Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 243-254

GIOVANNI FERRERO (*)

Struttura degli «stems» p-singolari. (**)

Introduzione.

In ricerche precedenti ([4], [5]) abbiamo visto che per qualche «stem» di tipo particolare possono essere stabiliti teoremi analoghi al primo teorema di SYLOW; tuttavia abbiamo pure rilevato che esiste qualche stem G che è p-singolare, nel senso che il suo ordine è multiplo di un numero primo p senza che G contenga sottostems proprii il cui ordine sia multiplo di p. In questo lavoro abbiamo iniziato lo studio della struttura degli stems cosiffatti.

Abbiamo anzitutto osservato il fatto fondamentale che uno stem p-singolare è fortemente monogeno. Abbiamo poi suddiviso gli stems p-singolari in due classi a seconda che essi siano «semplici» nel senso di BLACKETT o meno; le relative caratterizzazioni sono fornite dai teoremi 16 e 18.

Abbiamo provato tra l'altro che uno stem p-singolare semplice è abeliano elementare, ed abbiamo visto che gli stems p-singolari non semplici non sono neppure semisemplici; inoltre il loro gruppo additivo non è speciale. A partire da un'altro risultato, in un certo senso marginale, abbiamo verificato che non esistono stems 2-singolari; di qui si deduce facilmente che ogni stem di ordine pari contiene un sottostem di ordine 2.

§ 1. - Definizioni e premesse.

1. – Qui, come in [4], chiamiamo stem un quasi-anello completo sinistro G (su cui non facciamo l'ipotesi che il prodotto ordinato dello zero di G per un ele-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. — Ricevuto: 29-XII-1966.

mento qualunque sia eguale allo zero). Poichè trattiamo di questioni aritmetiche supponiamo che G abbia un numero finito di elementi.

Per i termini che non introdurremo esplicitamente seguiamo ancora la terminologia di [4], [5], un poco diversa da quella dei lavori inglesi e tedeschi sull'argomento.

Per ogni numero primo p (in tutto il lavoro p indicherà un numero primo) è possibile introdurre il concetto di stem p-singolare, suscettibile di due definizioni equivalenti.

Definizione I. – Diciamo che *uno stem G è p-singolare* se il suo ordine è un multiplo proprio di p, ma G non contiene sottostems proprii il cui ordine sia uguale a p o ad un multiplo di p.

Se G è uno stem p-singolare ed a è un suo elemento di caratteristica p (1), il sottostem S generato da a, per il teorema di LAGRANGE, ha ordine multiplo di p (od eguale a p) e pertanto S coincide con G.

D'altronde, se uno stem G è generato (come stem) da ciascuno dei suoi elementi di caratteristica p, accade che un suo qualunque sottostem S avente ordine multiplo di p contiene (per il primo teorema di SYLOW) almeno un elemento di caratteristica p, e dunque S coincide con G. Pertanto la Definizione I è equivalente alla

Definizione II. – *Uno stem G è p-singolare* se non ha ordine p, ma è generato da ciascuno dei suoi elementi di caratteristica p.

2. – Per collegare lo studio degli stems p-singolari alle ricerche sulle proposizioni « tipo SYLOW » relative ai quasi-anelli enunciamo il

Teorema 1. *Uno stem G il cui ordine sia divisibile per un numero primo p, ma che non contenga sottostems di ordine p, contiene almeno un sottostem p-singolare (eventualmente coincidente con G).*

Dimostriamo il teorema per induzione sull'ordine n di G. Se $n = p$ la questione non si pone. Se G è p-singolare il teorema è senz'altro verificato. Se G non è p-singolare contiene (per la Definizione II) almeno un elemento, diciamo a, che ha caratteristica p ma non genera tutto G. Diciamo A il sottostem di G generato da a. Evidentemente A ha ordine multiplo di p e minore dell'ordine di G. Per l'ipotesi di induzione, A contiene un sottostem p-singolare che sarà, naturalmente, un sottostem di G. Il teorema è così dimostrato.

Osservazione 2. – Il gruppo additivo G^+ di uno stem p-singolare G è generato dall'insieme dei suoi elementi di caratteristica p.

---

(1) Ricordiamo che la caratteristica di un elemento c di uno stem G è l'ordine di a nel gruppo additivo di G.

Si consideri il sottogruppo P di G^+ generato (addittivamente) dagli elementi di G che hanno caratteristica p. Si tratta di un sottogruppo pienamente invariante ([2]) di G^+. Pertanto P è un sottostem di G, anzi addirittura un ideale sinistro di G, dal momento che il prodotto di un elemento di G per uno di P è ancora un elemento di P. Naturalmente l'ordine di P è multiplo di p, e, se G è p-singolare, P coincide addirittura con G.

3. – A questo punto introduciamo alcuni semplici concetti e proposizioni che saranno utili nel seguito.

