

ANTONIO CARLO GARIBALDI (*)

Soluzioni sottoarmoniche

di una classe di equazioni differenziali del terzo ordine. (**)

§ 1. - Introduzione.

1. - In questo lavoro proseguo lo studio, iniziato in [1] ⁽¹⁾, di una classe di equazioni differenziali, debolmente non lineari, di terzo ordine, della forma:

$$\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = e(t),$$

supponendo la non linearità di tipo cubico, per cui cioè:

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = a\ddot{x} + b\dot{x} + cx + \left(a' \frac{d^2}{dt^2} + b' \frac{d}{dt} + c'\right)(x^3/3),$$

mentre ritengo $e(t)$ periodica ed ε inferiore ad ε_0 fissato.

In [1] ho studiato il caso in cui il periodo T della $e(t)$ sia approssimativamente eguale a 2π , a meno di termini dell'ordine di ε ; ciò significa che, in questo ordine di approssimazione, il periodo delle vibrazioni proprie del sistema retto dall'equazione omogenea per $\varepsilon = 0$, convenientemente normalizzato al valore 2π , è eguale al periodo della forza esterna $e(t)$.

Ora intendo affrontare il più complesso caso della *risonanza sottoarmonica*, in cui si suppone che il rapporto tra T e 2π sia un intero $n > 1$, sempre a meno

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Genova, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 41 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R. — Ricevuto: 20-XI-1966.

⁽¹⁾ I numeri in [] si riferiscono alla Bibliografia finale.

di termini piccoli in ε . Precisamente considero l'equazione:

$$(1.1) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[a \ddot{x} + b \dot{x} + c x + \left(a' \frac{d^2}{dt^2} + b' \frac{d}{dt} + c' \right) (x^3/3) \right] = E \cos(n \omega t),$$

con $1 - \omega = \sigma \varepsilon$, essendo σ un numero reale, a priori variabile tra $-\infty$ e $+\infty$, che vien detto « detuning ».

2. - Impostiamo anzitutto, richiamando brevemente le nozioni necessarie, il metodo di approssimazione che è lo strumento essenziale per lo studio della (1.1). Eseguiamo preliminarmente la trasformazione $t' = \omega t$, per cui la nostra equazione diventa:

$$(2.1) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[a \ddot{x} + (2\sigma + b) \dot{x} + c x + \left(a' \frac{d^2}{dt^2} + b' \frac{d}{dt} + c' \right) (x^3/3) \right] = \\ = \bar{E} \cos(n t) + \varepsilon^2 O(\sigma).$$

Ciò permette di scrivere la soluzione generatrice, ottenuta facendo $\varepsilon = 0$, nella forma:

$$x_0(t) = z + r \sin(t + \varphi) + E_0 \sin(n t), \quad E_0 = [n(1 - n^2)]^{-1} E,$$

in cui risulta $x_0(t)$ periodica di periodo 2π .

Notiamo subito che non ci interesserà nel seguito la forma esplicita del termine $O(\sigma)$, a motivo del suo ordine di grandezza. Abbiamo chiamato per comodità ancora t la nuova variabile temporale.

Si cercano ora soluzioni di (2.1) sotto la forma:

$$(2.2) \quad x(t) = x_0(t) + \varepsilon X(t) + \varepsilon^2 Y(t),$$

con le condizioni iniziali $X(0) = \dot{X}(0) = \ddot{X}(0) = Y(0) = \dot{Y}(0) = \ddot{Y}(0) = 0$.

In questo modo la $x(t)$ dipende soltanto dalla scelta delle costanti z , r , φ che figurano nella soluzione generatrice $x_0(t)$.

L'estensione di un noto lemma di CARTWRIGHT [2] conduce, analogamente a quanto ho fatto in [1], a dimostrare che, per ε minore di un opportuno ε_0 , che il procedimento consente di determinare, la funzione incognita $Y(t)$ risulta limitata insieme con la sua derivata prima e seconda per $0 \leq t \leq 3\pi$; quindi

risulta valido in queste ipotesi lo sviluppo fondamentale:

$$(2.3) \quad x(t) = z + r \sin(t + \varphi) + E_0 \sin(n t) + \varepsilon X(t) + O(\varepsilon^2) \quad (^2).$$

Diremo *soluzione sottoarmonica d'ordine n* di (2.1) una soluzione del tipo (2.3) che risulti periodica di periodo 2π a meno di termini in ε^2 . La denominazione si giustifica osservando che nella (2.1) il periodo 2π della vibrazione propria è multiplo secondo n del periodo della forza esterna. È ovvio che si avranno sottoarmoniche solo scegliendo opportunamente le grandezze z , r , φ per modo che $X(t)$ risulti periodica di periodo 2π . Ciò non avviene in generale perchè la equazione cui deve soddisfare $X(t)$ è:

$$\ddot{X} + \dot{X} + a \ddot{x}_0 + (2\sigma + b)\dot{x}_0 + c x_0 + \left(a' \frac{d^2}{dt^2} + b' \frac{d}{dt} + c' \right) (x_0^3/3) = 0$$

ovvero, tenendo conto del valore di $x_0(t)$,

$$(2.4) \quad \ddot{X} + \dot{X} + \lambda_0 + \lambda_1 \sin t + \lambda_2 \cos t + \sum_{k \geq 2} [\mu_k \sin(kt) + \nu_k \cos(kt)].$$

Solo quando λ_0 , λ_1 , λ_2 , che dipendono ovviamente da z , r , φ , sono tutte e tre nulle la $X(t)$ sarà periodica.

Volendo studiare a fondo le sottoarmoniche anche in rapporto alla loro stabilità, occorre confrontarle con soluzioni non periodiche; conviene perciò considerare le soluzioni generiche del tipo (2.3) associandole ad una opportuna trasformazione funzionale [2]. Si ha ovviamente:

$$x(0) = z + r \sin \varphi, \quad \dot{x}(0) = r \cos \varphi + n E_0, \quad \ddot{x}(0) = -r \sin \varphi.$$

Essendo $x(2\pi)$, $\dot{x}(2\pi)$, $\ddot{x}(2\pi)$ delle costanti è opportuno a questo punto introdurre tre costanti z' , r' , φ' definite attraverso le posizioni seguenti:

$$x(2\pi) = z' + r' \sin \varphi', \quad \dot{x}(2\pi) = r' \cos \varphi' + n E_0, \quad \ddot{x}(2\pi) = -r' \sin \varphi'.$$

Le quantità z' , r' , φ' appaiono allora chiaramente come trasformate delle z , r , φ dopo un periodo 2π , ottenute tramite l'equazione differenziale (2.1) se-

(²) Lo stesso lemma stabilisce che la soluzione $X(t)$ con $X(0) = \dot{X}(0) = \ddot{X}(0) = 0$, e quindi la $x(t)$, è definita in $(0, 3\pi)$. Essendo la (2.1) periodica, segue che le sue soluzioni sono definite in $[0, +\infty]$.

guendone le soluzioni; naturalmente se fosse $\varepsilon = 0$ le z' , r' , φ' coinciderebbero con z , r , φ . Se si tiene ora conto di (2.3) e di (2.4), un facile calcolo dà lo sviluppo:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{z' - z}{\pi\varepsilon} = Z(z, r, \varphi) + O(\varepsilon) = -2\lambda_0 + O(\varepsilon) \\ \frac{r' - r}{\pi\varepsilon} = R(z, r, \varphi) + O(\varepsilon) = \lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi + O(\varepsilon) \\ \frac{\varphi' - \varphi}{\pi\varepsilon} = \Phi(z, r, \varphi) + O(\varepsilon) = 2\sigma + \frac{1}{r}(\lambda_2 \cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi) + O(\varepsilon). \end{cases}$$

Esso mostra che le sottoarmoniche prima definite sono le soluzioni per cui risulta $z' = z + O(\varepsilon^2)$, $r' = r + O(\varepsilon^2)$, $\varphi' = \varphi + O(\varepsilon^2)$. Ciò significa che nella trasformazione che muta (z, r, φ) in (z', r', φ') le sottoarmoniche corrispondono ai punti uniti a meno di $O(\varepsilon^2)$.

3. - È usuale trasformare il sistema alle differenze (2.5) in un sistema differenziale introducendo una variabile ausiliaria τ e ponendo:

$$d\tau = \pi\varepsilon, \quad dz = z' - z, \quad dr = r' - r, \quad d\varphi = \varphi' - \varphi.$$

Si osserva allora che il vettore di componenti (in coordinate cilindriche) $z' - z$, $r' - r$, $\varphi' - \varphi$ è approssimativamente tangente in ogni punto alle linee soluzioni del sistema:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = Z(z, r, \varphi) \\ \frac{dr}{d\tau} = R(z, r, \varphi) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \Phi(z, r, \varphi) \end{cases}$$

che diremo sistema di ANDRONOV e WITT associato all'equazione (2.1). Si può anche dire che se si parte da un punto (z, r, φ) la successione dei suoi trasformati dopo 1, 2, 3, ... periodi è approssimata dalla curva soluzione di (3.1) che passa per (z, r, φ) .

Le sottoarmoniche appaiono ora come i punti singolari del sistema autonomo (3.1), che può studiarsi con la teoria classica di POINCARÉ [3]. Naturalmente anche le soluzioni di (2.5) non periodiche sono approximate dal sistema (3.1). In definitiva si è ridotto lo studio della equazione (2.1), in cui compare esplicitamente il tempo, allo studio di un sistema autonomo in tre variabili, in generale fortemente non lineare in quanto nei secondi membri di (3.1) non figura il parametro di piccola non linearità ε .

Esplicitiamo il calcolo di Z , R , Φ anzitutto per le sottoarmoniche d'ordine tre; si trova così il sistema:

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= -2z \left[c + c' \left(\frac{r^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{E_0^2}{2} \right) \right] \\ \frac{dr}{d\tau} &= r \left[c - a + (c' - a') \left(z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{E_0^2}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c' - a'}{4} r E_0 \cos(3\varphi) - \frac{b'}{4} r E_0 \sin(3\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= 2\sigma + b + b' \left(z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{E_0^2}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{c' - a'}{4} r E_0 \sin(3\varphi) - \frac{b'}{4} r E_0 \cos(3\varphi). \end{aligned} \right.$$

Invece per le sottoarmoniche d'ordine $n > 3$ otteniamo il sistema:

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= -2z \left[c + c' \left(\frac{z^2}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{E_0^2}{2} \right) \right] \\ \frac{dr}{d\tau} &= r \left[c - a + (c' - a') \left(z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{E_0^2}{2} \right) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= 2\sigma + b + b' \left(z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{E_0^2}{2} \right) \end{aligned} \right.$$

che non contiene più la variabile φ .

Infine per le sottoarmoniche d'ordine 2 si ha il sistema:

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= -2z \left[c + c' \left(\frac{z^2}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{E_0^2}{2} \right) \right] - \frac{c'}{2} r^2 E_0 \sin(2\varphi) \\ \frac{dr}{d\tau} &= r \left[c - a + (c' - a') \left(z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{E_0^2}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (c' - a') z E_0 \sin(2\varphi) - b' z E_0 \cos(2\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= 2\sigma + b + (c' - a') z E_0 \cos(2\varphi) + \\ &\quad + b' \left(z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{E_0^2}{2} \right) + b' z E_0 \sin(2\varphi). \end{aligned} \right.$$

Notiamo subito che in ogni caso questi sistemi hanno sempre come punto singolare l'origine che, avendo scelto coordinate cilindriche, è rappresentata da $z = 0$, $r = 0$ e φ qualunque. Questo punto singolare corrisponde alla soluzione generatrice

$$x(t) = E_0 \sin(n t) + \varepsilon X(t) + O(\varepsilon^2),$$

che risulta periodica di periodo $2\pi/n$, a meno di termini in ε^2 . Essa ha dunque lo stesso periodo della forza esterna $e(t)$ e viene perciò detta soluzione *armonica* (o *eteroperiodica*, secondo MINORSKY [4]). Come vedremo, essa è la sola vibrazione possibile per il sistema quando il « detuning » σ sia abbastanza grande.

