostrazione.

Il secondo membro di (6), per $\nu = 0, 1, 2$, è uguale rispettivamente a:

$$\frac{\Delta\, 0^1}{1}\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\cdot 1 = 1 = n^0,$$

$$-\frac{\Delta\, 0^2}{1}\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\Delta^2\, 0^2}{2}\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{1}\cdot 1 + \frac{2}{2}(n+1) = n^1,$$

$$\frac{\Delta\, 0^3}{1}\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\Delta^2\, 0^3}{2}\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\Delta^3\, 0^3}{3}\begin{bmatrix} n+2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\cdot 1 - \frac{6}{2}(n+1) + \frac{6}{3}\,\frac{(n+2)(n+1)}{2} = n^2.$$

Si vede quindi che la (6) vale per $\nu = 0, 1, 2$.

Ragiono ora induttivamente: suppongo che la (6) valga per un certo $\nu > 2$. Si ha allora:

$$n^{\nu+1} = n \cdot n^\nu = n \sum_{0}^{\nu}{}_s (-1)^{\nu-s}\, \frac{\Delta^{s+1}\, 0^{\nu+1}}{s+1} \begin{bmatrix} n+s \\ s \end{bmatrix},$$

ed essendo $\dfrac{n}{s+1} = \dfrac{(n+s+1)-(s+1)}{s+1} = \dfrac{n+s+1}{s+1} - 1$, segue

$$n^{\nu+1} = \sum_{0}^{\nu}{}_s (-1)^{\nu-s} (\Delta^{s+1}\, 0^{\nu+1}) \begin{bmatrix} n+s+1 \\ s+1 \end{bmatrix} + \sum_{0}^{\nu}{}_s (-1)^{\nu-s+1} (\Delta^{s+1}\, 0^{\nu+1}) \begin{bmatrix} n+s \\ s \end{bmatrix},$$

od anche (eseguendo un semplice mutamento dell'indice di sommazione nella prima somma del secondo membro)

$$n^{\nu+1} = \sum_{1}^{\nu+1}{}_s (-1)^{\nu-s+1} (\Delta^s\, 0^{\nu+1}) \begin{bmatrix} n+s \\ s \end{bmatrix} + \sum_{0}^{\nu}{}_s (-1)^{\nu-s+1} (\Delta^{s+1}\, 0^{\nu+1}) \begin{bmatrix} n+s \\ s \end{bmatrix}.$$

Notando poi che è $\Delta^0\, 0^{\nu+1} = \Delta^{\nu+2}\, 0^{\nu+1} = 0$, si ha ancora

$$n^{\nu+1} = \sum_{0}^{\nu+1}{}_s (-1)^{\nu-s+1} (\Delta^s\, 0^{\nu+1} + \Delta^{s+1}\, 0^{\nu+1}) \begin{bmatrix} n+s \\ s \end{bmatrix},$$

e infine, applicando la formula finale di loc. cit. in [6],

$$n^{\nu+1} = \sum_{0}^{\nu+1}{}_s (-1)^{\nu-s+1} \frac{\Delta^{s+1}\, 0^{\nu+2}}{s+1} \begin{bmatrix} n+s \\ s \end{bmatrix},$$

che è proprio l'eguaglianza risultante da (6) cambiando ν in $\nu+1$. La (6), per il principio d'induzione, è quindi vera in generale.

2.3. - Un'espressione per i polinomi (4).