Consideriamo uno stem G, un suo elemento z, e lo zero di G' che indicheremo come al solito con 0. Sappiamo che $z\,0 = 0$. Orbene, diciamo che «z divide lo zero a sinistra (oppure che è un divisore dello zero a sinistra» se esiste un elemento y diverso da zero tale che $z\,y = 0$. Ciò posto introduciamo la seguente

Definizione III. – Uno stem G dicesi *monogeno* se contiene almeno un elemento che non divide lo zero a sinistra. Dicesi *fortemente monogeno* se è monogeno e se inoltre, per ogni x di G che divide lo zero a sinistra, è $x\,G = 0$ ([3]).

Nel caso finito si può anche dire che lo stem G è fortemente monogeno se, e solo se, per ogni a di G la corrispondenza

$$\Phi_a: \qquad x \rightarrow a\,x\,,$$

è un automorfismo del gruppo additivo di G, salvo che mandi tutti gli elementi nello zero (sia cioè l'endomorfismo nullo).

Sempre nel caso finito le Φ_a diverse dall'endomorfismo nullo formano un gruppo $\{\Phi\}$. Si tratta infatti di sostituzioni sugli elementi di G, e il prodotto $\Phi_a \circ \Phi_b$ manda il generico x di G in $a(bx) = (ab)x$; per la proprietà associativa del prodotto definito in G è dunque $\Phi_a \circ \Phi_b = \Phi_{ab}$.

Osservazione 3. – Uno stem finito fortemente monogeno G ammette almeno una unità sinistra ε.

Infatti nel gruppo $\{\Phi\}$ c'è necessariamente l'automorfismo identico 1. Pertanto esiste in G almeno un elemento ε tale che $\Phi_\varepsilon = 1$, ed ε risulta ovviamente unità sinistra rispetto al prodotto definito in G.

([2]) Perchè ogni endomorfismo di G^+ manda elementi di caratteristica p in elementi di caratteristica p oppure nello zero, e dunque manda P in un suo sottogruppo (eventualmente improprio).

([3]) Questa definizione è coerente con quelle date da Betsch nella sua Tesi [1], § 1. Con la terminologia di Betsch, nel caso finito, uno stem fortemente monogeno G è uno stem il cui gruppo additivo, interpretato in modo naturale come G–gruppo, è fortemente monogeno.

Lemma 4. – *Si considerino: uno stem fortemente monogeno G; un elemento x di G tale che la corrispondenza Φ_x sia diversa dall'endomorfismo nullo; una Φ_a non nulla che muti x in se stesso. Allora Φ_a è l'automorfismo identico.*

Per ipotesi abbiamo $a x = x$. Pertanto per ogni z di G è $a x z = x z$, e dunque $\Phi_{ax} = \Phi_x$. Allora, per quanto è stato osservato dopo la definizione di stem fortemente monogeno, risulta $\Phi_a \circ \Phi_x = \Phi_x$. Ragionando nel gruppo $\{\Phi\}$, se ne deduce subito che Φ_a è l'automorfismo identico.

§ 2. - Prime proprietà degli «stems» p-singolari.

4. – Siamo ora in grado di iniziare lo studio degli stems p-singolari.

Teorema 5. *Uno stem p-singolare è fortemente monogeno.*

Dimostrazione. Sia x un elemento qualunque dello stem p–singolare G.

a) L'insieme $x G$ è un ideale destro (e quindi un sottostem) di G.

Infatti, se g ed h appartengono a G, è:

$$x g - x h = x(g - h) \in x G, \qquad (x g)h = x(g h) \in x G .$$

b) L'ideale $x G$ coincide con G, oppure si riduce al solo zero.

Supponiamo che $x G$ non coincida con G. Allora $x G$ non può contenere elementi di caratteristica p, perchè G è p-singolare. Di conseguenza l'endomorfismo di G^+,

$$\Phi_x : \quad y \to x y \qquad (y \text{ variabile in } G),$$

trasforma ogni elemento di caratteristica p nello zero di G. D'altronde, ogni elemento di G è somma di elementi di caratteristica p (Osservazione 2), e pertanto Φ_x manda tutti gli y di G nello zero di G. Concludendo, se $x G \neq G$, risulta $x G = 0$.

c) Esiste in G almeno un y per cui $y G = G$.

Infatti, per quanto abbiamo visto nel comma b), se ciò non accadesse, G sarebbe uno zero-stem ([4]), ed allora qualunque sottogruppo di ordine p di G sarebbe un sottostem di G, contro l'ipotesi che G sia p-singolare.

([4]) Cioè il prodotto di due qualunque elementi di G sarebbe nullo.

In definitiva, dalle proprietà dimostrate nei commi b) e c) segue che G è fortemente monogeno. Ciò equivale a dire che una Φ_a è un automorfismo di G^+ quando a non divide lo zero a sinistra, mentre coincide con l'endomorfismo nullo negli altri casi.

Corollario 6. – *Se G è p-singolare, ed a è un suo elemento che non divide lo zero a sinistra, l'equazione (in x) $a\,x = g$, con $g \in G$, ammette una ed una sola soluzione.*

Per la verifica basta osservare che non può essere $a\,G = 0$ in quanto a non divide lo zero a sinistra, e dunque è $a\,G = G$ per il Teorema 5. Anzi, poichè G è finito, l'endomorfismo Φ_a: $x \to a\,x$ è addirittura un automorfismo di G. Pertanto, fissato comunque un g di G, si può trovare un x tale che $a\,x = g$. D'altronde non esiste un $x' \neq x$ tale che $a\,x' = g$, perchè allora si avrebbe $a\,x = a\,x'$ e dunque $a(x - x') = 0$, ed a dividerebbe lo zero a sinistra.