Sulle differenze tra i vari sistemi che si presentano e sul significato delle soluzioni ottenute ci tratteremo diffusamente nei paragrafi successivi.

4. - Già in [1] ho indicato alcuni sistemi il cui comportamento è retto da equazioni del tipo (1.1). Precisamente ho ricordato alcuni circuiti elettrici, introdotti da FRIEDRICH [5], L. L. RAUCH [6] e G. COLOMBO [7], contenenti dei tubi a caratteristiche non lineari (triodi o pentodi). Sotto convenienti ipotesi per i parametri che vi intervengono essi portavano a considerare le equazioni:

$$(4.1) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[\left(a \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{x^3}{3} - x \right) + 2\sigma \dot{x} + c x \right] = e(t), \quad a > 0, c > 0,$$

$$(4.2) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[\left(\alpha \frac{d^2}{dt^2} + \beta \right) \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + 2\sigma \dot{x} \right] = e(t), \quad \alpha > \beta > 0.$$

Inoltre ho sviluppato un problema meccanico, ispirato al ROCARD [8], che lo tratta nel campo lineare, retto dall'equazione

$$(4.3) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[\left(\alpha \frac{d^2}{dt^2} + \beta \right) \left(\frac{x^3}{3} - x \right) + 2\sigma \dot{x} \right] = e(t) \quad \alpha > \beta > 0.$$

È interessante sottolineare il significato della condizione $\alpha > \beta$, che deriva dalle relazioni tra le grandezze meccaniche introdotte: se supponessimo $\alpha < \beta$ troveremmo per il sistema solo dei regimi instabili, in pieno disaccordo con la realtà fisica di un sistema oscillante.

La costruzione di plausibili esempi di sistemi elettrici o meccanici retti da equazioni del tipo (1.1), anche a parte la realizzabilità a fini sperimentali concreti, appare dunque necessaria per eliminare dalla ricerca matematica i casi che non presentano interesse concreto, semplificando l'analisi dei parametri che

intervengono numerosi. Per questo ritengo utile indicare un nuovo semplice schema meccanico in cui si inquadrano tutte le equazioni precedentemente introdotte.

5. - Consideriamo un sistema lagrangiano in due gradi di libertà. Indicando con q_1 , q_2 le sue coordinate libere, supporremo che l'energia cinetica presenti la forma

$$T = \frac{1}{2} \{ (\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 \}.$$

Supponiamo ora che vi sia accoppiamento giroscopico lineare ⁽³⁾, in modo che le equazioni del moto risultino:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \Omega \dot{q}_2 = Q_1 \\ \ddot{q}_2 - \Omega \dot{q}_1 = Q_2, \end{cases}$$

dove il coefficiente di accoppiamento Ω può suporsi senza restrizione positivo, e Q_1 , Q_2 sono le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva secondo q_1 e q_2 . Si abbia ora:

$$\begin{cases} Q_1 = \varphi(q_1) = -\varepsilon \left[\alpha q_1 + \frac{\beta}{3} (q_1)^3 \right] \\ Q_2 = -k^2 q_2 - \varepsilon \gamma \dot{q}_2 + e(t) \end{cases} \quad (\beta > 0, \gamma > 0).$$

In queste ipotesi su q_1 agisce soltanto una resistenza non-lineare di tipo cubico, il cui ordine di grandezza è piccolo in confronto alle forze attive: si è perciò introdotto, come d'uso, il parametro ε ; su q_2 agisce invece una forza di richiamo, lineare, una debole resistenza viscosa e la sollecitazione esterna (periodica, come supporremo nel seguito, anzi sinusoidale). Allora per la variabile $\xi = \dot{q}_1$ si arriva all'equazione:

$$(5.1) \quad \ddot{\xi} + (\Omega^2 + k^2) \xi - \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \varphi(\xi) - k^2 \varepsilon \varphi(\xi) + \varepsilon \gamma \ddot{\xi} - \varepsilon^2 \gamma \frac{d}{dt} \varphi(\xi) = -\Omega e(t).$$

⁽³⁾ Per questa nozione confronta [8], pag. 129 e seguenti.

Se invece si suppone

$$\begin{cases} Q_1 = \varepsilon \varphi(q_1) - k^2 q_1 \\ Q_2 = e(t) - \varepsilon \gamma q_2, \end{cases}$$

cioè si trasferisce semplicemente il termine di richiamo da un grado di libertà all'altro, si ottiene ancora per $\xi = q_1$ la nuova equazione:

$$(5.2) \quad \ddot{\xi} + (\Omega^2 + k^2) \dot{\xi} - \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \varphi(\xi) + \varepsilon \gamma \ddot{\xi} + \varepsilon \gamma k^2 \dot{\xi} - \varepsilon^2 \gamma \frac{d}{dt} \varphi(\xi) = -\Omega \dot{e}(t).$$

Finora non abbiamo fatto ipotesi sul coefficiente α della resistenza: se lo si suppone positivo si ha una resistenza non lineare di tipo tradizionale, o completamente dissipativo; in caso contrario la resistenza dà dissipazione per grandi valori di q_1 , come deve essere per irrinunciabili ragioni fisiche, mentre per piccoli valori di q_1 esalta il movimento. Questo è il meccanismo ormai ben noto dei regimi non lineari autooscillanti, per cui ricordiamo, ad esempio, il pendolo di FROUDE [9] ed il pattino su cinghia scabra [10].

Va osservato che con un cambio di incognita, consistente nel moltiplicare la ξ per una opportuna costante, si riduce la resistenza alla forma $\varepsilon(1 \pm \eta^2)\eta$. È ora facile vedere che dalla (5.1) si arriva alle (4.2) o (4.3) a seconda del tipo di resistenza considerato. Naturalmente si trascurano termini $O(\varepsilon^2)$. Invece da (5.2) per resistenza autooscillante, sempre trascurando termini $O(\varepsilon^2)$, si arriva a (4.1) con $b = 0$.

6. - La ricerca che intendo ora sviluppare è dedicata essenzialmente alle tre equazioni seguenti:

$$(A) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[\left(\alpha \frac{d^2}{dt^2} + \beta \right) (x^3/3 + x) + 2 \sigma \dot{x} \right] = e(t), \quad \alpha > \beta > 0,$$

$$(B) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[a \frac{d^2}{dt^2} (x^3/3 - x) + 2 \sigma \dot{x} + c x \right] = e(t), \quad a > 0, \quad c > 0,$$

$$(C) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left[\left(\alpha \frac{d^2}{dt^2} + \beta \right) (x^3/3 - x) + 2 \sigma \dot{x} \right] = e(t), \quad \alpha > \beta > 0,$$

sostanzialmente le stesse di [1], perchè esse sono rappresentative dei casi e delle difficoltà del problema. Una discussione con un più vasto numero di parametri sarebbe una inutile complicazione: l'unico fenomeno nuovo che comparirebbe è l'effetto di « distorsione » delle curve relative alle soluzioni periodiche (ad esempio i cerchi del n. 7 diventerebbero ellissi) già considerato in [1] studiando la equazione (4.1) con $b \neq 0$.

L'equazione (A) non ha soluzioni sottoarmoniche di nessun ordine, come si vede considerando i relativi sistemi di ANDRONOV e WITT: la vibrazione armonica è sempre stabile e tutte le soluzioni tendono ad essa.

Invece le equazioni (B) e (C) ammettono molte sottoarmoniche, ma la differenza tra esse consiste nel fatto che mentre (B) riproduce esattamente il comportamento dell'oscillatore di VAN DER POL, altrettanto non avviene per (C) che ha una maggior varietà di soluzioni. Infatti, il sistema di ANDRONOV e WITT relativo a (B), nelle tre variabili z , r , φ , si riduce subito ad un sistema limite piano con $z = 0$, in quanto si prova subito che $z \rightarrow 0$ per $\tau \rightarrow \infty$. Questo sistema limite è anzi, in pratica, quello di VAN DER POL: ne indico tuttavia lo studio estesamente, sia per poter fare il confronto con i risultati per (C), sia perchè non mi è risultato facile trovare una esposizione elementare dei risultati relativi alle sottoarmoniche della equazione di VAN DER POL. Per quanto riguarda la equazione (C), il sistema di A.-W. ad essa associato si presenta ora in tre variabili z , r , φ senza possibilità di semplificazioni.

Sia (B) che (C) appaiono come generalizzazioni al 3° ordine della equazione di VAN DER POL: se si fa in (B) $\epsilon \rightarrow 0$ ed in (C) $\beta \rightarrow 0$ e si integra rispetto al tempo, si ottiene appunto la classica equazione di 2° ordine introdotta da VAN DER POL. Le due generalizzazioni sono evidentemente molto diverse tra loro, in base a quanto sopra esposto.

Si presentano per $n > 3$ dei casi critici in cui il metodo non dà risultati esaurienti per due ragioni: i) non isola completamente le soluzioni sottoarmoniche, lasciandone indeterminata la fase φ ; ii) non permette di concludere sulla stabilità delle ∞^1 soluzioni così introdotte, in quanto uno degli esponenti caratteristici risulta nullo nell'ordine di approssimazione considerato. Lo studio accurato di tali casi è condotto nella seconda parte del presente lavoro. Ciò esige naturalmente metodi più raffinati. Parimenti si considera il caso, anch'esso critico, in cui $n = 3$ e la forza esterna è però anch'essa $O(\epsilon)$. Quest'ultimo caso è stato affrontato per l'equazione di VAN DER POL da alcuni autori [12], [13]: risultati di questo tipo sono presentati per le nostre equazioni del 3° ordine; essi contengono come caso particolare al limite i risultati che abbiamo ricordato.

§ 2. - Sottoarmoniche d'ordine 3: caso generale.

7. - Per quanto riguarda l'equazione (A) il sistema di ANDRONOV e WITT è ora:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2\beta z \left[1 + \frac{E_0^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{r^2}{2} \right] \\ \frac{dr}{d\tau} = -(\alpha - \beta)r \left[1 + \frac{E_0^2}{2} + z^2 + \frac{r^2}{4} - \frac{rE_0}{4} \cos(3\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - \frac{\alpha - \beta}{4} r E_0 \sin(3\varphi). \end{cases}$$

Esso mostra facilmente che l'unico punto singolare è l'origine, che risulta stabile a causa della condizione $\alpha > \beta$ che abbiamo sottolineato nell'introduzione. Ciò accade per qualsiasi valore della forza esterna E ; in pratica, dunque, questo sistema ha una oscillazione armonica stabile e nessuna sottoarmonica.

Passiamo ora allo studio dell'equazione (B); il sistema di ANDRONOV e WITT associato ad essa risulta:

$$(7.1) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2cz \\ \frac{dr}{d\tau} = r \left[c + a - a \left(z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{E_0^2}{2} \right) + \frac{ar}{4} E_0 \cos(3\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - \frac{ar}{4} E_0 \sin(3\varphi). \end{cases}$$

Come abbiamo già osservato, dalla prima equazione risulta $z(\tau) \rightarrow 0$ per $\tau \rightarrow \infty$; ci si riduce quindi per lo studio dei punti singolari al sistema limite:

$$(7.2) \quad \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = r \left[c + a - a \frac{E_0^2}{2} - a \frac{r^2}{4} + \frac{ar}{4} E_0 \cos(3\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - \frac{ar}{4} E_0 \sin(3\varphi). \end{cases}$$

Anzitutto, si ha come punto singolare l'origine, che è stabile se $E_0^2 > \frac{2(c+a)}{a}$, instabile se $E_0^2 < \frac{2(c+a)}{a}$; inoltre possono aversi altri punti singolari per cui

risultati:

$$(7.3) \quad \begin{cases} \frac{a r}{4} E_0 \cos(3 \varphi) = a \frac{E_0^2}{2} - (c + a) + \frac{a r^2}{4} \\ \frac{a r}{4} E_0 \sin(3 \varphi) = 2 \sigma. \end{cases}$$

Questo comporta che r deve verificare l'equazione

$$(7.3') \quad \left(c + a - a \frac{E_0^2}{2} - \frac{a r^2}{4} \right)^2 + 4 \sigma^2 = \frac{a^2 E_0^2}{16} r^2,$$

per il cui studio poniamo:

$$\xi = \frac{2 \sigma}{c + a}, \quad \eta = \frac{a r^2}{4(c + a)}, \quad F = \frac{a E_0^2}{4(c + a)}.$$

In tal modo l'equazione diventa:

$$(7.4) \quad \xi^2 + \eta^2 + (3F - 2) \eta + (1 - 2F)^2 = 0.$$

Essa rappresenta nel piano ξ, η una famiglia di cerchi di parametro F : essi sono reali per $0 \leq F \leq 4/7$, simmetrici rispetto all'asse η e non intersecano mai l'asse ξ . Per $F = 0$ il cerchio si riduce al punto $(0,1)$ e per $F = 4/7$ al punto $(0, 1/7)$. Le rette parallele ad η intersecano i cerchi in due punti se

$$\xi^2 < F \cdot \left(1 - \frac{7}{4} F \right).$$

Si conclude quindi che se F e ξ verificano le limitazioni suesposte, il sistema (7.2) ammette sei punti singolari: infatti ad ognuno dei due valori di r soluzioni della (7.3') bisogna associare i tre valori di φ forniti dalle (7.3).