Scrivo la (6) nella forma

$$(6') \qquad n^{\nu} = \sum_{0}^{\nu}{}_s (-1)^{\nu-s} \frac{\Delta^{s+1}\, 0^{\nu+1}}{(s+1)!} (n+s)(n+s-1)\dots(n+1),$$

intendendo, naturalmente, che il termine del secondo membro per $s=0$ sia $(-1)^{\nu}\Delta 0^{\nu+1}$. Se questa (6′) si moltiplica per a_{n+r}, e l'uguaglianza così ottenuta si moltiplica, binomialmente n, per x^n [7], si ottiene [tenendo anche presente la osservazione fatta nell'annotazione [4]]:

$$(7) \qquad n^{\nu} a_{n+r} \overset{n}{:} x^n = \sum_{0}^{\nu}{}_s (-1)^{\nu-s} \frac{\Delta^{s+1}\, 0^{\nu+1}}{(s+1)!} \{(n+s)(n+s-1)\dots(n+1)\, a_{n+r} \overset{n}{:} x^n\},$$

dove il primo membro è esattamente il polinomio (4).

2.4. - Ultima parte della dimostrazione del lemma.

Il lemma del n 2.1 sarà quindi stabilito se dimostreremo che: *tutti i polinomi di* A p p e l l [figuranti fra graffe nel secondo membro di (7)]

$$(8) \qquad (n+s)(n+s-1)\dots(n+1)\, a_{n+r} \overset{n}{:} x^n \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

(*dove* s *è uno qualunque dei numeri* 0, 1, 2, ..., ν) *si possono esprimere linearmente con i polinomi di* A p p e l l (1).

D i m o s t r a z i o n e.

Se nei polinomi (8) di APPELL si muta la successione generatrice

$$(n+s)(n+s-1)\dots(n+1)\, a_{n+r} \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

cambiando n in $n-s$, s'ottengono i nuovi polinomi di APPELL

$$(9) \qquad n(n-1)\dots(n-s+1)\, a_{n+r-s} \overset{n}{:} x^n \qquad (n=0,1,2,\dots).$$

---

(7) Cfr. [2], n. **1.3.**

In base ad una precedente definizione di « polinomi-resto di APPELL » ([8]), possiamo ora dire che i polinomi (8) sono i polinomi-resto, di indice s, dei polinomi di APPELL (9). Quindi ([9]) i polinomi (8) si possono esprimere linearmente con i polinomi (9). Introducendo poi le successioni unitarie $\{\varepsilon_n\}$, $\{\varepsilon_{n-1}\}$, $\{\varepsilon_{n-2}\}$, ... ([10]), tali polinomi (9) si possono scrivere:

$$(9') \qquad s!\, \varepsilon_{n-s} \overset{n}{:} a_{n+r} \overset{n}{:} x^n ,$$

od anche ([11])

$$(9'') \qquad \frac{d^s}{dx^s} (a_{n+r} \overset{n}{:} x^n) .$$

I polinomi (9), essendo dunque le derivate s-esime dei polinomi

$$(10) \qquad a_{n+r} \overset{n}{:} x^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) ,$$

si possono esprimere linearmente mediante i polinomi (10) [cfr. la (5) precedente]. Ma i polinomi (10), essendo i polinomi-resto, di indice r, degli $A_n(x)$, a loro volta si possono ([12]) esprimere linearmente con gli $A_n(x)$. Se ne conclude, in definitiva, che i polinomi (8) si esprimono tutti linearmente mediante i polinomi $A_n(x)$. Il lemma è dunque dimostrato.

2.5. - Espressioni, mediante i polinomi $A_n(x)$, di alcuni particolari polinomi (4).

Per le applicazioni del § 3 sarà utile tenere presente le espressioni, mediante i polinomi $A_n(x)$, di alcuni particolari polinomi (4) di tipo semplice:

$$n\, a_n \overset{n}{:} x^n = n\, A_n(x) - n\, x\, A_{n-1}(x) ,$$

$$n\, a_{n+1} \overset{n}{:} x^n = n\, A_{n+1}(x) - 2\, n\, x\, A_n(x) + n\, x^2\, A_{n-1}(x) ,$$

$$n\, a_{n+2} \overset{n}{:} x^n = n\, A_{n+2}(x) - 3\, n\, x\, A_{n+1}(x) + 3\, n\, x^2\, A_n(x) - n\, x^3\, A_{n-1}(x) ,$$

$$n^2\, a_n \overset{n}{:} x^n = n^2\, A_n(x) - n(2n-1)\, x\, A_{n-1}(x) + n(n-1)\, x^2\, A_{n-2}(x) .$$

Queste affermazioni si deducono applicando la (9') precedente e la (16') di [2] ([13]), e poi eseguendo i semplici calcoli indicati.