Per la stabilità si ha l'equazione caratteristica:

$$\mu^2 - A_1 \mu + A_2 = 0,$$

con

$$A_1 = 2(c + a) - a E_0^2 - a r^2, \quad A_2 = -3 \left[4 \sigma^2 + \left(c + a - a \frac{E_0^2}{2} \right)^2 - \frac{a^2 r^4}{16} \right].$$

Le condizioni di stabilità sono pertanto:

$$\eta > \frac{1}{2} - F, \quad \xi^2 - \eta^2 + (1 - 2F)^2 < 0.$$

Riferendoci alla Figura 1, le soluzioni stabili sono quelle che corrispondono ai punti della metà superiore del cerchio: infatti è subito visto che la seconda condizione assorbe la prima; ci si riduce quindi a cercare punti che stiano sopra il ramo di iperbole di equazione

$$\xi^2 - \eta^2 + (1 - 2F)^2 = 0,$$

contenuto nel semipiano $\eta > 0$. Poichè questa iperbole taglia il cerchio secondo il diametro orizzontale, si ottiene il risultato. I punti singolari si presentano così a coppie, in cui è stabile il punto con r più grande. Le tre coppie sono composte di punti che presentano simmetria ternaria, in quanto si passa da uno all'altro aumentando l'argomento φ di $2\pi/3$.

È immediato notare a questo punto che i risultati trovati valgono per il sistema in tre variabili z, r, φ di partenza, essendovi stabilità rispetto a z per ogni soluzione.

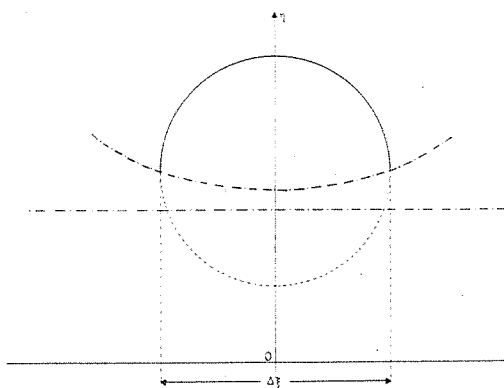


Fig. 1.

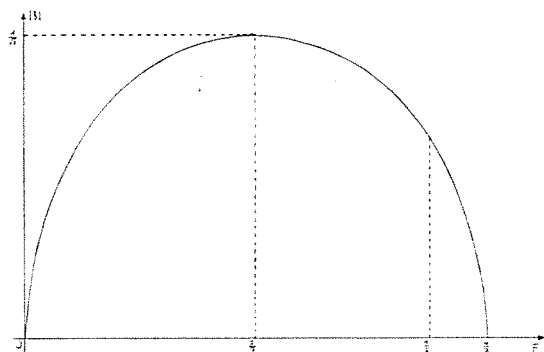


Fig. 2.

Si può studiare anche la possibilità di cicli limite. Intanto è ovvio che essi stanno tutti nel piano $z = 0$ e quindi anche in questo caso basta studiare il sistema limite (7.2). Se si considera allora questo sistema come quello che definisce nel piano un campo di vettori $\underline{w}$ di cui $dr/d\tau$ dà la componente radiale e $r \cdot d\varphi/d\tau$ la componente trasversa, si ha subito:

$$\operatorname{div} \underline{w} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (w_\varphi) \right] = 2(c + a) - aE_0^2 - a r^2.$$

Ora se $F > \frac{1}{2}$, risulta $\operatorname{div} w < 0$ in tutto il piano; ciò basta per concludere che in questo caso non vi sono cicli, per un teorema di BENDIXSON (criterio negativo, [11], pag. 167). Se invece $0 < F < \frac{1}{2}$, essendo l'origine instabile, si può costruire una regione circolare di centro O da cui le traiettorie escono al crescere di τ . D'altra parte, risulta $dr/d\tau < 0$ per $r > r^*$ opportuno: tutte le traiettorie entrano dunque nel cerchio $r = r^*$. Si ha così una regione anulare da cui le traiettorie non possono uscire. Se ora O è l'unico punto singolare, si può concludere, per un altro teorema di BENDIXSON ([11], pag. 165), che esiste almeno un ciclo limite stabile che contiene il punto O . Per un ciclo limite, la r della soluzione generatrice, invece di essere costante a meno di termini $O(\varepsilon^2)$ varia periodicamente con τ , essendo il periodo incognito. Una soluzione di questo tipo dà per il sistema una oscillazione di combinazione, o oscillazione con ampiezza modulata, che in generale non è periodica, a meno che il rapporto tra il periodo del ciclo e 2π non sia razionale.

8. - Vogliamo ora interpretare e discutere i risultati ottenuti: per comodità useremo i parametri normalizzati ξ ed F (invece di σ ed E).

Anzitutto le vibrazioni sottoarmoniche, che sono l'oggetto principale della nostra ricerca, sono possibili soltanto per valori di ξ che costituiscono un intervallo simmetrico attorno a $\xi = 0$, di ampiezza $\Delta\xi$ dipendente da F :

$$|\xi| \leq \sqrt{F(1 - (7/4)F)},$$

e rappresentata graficamente nella Figura 2. Ciò indica un trascinamento di frequenza, fenomeno caratteristico dei sistemi non lineari, per cui non solo quando la forza esterna è multipla esatta della vibrazione libera del sistema si ottiene la vibrazione sottoarmonica (cioè con la frequenza esterna), ma le cose vanno allo stesso modo in un intorno, determinato esplicitamente, del valore zero del cosiddetto « detuning ».

Vediamo ora come si comporta il sistema retto dall'equazione (B) al variare di ξ tra $-\infty$ e $+\infty$, se si fissa F . Le configurazioni possibili, rappresentate per semplicità sul piano limite $z = 0$, sono quattro, rappresentate nella Figura 3 e nella tabella seguente:

- (a) un ciclo limite stabile; un fuoco (o nodo) instabile nell'origine;
- (b) l'origine instabile come nel precedente; 3 colli; 3 nodi (o fuochi) stabili;
- (c) un solo punto singolare, l'origine, stabile (nodo o fuoco);
- (d) l'origine (nodo o fuoco) stabile; 3 colli; 3 nodi (o fuochi) stabili.

Dal punto di vista fisico, nella configurazione (a) il sistema presenta una

oscillazione di combinazione, nella (b) oscilla secondo una delle tre sottoarmoniche stabili, a seconda della fase iniziale; in (c) è rappresentata l'oscillazione armonica, o eteroperiodica, del sistema. Il caso più complesso ed interessante è

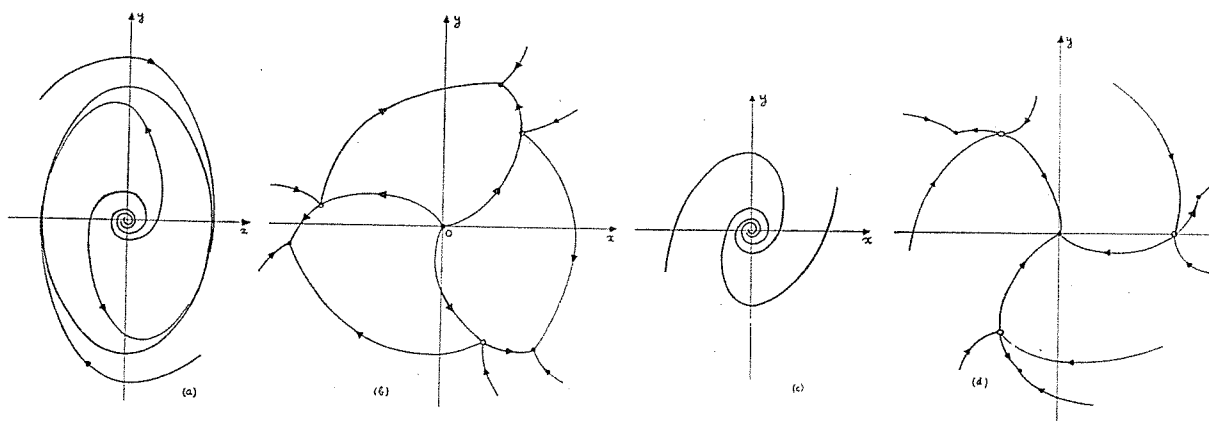


Fig. 3.

quello della configurazione (d), in cui a seconda delle condizioni iniziali il sistema può presentare o l'oscillazione armonica o l'oscillazione sottoarmonica (con fase opportuna). La successione di configurazioni per cui passa il sistema è la seguente:

$$\begin{aligned} 0 < F < 1/2 & \quad (a) \rightarrow (b) \rightarrow (a), \\ 1/2 < F < 4/7 & \quad (c) \rightarrow (d) \rightarrow (c), \\ F > 4/7 & \quad (c). \end{aligned}$$

Se invece teniamo fissato ξ e facciamo variare F , naturalmente tra 0 e $+\infty$, metteremo in luce altri aspetti del complesso fenomeno.

Precisamente, cominciamo a supporre $\xi = 0$ (risonanza sottoarmonica esatta) e vediamo come varia η , cioè, fisicamente, l'ampiezza della componente variabile dell'oscillazione rappresentata dalla $x_0(t)$. È ovvio che $\eta = 0$ corrisponde ad una vibrazione armonica ed $\eta \neq 0$ ad una oscillazione sottoarmonica o di combinazione: in quest'ultimo caso, per ogni valore di F la η non è più costante, ma varia tra un massimo ed un minimo in dipendenza dalla forma del ciclo limite. Il diagramma è riportato in Figura 4.

Se dunque si fa crescere F a partire dal valore zero, il sistema oscilla secondo la sottoarmonica fino a quando F non ha raggiunto il valore $4/7$: dopodiché passa ad oscillare secondo l'armonica (che ora è stabile); nel passaggio si produce un salto di η che costituisce il fenomeno dello « jump ».

Se invece si fa decrescere F da valori grandi, superiori a $4/7$, il sistema oscilla secondo l'armonica fino ad $F = \frac{1}{2}$, e poi salta all'oscillazione sottoarmonica, con lo jump in η ; il fatto che questo avvenga ad un valore di F inferiore a quello

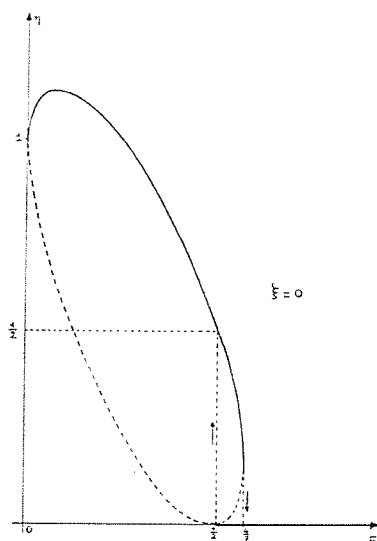


Fig. 4.

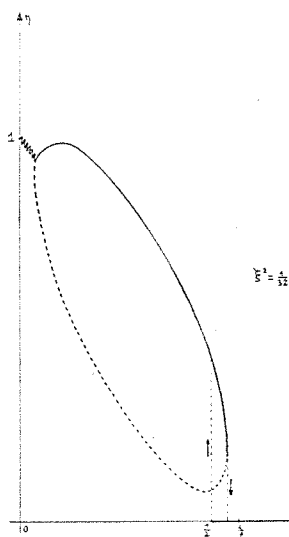


Fig. 5.

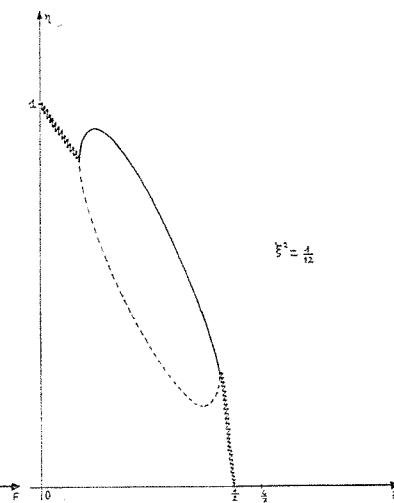


Fig. 6.

trovato in precedenza quando si faceva crescere F costituisce il fenomeno della « isteresi ».

Trattiamo ora il caso $\xi \neq 0$, supponendo però ξ abbastanza piccolo per modo che per $F = \frac{1}{2}$ esistano ancora le sottoarmoniche. Si ha allora la Figura 5 che mostra ancora il fenomeno dello jump e della isteresi, relativamente ad un più piccolo intervallo di valori di F . La novità è data dalla comparsa per i piccoli valori di F dell'oscillazione di combinazione, che sostituisce la vibrazione sottoarmonica ora impossibile a causa del troppo grande valore di ξ . Poichè il meccanismo della variazione di un ciclo limite al variare di un parametro è ancora poco noto, mi limiterò a questo punto ad ipotizzare un comportamento semplice che è descritto in Figura: precisamente suppongo che il ciclo sparisca quando si generano le tre coppie di punti singolari che rappresentano le vibrazioni sottoarmoniche in modo che vi sia continuità tra l'ampiezza del ciclo ed il valore di r corrispondenti ai punti singolari: essi, in sostanza, nella configurazione critica di transizione starebbero sopra il ciclo.

Il caso in cui ξ è ancora tale da assicurare l'esistenza di sottoarmoniche per un intervallo di valori (F_1, F_2) di F che escluda $F = \frac{1}{2}$, presenta l'esistenza

sicura di un ciclo limite per $0 < F < F_1$ e per $F_2 < F < \frac{1}{2}$. Un possibile schema di oscillazione è dato in Figura 6.

Infine se ξ è così grande che non esistano mai sottoarmoniche, il sistema ha un ciclo limite per $0 < F < \frac{1}{2}$ ed una oscillazione armonica stabile per $F > \frac{1}{2}$. È plausibile pensare che il ciclo sparisca adesso racchiudendosi nell'origine per $F = \frac{1}{2}$. Risulta evidente la possibilità di migliorare questa prima analisi studiando più a fondo i cicli ed il comportamento di tutte le traiettorie del sistema (7.2).

9. - Consideriamo ora l'equazione

$$(C) \quad \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon \left\{ 2 \sigma \dot{x} + \left(\alpha \frac{d^2}{dt^2} + \beta \right) (x^3/3 - x) \right\} = E \cos(3t) \quad (\alpha > \beta),$$

il cui sistema di ANDRONOV e WITT risulta:

$$(9.1) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = 2\beta z \left(1 - \frac{E_0^2}{2} - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2} \right) \\ \frac{dr}{d\tau} = (\alpha - \beta) r \left[1 - \frac{E_0^2}{2} - z^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{rE_0}{4} \cos(3\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - (\alpha - \beta) r \frac{E_0}{4} \sin(3\varphi) \end{cases} \quad \left(E_0 = -\frac{E}{24} \right).$$

I punti singolari del sistema si dividono in tre gruppi. Anzitutto i punti con $r = 0$ che sono: l'origine, stabile per $E_0^2 > 2$ ed instabile in caso contrario; i due punti simmetrici $r = 0$, $z = \pm \sqrt{3(1 - E_0^2/2)}$ che esistono soltanto quando $E_0^2 < 2$.

Il secondo gruppo è costituito dai punti singolari con $z = 0$, per cui si ha la equazione risolvente in r :

$$\frac{r^2}{16} E_0^2 = \frac{4\sigma^2}{(\alpha - \beta)^2} + \left[\frac{r^2}{4} - \left(1 - \frac{E_0^2}{2} \right) \right]^2,$$

che, posto $\frac{r^2}{4} = \eta$, $\frac{E_0^2}{4} = F$, $2\sigma = \xi(\alpha - \beta)$, diventa

$$\xi^2 + \eta^2 + \eta(3F - 2) + (1 - 2F)^2 = 0.$$

Essa coincide quindi con la (7.4) già studiata, ed ha un massimo di sei punti singolari. Per quanto riguarda la loro stabilità, si ha un esponente caratteristico:

$$\mu_1 = 2\beta(1 - 2\eta - 2F),$$

e gli altri due verificanti l'equazione

$$\mu^2 - A_1\mu + A_2 = 0,$$

con

$$A_1 = 2(\alpha - \beta)(1 - 2\eta - 2F), \quad A_2 = -3(\alpha - \beta)^2 [\xi^2 - \eta^2 + (1 - 2F)^2].$$

Si hanno così due condizioni di stabilità e, come al n. 7, si verifica subito che sono stabili i tre punti singolari corrispondenti, per ogni ξ fissato nell'intervallo di esistenza $\Delta\xi$, alle intersezioni di $\xi = \text{costante}$ con la metà superiore del cerchio.

Infine, il terzo gruppo di punti singolari, per cui sia r che z sono $\neq 0$, è dato da

$$(9.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{E_0^2}{2} - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2} = 0 \\ r \frac{E_0}{4} \sin(3\varphi) = \frac{2\sigma}{\alpha - \beta} \\ r \frac{E_0}{4} \cos(3\varphi) = z^2 + \frac{r^2}{4} - \left(1 - \frac{E_0^2}{2}\right). \end{array} \right.$$

Eliminando φ e ponendo

$$\zeta = z^2, \quad \frac{E_0^2}{4} = F, \quad \frac{r^2}{4} = \eta, \quad 2\sigma = \xi(\alpha - \beta),$$

si ha subito:

$$(9.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2F - \frac{\zeta}{3} - 2\eta = 0 \\ \eta F = \xi^2 + [\zeta + \eta - (1 - 2F)]^2. \end{array} \right.$$

Si ottiene così un sistema di due equazioni nello spazio (ξ, η, ζ) che rappre-

senta una linea: i punti singolari per ogni valore di ξ si ottengono segnando la linea col piano $\xi = \text{costante}$.

Poichè la prima equazione rappresenta un piano e la seconda un paraboloide ellittico, come si verifica facilmente, la linea di cui parliamo è sempre una ellisse che varia al variare del parametro F , che compare nelle equazioni. Ci interessano evidentemente i punti della linea per cui $\zeta > 0$ e $\eta > 0$. Dobbiamo quindi subito limitarci ai valori di $F < \frac{1}{2}$. È utile per semplicità ridursi al piano $\zeta = 0$ dove la nostra linea si proietta nella curva

$$(9.4) \quad \xi^2 + 25 \eta^2 + \eta (-20 + 39 F) + 4 (1 - 2F)^2 = 0,$$

che è ancora ovviamente una ellisse, simmetrica rispetto all'asse η , di cui si deve prendere la parte che sta sotto la retta $\eta = \frac{1}{2} - F$. Per $0 < F < 1/4$ si ottiene tutta l'ellisse, mentre per $1/4 < F < 1/2$ avremo una porzione soltanto. Notiamo subito che la retta $\eta = \frac{1}{2} - F$ coincide col semiasse orizzontale della nostra ellisse per $F = 5/11$. Si ottengono così dei punti singolari se vale la condizione:

$$\xi^2 < \frac{2F}{5} \left(1 - \frac{79}{40} F \right),$$

e tenendo conto che ad ogni valore di η si associano un valore di r e tre di φ , mentre ad ogni ζ associamo due valori simmetrici di z , si ha la tabella:

$0 < F < 1/4$: dodici punti singolari;

$1/4 < F < 5/11$: dodici punti singolari per valori grandi di ξ , ridotti a sei per

$$\xi^2 < (1 - 2F) \left(F - \frac{1}{4} \right);$$

$5/11 < F < 1/2$: sempre soltanto sei punti singolari.

La stabilità si ottiene studiando l'equazione caratteristica:

$$\mu^3 - A_1 \mu^2 + A_2 \mu - A_3 = 0,$$

in cui si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -4\alpha(1 - 2F - 2\eta) \\ A_2 = 16(\alpha - \beta)(1 - 2F - 2\eta) \beta (1 - 2F - 5\eta) - 3(\alpha - \beta)^2 [4(1 - 2F)^2 - \\ \quad - 24 \eta (1 - 2F) + 35 \eta^2 + \xi^2] \\ A_3 = 12 \beta (\alpha - \beta)^2 (1 - 2F - 2\eta) [\xi^2 - 25 \eta^2 + 4(1 - 2F)^2]. \end{array} \right.$$

Poichè ora l'equazione è di terzo grado irriducibile, si devono applicare le condizioni di ROUTH-HURWITZ che assicurano che tutte e tre le radici siano a parte reale negativa. La prima condizione $A_1 < 0$ ridà $\eta < \frac{1}{2} - F$, che è la limitazione necessaria perchè i punti singolari esistano. La seconda $A_3 < 0$, tenuto conto del verificarsi della prima, si riduce a

$$\xi^2 - 25 \eta^2 + 4(1 - 2F)^2 < 0.$$

Nel piano $z = 0$ l'ellisse proiezione (9.4) è tagliata secondo il diametro orizzontale per modo che risultano sicuramente instabili i punti appartenenti alla metà inferiore di essa. Infine la terza condizione $A_2 A_3 - A_1 > 0$, tenuto conto delle precedenti, dà:

$$3 \xi^2 (\alpha - \beta)^2 + 5 \eta^2 (21 \alpha^2 - 38 \alpha \beta - 15 \beta^2) + 4(1 - 2F)^2 (3 \alpha^2 - 10 \alpha \beta + 3 \beta^2) + 8 \alpha \eta (1 - 2F) (23 \beta - \alpha) > 0.$$

Poniamo $\lambda = \alpha/\beta$. Risulta naturalmente $\lambda > 1$. Ora nel piano ξ, η l'equazione

$$(9.5) \quad 3 \xi^2 (\lambda - 1)^2 + 5 \eta^2 (3\lambda + 1)(7\lambda - 15) + 8\lambda \eta (1 - 2F)(23 - 9\lambda) + 4(1 - 2F)^2 (3\lambda^2 - 10\lambda + 3) = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\beta} > 1,$$

rappresenta una ellisse per $\lambda > 15/7$, una parabola per $\lambda = 15/7$ ed una iperbole se $1 < \lambda < 15/7$. Con una semplice discussione geometrica, ci si convince che questa condizione è verificata per i punti della semiellisse superiore che dobbiamo prendere in considerazione in base alle condizioni precedenti. Consideriamo infatti le intersezioni della conica (9.5) con l'asse η , che sono:

$$\eta_1 = \frac{2}{5} (1 - 2F) \frac{3\lambda - 1}{3\lambda + 1}, \quad \eta_2 = 2(1 - 2F) \frac{\lambda - 3}{7\lambda - 15}.$$

Quando $\lambda > 15/7$ la conica è un'ellisse; risulta subito che entrambe le intersezioni stanno sotto la retta $\eta = \bar{\eta} = \frac{2}{5} (1 - 2F) + \frac{F}{50}$ che è il semiasse orizzontale dell'ellisse (9.4). Tanto basta per concludere che la terza condizione è verificata nei punti della semiellisse superiore (9.4), dove possono essere locati i punti singolari stabili. Se invece $1 < \lambda \leq 15/7$, la conica (9.5) è iperbole o parabola; poichè $\eta_1 < \bar{\eta}$, per il ramo inferiore vale la considerazione precedente. Per il ramo superiore risulta, per certi valori di ξ ed F , $\eta_2 < \bar{\eta}$ e quindi

vi possono essere intersezioni con la semiellisse che ci interessa, ma vale la relazione $\eta_2 > \frac{1}{2}(1 - 2F)$. Ciò significa che le intersezioni stanno sopra la retta $\eta = \frac{1}{2}(1 - 2F)$ che limita l'esistenza dei punti singolari. Per i punti della semiellisse sotto questa retta, che corrispondono a punti singolari per il sistema, vale dunque anche in questo caso la condizione $A_2 A_3 - A_1 > 0$. Poichè valgono già le prime due, essi sono stabili.