([8]) Cfr. [2], n. 2.3.
([9]) Cfr. [2], n. 2.3.
([10]) Cfr. [2], n. 1.4.
([11]) Cfr. [2], n. 2.2.
([12]) Cfr. [2], n. 2.3.
([13]) O, più semplicemente, le espressioni dedotte da (16') di [2], alla fine del n. 2.3

§ 3. - Alcune applicazioni del metodo del § 1 nei casi particolari $s=1$, $s=2$.

3.1. - Alcune applicazioni nel caso $s = 1$.

La relazione ricorrente (2) sia, in particolare,

$$(11) \qquad (c_{0,0}\, n + c_{1,0})\, a_{n+1} + (c_{0,1}\, n + c_{1,1})\, a_n = 0 \,,$$

con $c_{0,0}$, $c_{1,0}$, $c_{0,1}$, $c_{1,1}$ date costanti.

Seguendo il metodo indicato nel § 1, da (11) si ottiene l'identità

$$(12) \qquad c_{0,0}\,(n\, a_{n+1} \overset{n}{:} x^n) + c_{1,0}\,(a_{n+1} \overset{n}{:} x^n) + c_{0,1}\,(n\, a_n \overset{n}{:} x^n) + c_{1,1}\,(a_n \overset{n}{:} x^n) = 0 \,.$$

Applicando qui le affermazioni del n. 2.5, e quelle poste alla fine del n. 2.3 di [2], la (12) diventa

$$(13) \qquad c_{0,0}\, n\,[A_{n+1}(x) - 2\, x\, A_n(x) + x^2\, A_{n-1}(x)] + c_{1,0}\,[A_{n+1}(x) - x\, A_n(x)] +$$
$$+ c_{0,1}\, n\,[A_n(x) - x\, A_{n-1}(x)] + c_{1,1}\, A_n(x) = 0 \,,$$

ossia (mutando n in $n-1$ e ordinando opportunamente i termini)

$$(13') \qquad [c_{0,0}\,(n-1) + c_{1,0}]A_n(x) - [2\, c_{0,0}\,(n-1)\, x + c_{1,0}\, x - c_{0,1}\,(n-1) - c_{1,1}]A_{n-1}(x) +$$
$$+ [c_{0,0}\,(n-1)\, x^2 - c_{0,1}\,(n-1)\, x]A_{n-2}(x) = 0 \,,$$

che è la relazione ricorrente lineare (di ordine 2) fra i polinomi di APPELL di successione generatrice verificante la (11).

Ricordando poi (5), da (13') segue la corrispondente relazione differenziale lineare (di ordine 2) fra gli stessi polinomi $A_n(x)$:

$$(14) \qquad (c_{0,0}\, x^2 - c_{0,1}\, x)A_n''(x) - [2\, c_{0,0}\,(n-1)\, x + c_{1,0}\, x - c_{0,1}(n-1) - c_{1,1}]A_n'(x) +$$
$$+ n\,[c_{0,0}\,(n-1) + c_{1,0}]A_n(x) = 0 \,.$$

Esempi. 1) Si ha, manifestamente,

$$(15) \qquad (n+1)! - (n+1) \cdot n! = 0 \,,$$

relazione della forma (11) per la successione $a_n = n!$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (essendo ora $c_{0,0} = 0$, $c_{1,0} = 1$, $c_{0,1} = c_{1,1} = -1$). La (13′) diventa allora

$$A_n(x) - (x + n)\, A_{n-1}(x) + (n - 1)\, x\, A_{n-2}(x) = 0\,,$$

che è la relazione ricorrente lineare, corrispondente alla (15), verificata dai polinomi di APPELL $A_n(x) = n! \overset{n}{\cdot} x^n$. La (14) diventa invece

$$x\, A_n''(x) - (x + n)\, A_n'(x) + n\, A_n(x) = 0\,,$$

che è la relazione differenziale lineare, corrispondente alla (15), verificata da tali polinomi $A_n(x) = n! \overset{n}{\cdot} x^n$ (14).