10. — Esponiamo ora i risultati completi per questo complesso sistema. Anzitutto vi sono vibrazioni armoniche del sistema rappresentate dall'origine,

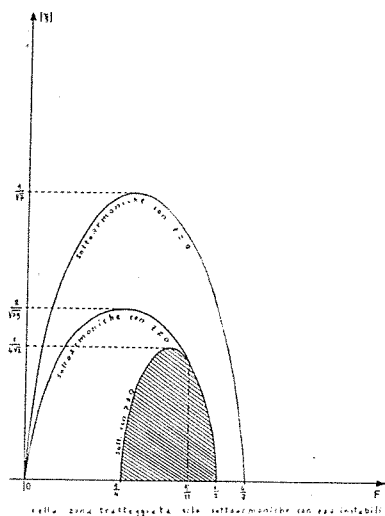


Fig. 7.

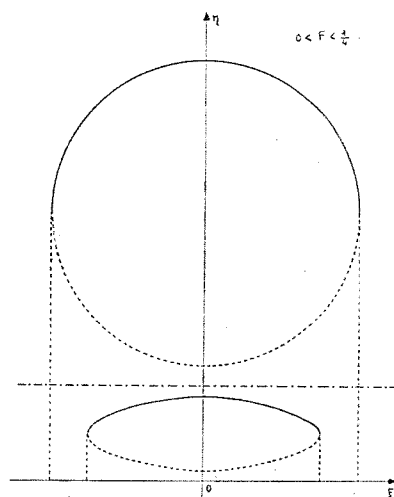


Fig. 8.

che è stabile per $E_0^2 > 2$ e dai punti simmetrici $r = 0$, $z = \pm \sqrt{3(1 - E_0^2/2)}$ che esistono e sono stabili soltanto se $E_0^2 < 2$. A differenza del sistema retto dall'equazione (B), si ha ora sempre almeno una vibrazione armonica stabile.

Le sottoarmoniche con $z = 0$ sono rappresentate da punti singolari che sono praticamente quelli già studiati nel caso dell'equazione (B), mentre la novità è data dalle sottoarmoniche con $z \neq 0$.

In primo luogo, queste sottoarmoniche esistono in un insieme di valori di ξ interno all'insieme in cui esistono le sottoarmoniche con $z = 0$. Può inoltre presentarsi il fatto che in un intervallo di valori di ξ , comprendente l'origine (e simmetrico come tutti gli intervalli che stiamo considerando), esista soltanto

la sottoarmonica instabile, per modo che si ha una maggior varietà di casi possibili, come mostra la Figura 7.

Per istituire un confronto tra i due tipi di sottoarmoniche, si possono osservare le Figure 8, 9, 10, in cui in ascisse è portato ξ ed in ordinate la quantità η che rappresenta in ogni caso il quadrato dell'ampiezza (misurata in convenienti unità) della componente $r \sin(t + \varphi)$ della nostra vibrazione. Mentre per $0 < F < 1/4$ le sottoarmoniche dei due tipi procedono separatamente, per $1/4 < F < 1/2$ si vede che le sottoarmoniche con $z \neq 0$ cessano di esistere quando il punto singolare che le rappresenta ha la sua coordinata η sulla retta $\eta = \frac{1}{2} - F$. Si

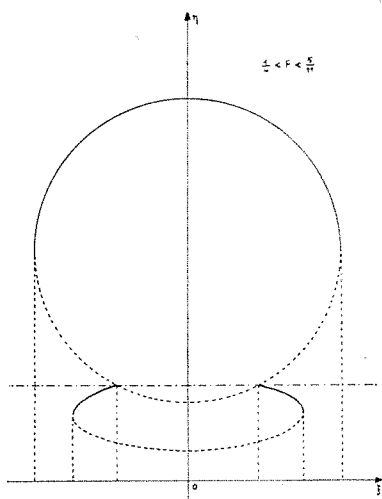


Fig. 9.

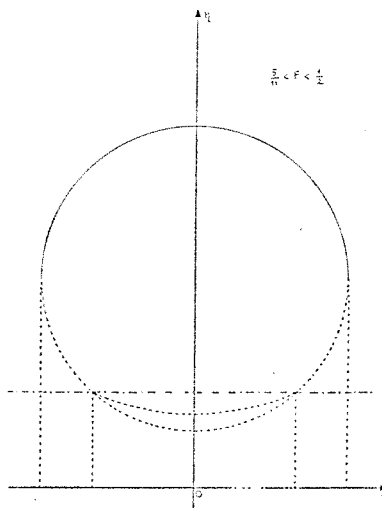


Fig. 10.

verifica subito che per questo punto la z è nulla e che quindi esso è finito nel piano $z = 0$. Il fatto allora che per questi punti della figura passi esattamente una delle sottoarmoniche con $z = 0$, significa che in tali casi una sottoarmonica con $z \neq 0$ sparisce tendendo alla sottoarmonica instabile con $z = 0$.

Precisamente, per $1/4 < F < 5/11$ la sottoarmonica stabile con $z \neq 0$ tende, al decrescere di ξ , alla sottoarmonica instabile con $z = 0$; invece, per $5/11 < F < 1/2$ non vi sono più sottoarmoniche stabili con $z \neq 0$ ed è la sottoarmonica instabile dello stesso tipo che tende alla sottoarmonica instabile con $z = 0$; questa volta al crescere di ξ .

Possiamo dare la seguente tabella completa delle soluzioni rappresentate da punti singolari del sistema (9.1).

Con-figu-raz.	armoniche	sotto-armoniche $z = 0$	sotto-armoniche $z \neq 0$	condizioni di esistenza
(I)	2 stabili 1 instabile	nessuna	nessuna	$0 < F < \frac{1}{2}, \xi^2 > F\left(1 - \frac{7}{4}F\right)$
(II)	2 stabili 1 instabile	3 stabili 3 instabili	nessuna	$0 < F < 1/2,$ $\frac{2F}{5}\left(1 - \frac{79}{40}F\right) < \xi^2 < F\left(1 - \frac{7}{4}F\right)$
(III)	2 stabili 1 instabile	3 stabili 3 instabili	6 stabili 6 instabili	$0 < F < \frac{1}{4}, \xi^2 < \frac{2F}{5}\left(1 - \frac{79}{40}F\right)$ oppure: $\frac{1}{4} < F < \frac{5}{11},$ $(1 - 2F)\left(F - \frac{1}{4}\right) < \xi^2 < \frac{2F}{5}\left(1 - \frac{79}{40}F\right)$
(IV)	2 stabili 1 instabile	3 stabili 3 instabili	6 instabili	$\frac{1}{4} < F < \frac{1}{2},$ $\xi^2 < (1 - 2F)\left(F - \frac{1}{4}\right)$
(V)	1 stabile	3 stabili 3 instabili	nessuna	$\frac{1}{2} < F < \frac{4}{7}, \xi^2 < F\left(1 - \frac{7}{4}F\right)$
(VI)	1 stabile	nessuna	nessuna	$\frac{1}{2} < F < \frac{4}{7}, \xi^2 > F\left(1 - \frac{7}{4}F\right)$ oppure: $F > \frac{4}{7}, \quad \xi \text{ qualsiasi}$

Per valutare il comportamento del sistema va inoltre tenuto presente che, come si vede subito dalla prima delle (9.1), le soluzioni per cui inizialmente la z è zero non possono lasciare il piano $z = 0$. Vi potranno anche essere soluzioni quasi periodiche rappresentate dai cicli limite del sistema (9.1), ma la loro ricerca è assai complessa perchè urta contro le note difficoltà che si incontrano

nel passaggio dal piano allo spazio. Sarebbe possibile provare, con ragionamento analogo a quello fatto in [1], l'esistenza, sotto opportune condizioni, di un ciclo limite stabile, ma il problema resta aperto e si potrà affrontare in ulteriori lavori.

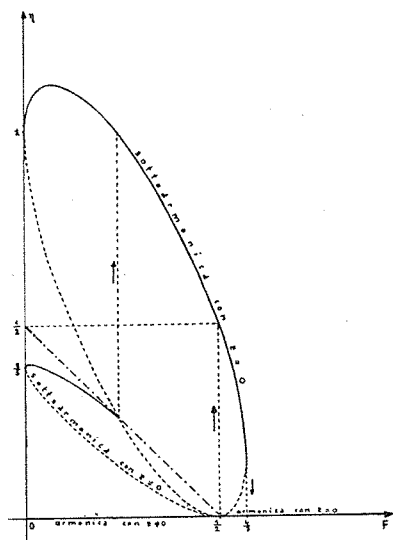


Fig. 11.

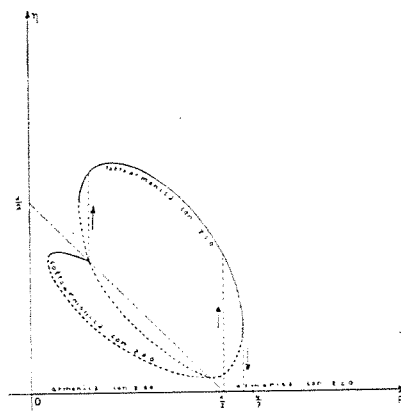


Fig. 12.

Se si fissa F e si fa variare ξ da $-\infty$ a $+\infty$, si ha la successione di configurazioni possibili per il sistema:

$$0 < F < 1/4 \quad (I) \rightarrow (II) \rightarrow (III) \rightarrow (II) \rightarrow (I),$$

$$1/4 < F < 5/11 \quad (I) \rightarrow (II) \rightarrow (III) \rightarrow (IV) \rightarrow (III) \rightarrow (II) \rightarrow (I),$$

$$5/11 < F < 1/2 \quad (I) \rightarrow (II) \rightarrow (IV) \rightarrow (II) \rightarrow (I),$$

$$1/2 < F < 4/7 \quad (VI) \rightarrow (V) \rightarrow (VI),$$

$$F > 4/7 \quad (VI).$$

Il comportamento del sistema, per ξ fissato, al variare di F è indicato nelle Figure 11, 12, 13, 14.

Si presenta il fenomeno dello jump tra sottoarmonica con $z = 0$ ed armonica stabile rappresentata dall'origine O come già visto al n. 8, nell'intervallo $\frac{1}{2} < F <$

$< 4/7$; inoltre compare un nuovo fenomeno di jump da sottoarmonica a sottoarmonica; precisamente, quando la sottoarmonica stabile con $z \neq 0$ tende a sparire, la $z \rightarrow 0$ ed il sistema, restando ora $z = 0$ al crescere di τ , deve saltare alla sottoarmonica stabile con $z = 0$.

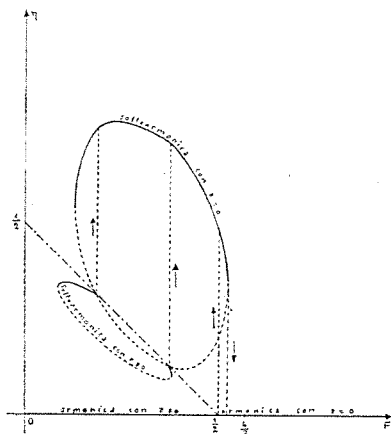


Fig. 13.

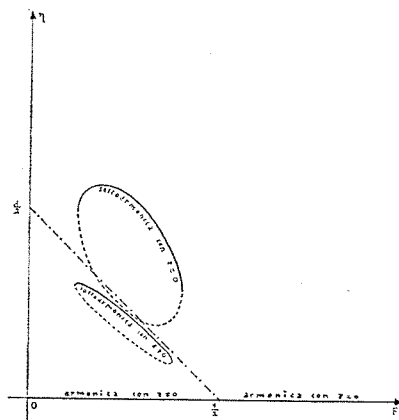


Fig. 14.

Questo jump avviene senza isteresi, perchè partendo da punti con $z = 0$ si resta nel piano $z = 0$.

Oltre a questo fatto, nuovo rispetto allo studio dell'equazione (B), si presenta anche la coesistenza di vibrazione armonica e vibrazione sottoarmonica per ogni valore di F : ciò significa che per opportune condizioni iniziali si può avere sempre dal sistema la vibrazione armonica al variare di F .

§ 3. - Sottoarmoniche d'ordine 3: i casi critici.

11. - Se supponiamo ora che la forza esterna agente sui sistemi meccanici ed elettrici considerati sia anch'essa piccola dell'ordine di ε , come avviene nel caso di risonanza armonica che ho trattato in [1], non è più valida la trattazione fatta nei numeri precedenti, perchè, ponendo $E_0 = 0$ nei sistemi di ANDRONOV e WITT, essi cambiano decisamente per quanto riguarda il comportamento delle traiettorie e dei punti singolari, almeno nei casi fisicamente più interessanti.

Se prendiamo in esame l'equazione (A), il sistema autonomo associato è:

$$(11.1) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2\beta z \left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{r^2}{2}\right) \\ \frac{dr}{d\tau} = -(\alpha - \beta) r \left(1 + z^2 + \frac{r^2}{4}\right) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma \end{cases} \quad (\alpha > \beta > 0).$$

Questo sistema, pur assai differente nell'aspetto dal suo corrispondente del n. 7 ha ancora un solo punto singolare stabile, cioè l'origine, a cui tutte le altre traiettorie tendono al crescere di τ . Pertanto, anche in questo caso il sistema retto dall'equazione (A) presenta sempre la vibrazione armonica stabile.

Per l'equazione (B) avremo invece:

$$(11.2) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2cz \\ \frac{dr}{d\tau} = r \left[c + a - a \left(\frac{r^2}{4} + z^2 \right) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma. \end{cases}$$

È subito visto che l'origine è punto singolare instabile. Si presenta ora il ciclo limite:

$$z = 0, \quad r = r_0 = \sqrt{\frac{4(c+a)}{a}}.$$

Si tratta di un ciclo avente la forma di un cerchio, che risulta, come subito si vede, stabile. Esso rappresenta la famiglia ∞^1 di soluzioni:

$$x(t) = r_0 \sin(t + \varphi) + \varepsilon X(t) + O(\varepsilon^2),$$

al variare della fase φ . Dette soluzioni sono periodiche solo se $\sigma = 0$, altrimenti saranno quasi periodiche. È però da rilevare che la loro ampiezza in prima approssimazione si presenta costante e non modulata, come di solito avviene per tale tipo di soluzioni (ad esempio quelle introdotte al n. 8). Chiameremo questa

categoria di soluzioni vibrazioni a fase variabile. L'esame della loro stabilità va fatto partendo dall'equazione alle variazioni associata ad una soluzione:

$$(11.3) \quad \ddot{\xi} + \dot{\xi} + \varepsilon \left[-a \ddot{\xi} + 2\sigma \dot{\xi} + c\xi + a \frac{d^2}{dt^2} (x_0^2 \xi) \right] + 2a\varepsilon^2 \frac{d^2}{dt^2} [x_0 X\xi] + O(\varepsilon^3) = 0,$$

essendo $x_0(t) = r_0 \sin(t + \varphi)$. Tale equazione è lineare, a coefficienti periodici, di periodo 2π . Il suo studio permette di trovare gli esponenti caratteristici della soluzione, che dipendono da ε , con uno sviluppo asintotico di cui una facile applicazione del lemma esteso di CARTWRIGHT, come già fatto nel n. 2, assicura la validità per ε piccolo.

Cominciamo a supporre $\sigma \neq 0$ ed esponiamo sommariamente il metodo di calcolo. Per $\varepsilon = 0$, gli esponenti caratteristici valgono $0, i, -i$ (e sono definiti a meno di $2\pi i$). Per trovare i coefficienti dell'ordine di ε nello sviluppo di detti esponenti, conviene porre:

$$\xi = e^{\mu \varepsilon t} \eta,$$

per cui la $\eta(t)$ verifica l'equazione:

$$(11.4) \quad \ddot{\eta} + \dot{\eta} + \varepsilon \left\{ (2c + a) \ddot{\eta} + 2\sigma \dot{\eta} + c\eta - \right. \\ \left. - (c + a) \frac{d^2}{dt^2} [2 \cos(2t + 2\varphi)\eta] + \mu \eta + 3\mu \ddot{\eta} \right\} + O(\varepsilon^2) = 0$$

di cui cerchiamo le soluzioni periodiche, che si avranno naturalmente per opportuni valori di μ . Sviluppiamo η in serie di ε : $\eta(t) = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + O(\varepsilon^2)$. Si ha allora:

$$\eta_0 = A + B \cos t + C \sin t,$$

mentre la $\eta_1(t)$ deve soddisfare all'equazione:

$$(11.5) \quad \ddot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1 + (2c + a) \ddot{\eta}_0 + 2\sigma \dot{\eta}_0 + c\eta_0 - (c + a) \frac{d^2}{dt^2} [2 \cos(2t + 2\varphi) \eta_0] + \\ + \mu \eta_0 + 3\mu \ddot{\eta}_0 = 0.$$

Volendo ora che $\eta(t)$ risulti periodica, si devono eliminare nella (11.5) i termini risonanti cioè, quelli del tipo $A + M \cos t + N \sin t$ (A, M, N costanti).

Ciò comporta:

$$\begin{cases} \lambda A + cA = 0, \\ B[(c+a)(\cos 2\varphi - 1) - 2\mu] + C[2\sigma - (c+a)\sin 2\varphi] = 0 \\ B[-2\sigma - (c+a)\sin 2\varphi] + C[-(c+a)(1 + \cos 2\varphi) - 2\mu] = 0. \end{cases}$$

La prima condizione è verificata per $A = 0$, oppure per $\mu_1 = -c < 0$. La seconda e la terza condizione costituiscono un sistema che ammette la soluzione $B = C = 0$, oppure soluzioni con B e C non entrambi nulli e μ dato dall'equazione

$$\mu^2 + \mu(c+a) + \sigma^2 = 0,$$

che ha due radici a parte reale negativa. Si ottengono così per la (11.4) tre soluzioni periodiche, a meno di $O(\varepsilon^2)$, scegliendo $A \neq 0$, $\mu = \mu_1$, $B = C = 0$, oppure $A = 0$, $\mu = \mu_2$ (o $\mu = \mu_3$), B e C soluzioni non nulle del sistema formato dalle ultime due equazioni. Poichè le tre soluzioni sono linearmente indipendenti, ogni altra soluzione di (11.4) si ottiene per combinazione lineare di esse ed è quindi periodica a meno di $O(\varepsilon^2)$. Tanto basta, in base alla teoria classica di FLOUQUET, per concludere che per $\sigma \neq 0$ le nostre soluzioni a fase variabile sono stabili avendo i tre esponenti caratteristici

$$(11.6) \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2\pi c \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \lambda_2 = i + 2\pi \varepsilon \mu_2 + O(\varepsilon^2) \\ \lambda_3 = -i + 2\pi \varepsilon \mu_3 + O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Se ora si suppone $\sigma = 0$, cioè si passa alle soluzioni periodiche, si ha:

$$\mu_2 = -(c+a) < 0, \quad \mu_3 = 0.$$

Bisogna dunque proseguire la ricerca per il terzo esponente caratteristico, con lo stesso metodo, mettendo in conto i termini $O(\varepsilon^2)$, in cui ovviamente interviene la parte $X(t)$ della soluzione che vale

$$X(t) = \alpha + \beta \cos t + \gamma \sin t - \frac{E}{24} \sin(3t) - \frac{\gamma_0}{8} (c+a) \cos(3t + 3\varphi).$$

Fatti i calcoli, si ottiene il risultato

$$\lambda_3 = -i + 4\pi^2 \varepsilon^2 \bar{\mu}_3 + O(\varepsilon^3),$$

con

$$\bar{\mu}_3 = \frac{a r_0}{4} \left[\frac{E}{24} \cos(3\varphi) - \beta \sin\varphi - \gamma \cos\varphi \right].$$

Tenendo conto dell'espressione di β , γ dedotta dalle condizioni

$$X(0) = \dot{X}(0) = \ddot{X}(0) = 0,$$

si arriva alla formula definitiva:

$$(11.7) \quad \bar{\mu}_3 = \frac{a r_0}{4} \cos\varphi \cdot \left[3 r_0 (c + a) \sin^3 \varphi - \frac{E}{12} (1 + 2 \sin^2 \varphi) \right].$$

È necessario discutere il segno di $\bar{\mu}_3$ in quanto si ha stabilità solo per $\bar{\mu}_3 < 0$.

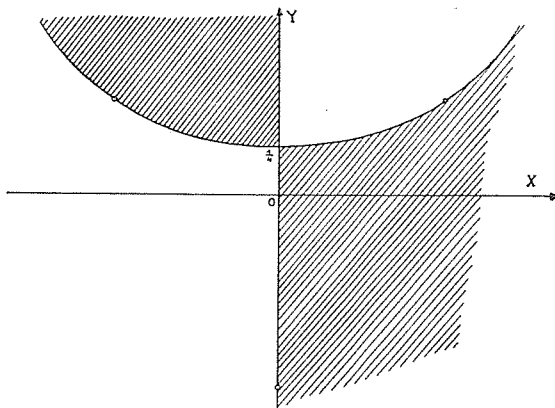


Fig. 15.

Consideriamo il piano di coordinate polari $\varrho = \frac{3r_0(c+a)}{E}$ e φ . La curva di neutralità $\bar{\mu}_3 = 0$ si spezza nella retta $\cos\varphi = 0$ e nella curva di equazione polare:

$$\varrho = \frac{1 + 2 \sin^2 \varphi}{12 \sin^3 \varphi}$$

rappresentata in Figura 15 nel piano di assi $X = \varrho \cos \varphi$, $Y = \varrho \sin \varphi$. Per avere stabilità occorre che ϱ e φ cadano nelle zone tratteggiate della Figura. Fuori di queste vi è sicuramente instabilità; l'esame, andrebbe proseguito sui contorni in cui $\bar{\mu}_3 = 0$ perchè lì risulta:

$$\lambda_3 = -i + 8\pi^3 \varepsilon^3 \bar{\mu}_3 + O(\varepsilon^4).$$

Su questi contorni stanno i punti

$$\varrho = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}; \quad \varrho = 1, \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}; \quad \varrho = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2},$$

che corrispondono alle soluzioni esatte di (B) per cui sono nulli identicamente $X(t)$ ed i termini $O(\varepsilon^2)$. Tali soluzioni, di interesse teorico, sono instabili perchè si ha

$$(11.8) \quad \bar{\mu}_3 = (1/16^2) (c + a)^2 (9a + 25c) > 0.$$

12. - Passiamo ora ad esaminare l'equazione (C): in questo caso avremo il sistema autonomo

$$(12.1) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = 2\beta z \left(1 - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2}\right) \\ \frac{dr}{d\tau} = r(\alpha - \beta) \left(1 - z^2 - \frac{r^2}{4}\right) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma \end{cases} \quad (\alpha > \beta > 0).$$