2) La relazione ricorrente (11) sia ora

$$(n + 1)\, a_{n+1} - a_n = 0\,,$$

che è soddisfatta da $a_n = 1/n!$. In corrispondenza i polinomi di APPELL $A_n(x) = (1/n!) \overset{n}{\cdot} x^n$ soddisfano alle relazioni lineari

$$n\, A_n(x) - [(2n - 1)\, x + 1]\, A_{n-1}(x) + (n - 1)\, x^2 A_{n-2}(x) = 0,$$

$$x^2 A_n''(x) - [(2n - 1)\, x + 1] A_n'(x) + n^2 A_n(x) = 0.$$

3.2. - Alcune applicazioni nel caso $s = 2$.

La relazione (2) sia ora la seguente

$$(c_{0,0}\, n + c_{1,0})\, a_{n+2} + (c_{0,1}\, n + c_{1,1})\, a_{n+1} + (c_{0,2}\, n + c_{1,2})\, a_n = 0\,, \tag{16}$$

con $c_{0,0}$, $c_{1,0}$, $c_{0,1}$, $c_{1,1}$, $c_{0,2}$, $c_{1,2}$ date costanti. Seguendo sempre il metodo del § 1, da (16) si ottiene l'identità

$$\sum_0^2{}_k \sum_0^1{}_h\, c_{h,k}\, (n^{1-h}\, a_{n+2-k} \overset{n}{\cdot} x^n) = 0\,, \tag{17}$$

(14) Su questo esempio cfr. [1], pp. 127-128.

dalla quale seguono, per i polinomi $A_n(x) = a_n \overset{n}{\cdot} x^n$, le relazioni lineari

$$(18) \quad \begin{cases} [c_{0,0}(n-2) + c_{1,0}]A_n(x) - \\ -[3c_{0,0}(n-2)x + 2c_{1,0}x - c_{0,1}(n-2) - c_{1,1}]A_{n-1}(x) + \\ +[3\,c_{0,0}(n-2)x^2 + c_{1,0}x^2 - 2\,c_{0,1}(n-2)x - c_{1,1}x + c_{0,2}(n-2) + \\ \qquad\qquad + c_{1,2}]A_{n-2}(x) - \\ -(n-2)\,x\,[c_{0,0}x^2 - c_{0,1}x + c_{0,2}]\,A_{n-3}(x) = 0\,, \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} x\,(c_{0,0}x^2 - c_{0,1}x + c_{0,2})A_n'''(x) - \\ -[3\,c_{0,0}(n-2)x^2 + c_{1,0}x^2 - 2\,c_{0,1}(n-2)x - c_{1,1}x + c_{0,2}(n-2) + \\ \qquad\qquad + c_{1,2}]A_n''(x) + \\ +(n-1)\,[3\,c_{0,0}(n-2)x + 2\,c_{1,0}x - c_{0,1}(n-2) - c_{1,1}]\,A_n'(x) - \\ -n\,(n-1)\,[c_{0,0}(n-2) + c_{1,0}]A_n(x) = 0\,. \end{cases}$$