Esso ha come punti singolari l'origine instabile e i due punti simmetrici stabili:

$$z = \pm \sqrt{3}, \quad r = 0.$$

Inoltre vi sono tre cicli:

$$z = 0, \quad r = 2; \quad z = \pm \sqrt{\frac{8}{5}}, \quad r = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Di essi è stabile solo il primo, che corrisponde alla soluzione

$$x(t) = 2 \sin(t + \varphi) + \varepsilon X(t) + O(\varepsilon^2),$$

alla quale applichiamo il metodo precedente. Se $\sigma \neq 0$ le soluzioni a fase variabile sono stabili, mentre per $\sigma = 0$ gli esponenti caratteristici risultano:

$$(12.2) \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2\pi\beta\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \lambda_2 = i - 2\pi(\alpha - \beta)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \lambda_3 = -i + 2\pi^2\varepsilon^2(\alpha - \beta)\cos\varphi \cdot \left[\frac{2}{3}(9\alpha - \beta)\sin^3\varphi - \frac{E}{6}(1 + \sin^2\varphi) \right] + O(\varepsilon^3). \end{cases}$$

Essi sono perfettamente analoghi a quelli del sistema precedente, in particolare il terzo si studia arrivando a zone di stabilità come in Figura 15. Anche qui vi sono soluzioni esatte per $E = \frac{2}{3}(9\alpha - \beta)$, $\varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$. Esse sono instabili perchè per esse

$$(12.3) \quad \lambda_3 = -i + \frac{8\pi^3\varepsilon^3}{48^2}(\alpha - \beta)(9\alpha - \beta)^2 + O(\varepsilon^4).$$

Vale la pena di osservare che per le soluzioni periodiche ($\sigma = 0$) due dei tre esponenti caratteristici ora determinati coincidono con quelli del ciclo, in accordo con la teoria. Per quel che concerne le soluzioni non periodiche ($\sigma \neq 0$) ciò non accade più: pur essendo ancora rappresentate dal ciclo nel metodo di ANDRONOV e WITT, esse presentano tre esponenti caratteristici, tutti distinti da quelli del ciclo. Inoltre, se si fa tendere β a zero in (C) oppure si fa tendere c a zero in (B), si ottiene, come osservato al n. 6, l'equazione di VAN DER POL derivata rispetto al tempo. Essa ha soluzioni sottoarmoniche esatte studiate da G. COLOMBO [12]. Il nostro calcolo del terzo esponente caratteristico (11.8) o (12.3) ridà al limite il risultato numerico trovato da questo Autore.

§ 4. - Sottoarmoniche d'ordine $n \neq 3$.

13. - Cominciamo a studiare le sottoarmoniche d'ordine $n > 3$, cioè supponiamo che la forza esterna sia ora $E \cos(nt)$.

Per l'equazione (A), si ottiene subito il sistema:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2\beta z \left(1 + \frac{E_0^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{r^2}{2}\right) \\ \frac{dr}{d\tau} = -(\alpha - \beta) r \left(1 + \frac{E_0^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma \end{cases} \quad (\alpha > \beta > 0).$$

Attraverso questo sistema si vede, come nei casi precedenti, che non vi sono altri punti singolari diversi dall'origine; questa è stabile e ad essa tendono tutte le traiettorie. Pertanto il sistema ha la solita oscillazione armonica:

$$x(t) = E_0 \sin(nt) + \varepsilon X(t) + O(\varepsilon^2).$$

Per l'equazione (B), avremo:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2cz \\ \frac{dr}{d\tau} = r \left[c + a - a \left(z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{E_0^2}{2} \right) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma. \end{cases}$$

Questo sistema ha come unico punto singolare l'origine, che è stabile per $E_0^2 > \frac{2(c+a)}{a}$. Se però $E_0^2 < \frac{2(c+a)}{a}$, oltre all'origine, punto singolare instabile, avremo il ciclo limite:

$$z = 0, \quad r = r_0 = \sqrt{\frac{4(c+a)}{a} - 2E_0^2},$$

che risulta stabile avendo gli esponenti caratteristici

$$\mu_1 = -2c < 0, \quad \mu_2 = 4[a E_0^2 - 2(c + a)] < 0, \quad \mu_3 = 0.$$

Il ciclo rappresenta, come già osservato al § 3, soluzioni quasi periodiche a fase variabile, se $\sigma \neq 0$; l'esame diretto dell'equazione alle variazioni mostra che esse sono stabili. Se poi $\sigma = 0$ (risonanza sottoarmonica esatta), il ciclo rappresenta un sistema di ∞^1 sottoarmoniche al variare della fase φ . Esse presentano la forma seguente:

$$x(t) = r_0 \sin(t + \varphi) + E_0 \sin(n t) + \varepsilon X(t) + O(\varepsilon^2),$$

con

$$(13.1) \quad X(t) = \bar{\alpha} + \bar{R} \sin(t + \bar{\varphi}) + \sum_k [\mu_k \cos(k t) + \nu_k \sin(k t)].$$

Nella (13.1) l'intero k assume i valori: $3, n-2, n, n+2, 2n-1, 2n+1, 3n$, mentre le costanti $\bar{\alpha}, \bar{R}, \bar{\varphi}$ vanno determinate attraverso le condizioni iniziali

$$X(0) = \dot{X}(0) = \ddot{X}(0) = 0,$$

e saranno quindi legate ai coefficienti di FOURIER μ_k, ν_k .

Per queste soluzioni avremo due esponenti coincidenti con quelli del ciclo; il terzo esponente, a conti fatti, risulta il seguente:

$$\lambda_3 = -i - \pi^2 a r_0 \varepsilon^2 \bar{R} \cos(\varphi - \bar{\varphi}) + O(\varepsilon^3).$$

La condizione di stabilità viene tradotta quindi dalla semplice limitazione

$$\cos(\varphi - \bar{\varphi}) > 0,$$

la quale mette in luce come la stabilità di queste soluzioni sia subordinata esclusivamente alla differenza di fase $\varphi - \bar{\varphi}$.

È da notare espressamente che non vi possono essere qui soluzioni esatte per cui la $X(t)$ è identicamente nulla insieme ai termini $O(\varepsilon^2)$. Infatti risulta

$$\mu_{3n} = \frac{-a E_0^3}{9 n^2 - 1} \neq 0.$$

Passiamo ora allo studio dell'equazione (C). Il sistema di ANDRONOV e WITT è ora:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = 2\beta z \left(1 - \frac{E_0^2}{2} - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2}\right) \\ \frac{dr}{d\tau} = (\alpha - \beta) r \left(1 - \frac{E_0^2}{2} - z^2 - \frac{r^2}{4}\right) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma \end{cases} \quad (\alpha > \beta > 0).$$

Se $E_0^2 > 2$, il sistema ammette come unico punto singolare l'origine, instabile; tutte le traiettorie tendono ad essa.

Per studiare il caso $E_0^2 < 2$, considero il sistema ausiliario, in due variabili r, z , costituito dalle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = 2\beta z \left(\lambda - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2}\right) \\ \frac{dz}{d\tau} = (\alpha - \beta) r \left(\lambda - z^2 - \frac{r^2}{4}\right) \end{cases} \quad \left(\lambda = 1 - \frac{E_0^2}{2}, \quad 0 < \lambda \leq 1\right).$$

Esso ammette i seguenti punti singolari:

$$O(0, 0) \text{ nodo instabile,} \quad A(2\sqrt{\lambda}, 0) \text{ nodo stabile,}$$

B, B' dati da $(0, \pm \sqrt{3\lambda})$ nodi stabili, C, C' dati da $\left(\sqrt{\frac{8\lambda}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3\lambda}{5}}\right)$ colli.

Per il nostro sistema, nelle variabili z, r, φ , si hanno così come punti singolari l'origine instabile ed i punti B, B' stabili. Si hanno inoltre tre cicli: un ciclo stabile in corrispondenza di $z = 0, r = 2\sqrt{\lambda}$ e due cicli instabili in corrispondenza di $z = \pm \sqrt{\frac{3\lambda}{5}}, r = \sqrt{\frac{8\lambda}{5}}$.

I punti singolari stabili rappresentano le solite vibrazioni armoniche, mentre il ciclo stabile rappresenta per $\sigma \neq 0$ vibrazioni quasi periodiche che risultano stabili. Per $\sigma = 0$ il ciclo stabile rappresenta ∞^1 soluzioni sottoarmoniche che hanno due esponenti caratteristici eguali a quelli del ciclo. Calcolando il terzo si ottiene, analogamente a quanto visto nel caso precedente,

$$\lambda_3 = -i - 4\pi^2 \varepsilon^2 (\alpha - \beta) \lambda \bar{R} \cos(\varphi - \bar{\varphi}) + O(\varepsilon^3).$$

La condizione di stabilità è quindi ancora:

$$\cos(\varphi - \bar{\varphi}) > 0.$$

14. - Passiamo ora alle sottoarmoniche d'ordine $n = 2$. Per l'equazione (A) si ha il sistema autonomo:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2\beta z \left[1 + \frac{E_0^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{r^2}{2} \right] - \frac{\beta}{2} r^2 E_0 \sin(2\varphi) \\ \frac{dr}{d\tau} = -(\alpha - \beta) r \left[1 + \frac{E_0^2}{2} + z^2 + \frac{r^2}{4} - z E_0 \sin(2\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - (\alpha - \beta) z E_0 \cos(2\varphi) \end{cases} \quad (\alpha > \beta > 0).$$

Ancora l'unico punto singolare è l'origine, stabile. Ciò corrisponde ad una vibrazione armonica stabile.

Per l'equazione (B) il sistema autonomo è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -2cz \\ \frac{dr}{d\tau} = r \left[c + a - a \frac{E_0^2}{2} - az^2 - a \frac{r^2}{4} - az E_0 \sin(2\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - az E_0 \cos(2\varphi). \end{cases}$$

La discussione dei punti singolari è semplice. Se $E_0^2 > \frac{2(c+a)}{a}$ vi è solo la origine, stabile; in caso contrario accanto all'origine, instabile, compare il ciclo stabile

$$z = 0, \quad r = r_0 = \sqrt{\frac{4(c+a)}{a} - 2E_0^2}.$$

Ad esso si associano, al solito modo, ∞^1 soluzioni che per $\sigma \neq 0$ sono quasi periodiche e stabili, mentre per $\sigma = 0$ risultano periodiche con due esponenti caratteristici coincidenti con quelli del ciclo e quindi a parte reale negativa. L'indagine sul terzo esponente caratteristico, condotta utilizzando l'equazione alle variazioni, dà il risultato:

$$\lambda_3 = -i + 4\pi^2 \bar{\mu}_3 + O(\varepsilon^3),$$

$$\bar{\mu}_3 = -a \left[-\frac{\bar{\alpha}}{2} E_0 \sin(2\varphi) + \frac{3}{32} E_0^2 (c+a) \sin(4\varphi) + \frac{r_0 \bar{r}}{4} \cos(\varphi - \bar{\varphi}) \right],$$

essendo ora

$$X(t) = \bar{\alpha} + \bar{R} \sin(t + \bar{\varphi}) + \sum_{k=2}^6 [\mu_k \cos(kt) + \nu_k \sin(kt)].$$

La condizione di stabilità $\bar{\mu}_3 < 0$ risulta ora assai più complessa di quelle ottenute nei casi precedenti in cui $n > 3$, ma tuttavia può essere usata concretamente per verificare se una data soluzione periodica è stabile o no. Anche qui non vi sono soluzioni esatte, perchè non è possibile annullare contemporaneamente tutti i coefficienti di $X(t)$.

15. — Consideriamo ora il sistema di ANDRONOV e WITT associato all'equazione (C):

$$(15.1) \quad \begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = 2\beta z \left[1 - \frac{E_0^2}{2} - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2} \right] - \frac{\beta}{2} r^2 E_0 \sin(2\varphi) \\ \frac{dr}{d\tau} = (\alpha - \beta) r \left[1 - \frac{E_0^2}{2} - z^2 - \frac{r^2}{4} - z E_0 \sin(2\varphi) \right] \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\sigma - (\alpha - \beta) z E_0 \cos(2\varphi) \end{cases} \quad (\alpha > \beta > 0).$$

Esso ammette anzitutto come punti singolari l'origine, stabile se $E_0^2 > 2$ ed instabile in caso contrario. Se $E_0^2 < 2$, vi sono i punti singolari simmetrici

$$r = 0, \quad z = \pm \sqrt{3 \left(1 - \frac{E_0^2}{2} \right)},$$

che rappresentano ancora delle vibrazioni armoniche del sistema.

Cerchiamo ora i punti singolari con $z = 0$, $r \neq 0$. Essi verificano le condizioni:

$$(15.2) \quad \begin{cases} \sin(2\varphi) = 0 \\ r^2 = 4 \left(1 - \frac{E_0^2}{2} \right) \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

Perciò se $E_0^2 < 2$ e $\sigma = 0$, avremo i quattro punti:

$$z = 0, \quad r = r_0 = 2 \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{2}}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \pi, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Infine, si presenta la possibilità di punti con $z \neq 0$ ed $r \neq 0$, per cui:

$$(15.3) \quad \begin{cases} z E_0 \cos(2\varphi) = \frac{2\sigma}{\alpha - \beta} \\ z E_0 \sin(2\varphi) = 1 - \frac{E_0^2}{2} - z^2 - \frac{r^2}{4} \\ r^2 E_0 \sin(2\varphi) = 4z \left(1 - \frac{E_0^2}{2} - \frac{z^2}{3} - \frac{r^2}{2} \right). \end{cases}$$

Eliminando φ e ponendo $\xi = \frac{2\sigma}{\alpha - \beta}$, $\zeta = z^2$, $\eta = \frac{r^2}{4}$, $F = \frac{E_0^2}{4}$, si riconduce la ricerca di questi punti allo studio delle possibili intersezioni delle curve:

$$(15.4) \quad \begin{cases} (\zeta + \eta - 1 + 2F)^2 + \xi^2 = 4\zeta F \\ \eta(1 - 2F - \zeta - \eta) = \zeta \left(1 - 2F - \frac{\zeta}{3} - 2\eta \right). \end{cases}$$

La prima rappresenta, al variare di ξ , nel piano η, ζ , una famiglia di parabole, di asse

$$\zeta + \eta + F - 1 = 0,$$

il cui vertice è $\bar{\eta} = 1 - \frac{5}{4}F - \frac{\xi^2}{4F}$, $\bar{\zeta} = \frac{1}{4}F + \frac{\xi^2}{4F}$; pertanto al crescere di ξ^2 dal valore zero, la curva si sposta verso sinistra. Le parabole intersecano l'asse ξ in

$$\zeta_1 = 1 + \sqrt{4F(1 - F) - \xi^2}, \quad \zeta_2 = 1 - \sqrt{4F(1 - F) - \xi^2}.$$

È subito visto che non ci sono intersezioni nel 1° quadrante per $\xi^2 > 4F(1 - F)$. La parabola ottenuta per $\xi = 0$ è tangente all'asse η nel punto $\eta' = 1 - 2F$; tutte le altre parabole non intersecano l'asse η .

La seconda curva è una iperbole, passante per l'origine e per i punti:

$$(1 - 2F, 0), \quad (0, 3 - 6F).$$

Essa ha centro in $\frac{5}{7}(1 - 2F), \frac{3}{7}(1 - 2F)$ e i coefficienti direttivi degli asintoti sono $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$. L'iperbole degenera nei propri asintoti per $F = \frac{1}{2}$, mentre la parabola degenera per $F = 0$ nel proprio asse se $\xi = 0$, altrimenti in una coppia di rette complesse. Fissato ξ , ogni intersezione parabola-iperbole che cade nel 1° quadrante ci dà un valore di z^2 ed un valore di $r > 0$, cui associeremo valori di φ dalle (15.3). In totale si vede che ad una intersezione ξ, η corrispondono 4 punti singolari, simmetrici rispetto all'asse z .

Volendo studiare la stabilità dei punti singolari trovati, si trova anzitutto che i punti $r = 0, z = \pm \sqrt{3(1 - 2F)}$ sono stabili per $0 < F < 1/5$ e ξ qualunque, mentre per $1/5 < F < 1/2$ si richiede per la stabilità anche la condizione

$$\xi^2 > 4(1 - 2F)(5F - 1).$$

Per le sottoarmoniche con $z = 0$, se si calcola l'equazione caratteristica

$$\mu^3 - A_1 \mu^2 + A_2 \mu - A_3 = 0,$$

si ottiene subito

$$A_3 = 8(\alpha - \beta)^2 \cdot 4\beta F(1 - 2F)^2 > 0,$$

e quindi esse sono sempre instabili.

Infine, studiamo la stabilità delle sottoarmoniche con $z \neq 0$ limitandoci al caso $\xi = 0$, in cui la matrice caratteristica è:

$$(15.5) \begin{bmatrix} 2\beta \left(1 - 2F - z_0^2 - \frac{r_0^2}{2}\right) & \beta(-2z_0 r_0 - E_0 \sin 2\varphi_0) & 0 \\ (\alpha - \beta)(-2r_0 z_0 - r_0 E_0 \sin 2\varphi_0) & (\alpha - \beta) \left(-\frac{r_0^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha - \beta) \left(1 - 2F - z_0^2 - \frac{r_0^2}{4}\right) \end{bmatrix}.$$

Si ha così subito un esponente caratteristico

$$\mu_1 = 2(\alpha - \beta)(1 - 2F - \xi - \eta).$$

Imponendo che sia $\mu_1 < 0$, si trova la condizione di stabilità:

$$(15.6) \quad \zeta + \eta > 1 - 2F.$$

Essa esclude dalla stabilità i punti sotto la retta parallela all'asse della para-

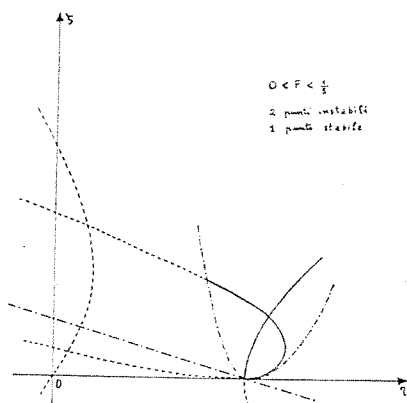


Fig. 16.

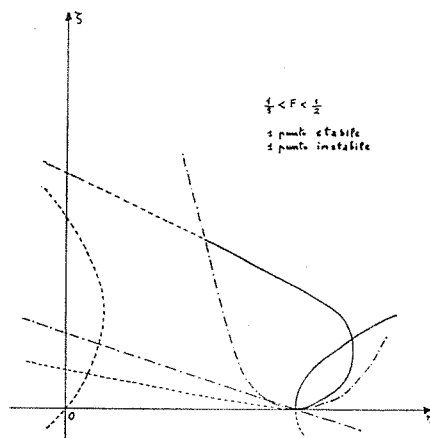


Fig. 17.

bola passante per $\bar{P}(1-2F, 0)$. Gli altri due esponenti caratteristici verificano l'equazione:

$$(15.7) \quad \mu^2 - A_1 \mu + A_2 = 0,$$

con

$$\begin{cases} A_1 = 2\beta(1-2F-\zeta-\eta) - 2\alpha\eta, \\ A_2 = -4\beta\eta(\alpha-\beta) \left[1-2F-\zeta-2\eta + \frac{1}{\zeta}(1-2F+\zeta-\eta)^2 \right]. \end{cases}$$

La prima condizione di stabilità ($A_1 < 0$) è verificata per i punti in cui vale la (15.6); la seconda invece ($A_2 > 0$) limita i punti stabili al ramo di destra dell'iperbole (15.4) nella parte che sta nel primo quadrante. Si conclude (vedi Figure 16 e 17) che se $0 < F < \frac{1}{2}$ vi è sempre una soluzione stabile di questo tipo con $z \neq 0$, mentre per $F > \frac{1}{2}$ sufficientemente grande tutte le soluzioni con $z \neq 0$ sono instabili. Infatti, l'equazione $A_2 = 0$ rappresenta una iperbole di centro (η_0, ζ_0) con

$$\eta_0 = \frac{3}{4}(1-2F), \quad \zeta_0 = -\frac{1}{8}(1-2F),$$

tangente all'asse η nel punto $\eta = 1 - 2F$. Le direzioni asintotiche sono quelle delle rette $\eta = 0$ e $\eta = 4\xi$. Solo un ramo di questa iperbole sta nel 1° quadrante. È allora immediato notare che non vi possono essere punti stabili sul ramo di iperbole (15.4) che sta a sinistra. Infatti il punto a tangente verticale su questo ramo ha ascissa $\eta = (3/7)(1 - 2F)$, mentre l'asintoto verticale della

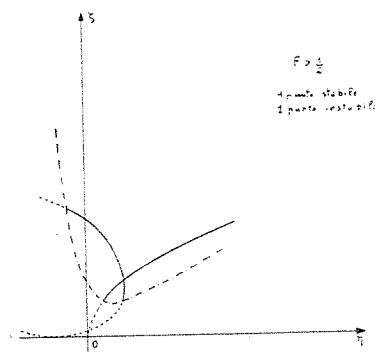


Fig. 18.

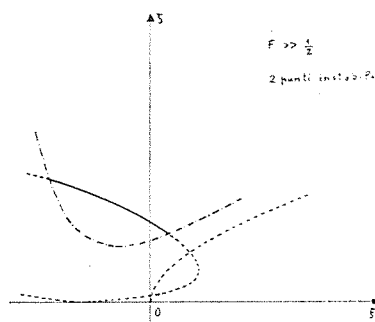


Fig. 19.

iperbole di stabilità ha equazione $\eta = (3/4)(1 - 2F)$. Perciò, per tutti i punti del ramo di sinistra dell'iperbole (15.4) vale la condizione $A_2 < 0$.

È da notare che il punto $\xi = 0$, $\eta = 1 - 2F$ appare nelle figure come neutrale nei riguardi della stabilità mentre abbiamo già mostrato, studiando le sottoarmoniche con $z = 0$, che esso è instabile. L'apparente contraddizione è sanata dall'osservare che la matrice (15.5) è matrice caratteristica solo per le soluzioni corrispondenti a $z \neq 0$, $r \neq 0$.

Nel caso $\xi \neq 0$ vi sono maggiori difficoltà di carattere formale, in quanto la equazione degli esponenti caratteristici è ora di terzo grado irriducibile [nella (15.5) compaiono ora al posto degli zeri delle espressioni contenenti ξ]. Dal punto di vista qualitativo non sembra utile approfondire la già lunga discussione.

Bibliografia.

- [1] A. C. GARIBALDI, *Vibrazioni forzate di particolari sistemi non lineari, in due gradi di libertà*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963).
- [2] M. L. CARTWRIGHT, *Forced oscillations in non linear systems* (contributions to the theory of non linear oscillations) (I), Princeton 1950.

- [3] G. SANSONE, *Non linear differential systems of the third and fourth order in differential equations and their applications*, Praha 1963.
- [4] N. MINORSKY, *Non linear oscillations*, Van Nostrand, Princeton 1962.
- [5] K. O. FRIEDRICHS, *On non linear vibrations of third order* (studies in non linear vibration theory), Institute of Mathematics and Mechanics, New York University 1946.
- [6] L. L. RAUCH, *Oscillation of a third order non linear autonomous system* (contributions to the non linear oscillation theory), Princeton 1950.
- [7] G. COLOMBO, *Sull'equazione differenziale non lineare del 3° ordine di un circuito oscillante triodico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 19 (1950).
- [8] Y. ROCARD, *Dynamique générale des vibrations*, Masson et C^{ie}, Paris 1949.
- [9] N. W. MAC LACHLAN, *Ordinary non linear differential equations in engineering and physical sciences*, Oxford 1950.
- [10] J. J. STOKER, *Non linear vibrations*, Interscience, New York 1950.
- [11] L. CESARI, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer Verlag, 1959.
- [12] G. COLOMBO, *Sopra un singolare caso che si presenta in un problema di stabilità in meccanica non lineare*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 22 (1953).
- [13] C. OBI, *Subharmonic solutions of non linear differential equations of the second order*, J. London Math. Soc. 25 (1950).

* * *