E s e m p i. 1) Consideriamo la relazione ricorrente [della forma (16)]

$$(20) \qquad a_{n+2} + 2(n+1)\,a_n = 0\,,$$

soddisfatta dalla successione $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{2!}{1!}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{4!}{2!}$, $a_5 = 0$, $a_6 = -\frac{6!}{3!}, \ldots$ (che è, precisamente, la successione dei coefficienti della serie di potenze di e^{-x^2}) ([15]). Procedendo come si è indicato al principio di questo n., si ottengono per i corrispondenti polinomi di APPELL $A_n(x) = a_n \overset{n}{\cdot} x^n$ ([16]) le relazioni lineari:

$$A_n(x) - 2x\,A_{n-1}(x) + (x^2 + 2n - 2)\,A_{n-2}(x) - 2(n-2)\,x\,A_{n-3}(x) = 0,$$

$$2x\,A_n'''(x) - (x^2 + 2n - 2)\,A_n''(x) + 2(n-1)\,x\,A_n'(x) - n\,(n-1)\,A_n(x) = 0.$$

Si può notare che, se invece che dalla relazione (20) si parte dalla equivalente relazione ricorrente

$$(20') \qquad a_{n+1} + 2n\,a_{n-1} = 0\,,$$

([15]) Il termine generale di questa successione è $a_n = (-1)^{[n/2]}\,\frac{1^n + (-1)^n}{2}\,\frac{n!}{[n/2]!}$, dove con $[n/2]$ si indica la « parte intera di $n/2$ ».

([16]) Si può notare che questi polinomi col cambiamento di x in $-2x$ diventano i cosiddetti « polinomi di HERMITE ».

si ottengono le relazioni lineari (più semplici delle precedenti):

$$A_n(x) - x\, A_{n-1}(x) + 2(n-1)\, A_{n-2}(x) = 0\ ,$$

$$2A_n''(x) - x\, A_n'(x) + n\, A_n(x) = 0\ \text{(17)}.$$

2) Si abbia la relazione ricorrente [della forma (16)]

$$(4n+3)\, a_{n+2} - 4(n+3)\, a_{n+1} + a_n = 0\ ,$$

soddisfatta da $a_n \equiv n^2$. Si trova che i polinomi di Appell $A_n(x) = n^2 \overset{n}{:} x^n$ soddisfano alle relazioni lineari:

$$(4n-5)\, A_n(x) - 2\,[3x\,(2n-3) + 2(n+1)]\, A_{n-1}(x) +$$
$$+[3x^2\,(4n-7) + 4x\,(2n-1) + 1]\, A_{n-2}(x) - 4x^2\,(x+1)\,(n-2)\, A_{n-3}(x) = 0,$$

$$4x^2\,(x+1)\, A_n'''(x) - [3x^2\,(4n-7) + 4x\,(2n-1) + 1]\, A_n''(x) +$$
$$+ 2(n-1)\,[3x\,(2n-3) + 2(n+1)]\, A_n'(x) - n\,(n-1)\,(4n-5)\, A_n(x) = 0\ .$$

(17) Su queste relazioni cfr. [1], pp. 128-129.

Bibliografia.

[1] P. Appell, *Sur une classe de polynomes.* Ann. École Norm. Sup. (Paris) (2) 9 (1880), 119-144.

[2] C. Scaravelli, *Su i polinomi di Appell.* Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 95-108.

Per altri riferimenti bibliografici cfr. [2], § 3.

Sommario.

Indico qui un metodo elementare per ottenere equazioni ricorrenti lineari ed equazioni differenziali lineari alle quali soddisfano i polinomi di Appell $a_n \overset{n}{:} x^n$. *Il metodo si basa sulla possibilità di esprimere linearmente i polinomi di Appell* $n^\nu a_{n+r} \overset{n}{:} x^n$ *mediante i polinomi di Appell* $a_n \overset{n}{:} x^n$.

Il lavoro termina con alcune semplici applicazioni.

Summary.

I give here an elementary method to obtain linear recurring equations and linear differential equations satisfied by the Appell polynomials $a_n \overset{n}{:} x^n$. *The method is based on the possibility of expanding the Appell polynomials* $n^\nu a_{n+r} \overset{n}{:} x^n$ *as linear combinations of the Appell polynomials* $a_n \overset{n}{:} x^n$.

The paper ends with some simple applications.

* * *