Corollario 7. – *Se G è p-singolare, ed x è un suo elemento che divide lo zero a sinistra, si ha $x\,G = 0$.*

Si tratta di una conseguenza immediata del Teorema 5 (si pensi al comma b)).

Corollario 8. – *Se G è p-singolare, ogni sottogruppo caratteristico H di G è un suo ideale sinistro.*

Ovvio. Basta osservare che tutte le Φ_a non nulle sono automorfismi di G^+, e dunque mutano H in se stesso.

Teorema 9. – *Se G è p-singolare, risulta $0G = 0$.*

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo dunque che $0\,G \neq 0$. Allora 0 non è divisore dello zero a sinistra, e pertanto Φ_0 è un automorfismo di G.

D'altra parte, poichè

$$0(0\,x) = (0\,0)x = 0x,$$

risulta

$$\Phi_0 = \Phi_0 \circ \Phi_0 .$$

Tenuto presente il Lemma 4, si deduce che $\Phi_0 = 1$, vale a dire che $0\,y = y$ per ogni y.

Allora

$$x(0\,y) = x\,y, \qquad (x\,0)y = 0\,y = y .$$

Quindi:

$$x\,y = y ,$$

comunque si scelgano x ed y in G.

Si deduce che G è uno stem rettangolare (cfr. [5], pag. 652); ma ciò è assurdo perchè uno stem rettangolare avente ordine divisibile per p contiene un sottostem d'ordine p ([5], teorema 3, pag. 656), e perciò non è p-singolare.

Corollario 10. – *Se G è uno stem p-singolare, ed a è un suo elemento che non divide lo zero a sinistra, esistono in G un elemento a' ed una unità sinistra ε' tale che $a = a'\,\varepsilon'$* (5).

Siano ε una unità sinistra di G (esistente per il Teorema 5 e per l'Osservazione 3), ed a un elemento di G che non divida lo zero a sinistra. Per il Corollario 6 l'equazione (in x) $a = (a\,\varepsilon)x$ ammette una soluzione ε'. Per dimostrare il Corollario 10 basta provare che ε' è unità sinistra. Ora, per ogni y di G è $a\,y = a\,\varepsilon\,\varepsilon'\,y$. Poichè ε è unità sinistra è dunque $a\,y = a\,\varepsilon'\,y$. Ne segue che $\Phi_a = \Phi_{a\varepsilon'}$. Osserviamo ora che $\Phi_{\varepsilon'}$ è diverso dall'endomorfismo nullo perchè ε' non divide lo zero a sinistra (6). Applicando il Lemma 4 si deduce che $\Phi_{\varepsilon'} = 1$, e pertanto ε' è unità sinistra in G.

5. – Osservazione 11. – Si considerino uno stem p-singolare G ed un suo sottogruppo P d'ordine p. P contiene almeno un elemento a che non risulta nè unità sinistra, nè divisore dello zero a sinistra.

Infatti, se tutti gli elementi di P fossero divisori dello zero a sinistra, il prodotto di un elemento qualunque di P e di un elemento di G sarebbe zero (Corollario 7), sicchè P sarebbe un ideale destro di G, e quindi un sottostem di G. D'altronde, se tutti i non divisori dello zero a sinistra di P fossero delle unità sinistre P sarebbe ancora un sottostem di G.

Teorema 12. – *Se G è uno stem p-singolare, ogni suo sottogruppo P di ordine p contiene almeno due elementi distinti che non sono divisori dello zero a sinistra. Di questi almeno uno non è unità sinistra.*

Consideriamo in P un elemento a che soddisfi alle condizioni della Osservazione 11. È necessariamente $a \neq 0$, perchè a non divide lo zero a sinistra (infatti se fosse $a = 0$, a norma del Teorema 9 si avrebbe $a\,y = 0$ per ogni y, ed a risulterebbe un divisore dello zero a sinistra).

Per il Corollario 10 esistono in G un elemento a' ed un'unità sinistra ε' tali che $a = a'\,\varepsilon'$. Si osservi inoltre che in virtù del Corollario 7 l'elemento a' non divide lo zero a sinistra, perchè $a'\,\varepsilon' = a \neq 0$; pertanto l'endomorfismo $\Phi_{a'}\colon\ x \to a'\,x$ è un automorfismo di G^+. Poichè $\Phi_{a'}$ associa ad ε' l'elemento a di caratteristica p, se ne deduce che anche ε' ha caratteristica p. Sia P' il sottogruppo di G^+ generato da ε'. A norma dell'Osservazione 11, P' contiene almeno un elemento b che non risulta nè unità sinistra, nè divisore dello zero a sinistra. L'elemento b è diverso dallo zero ed anche da ε'.

(5) Un risultato più completo potrebbe essere ottenuto utilizzando le considerazioni del Clifford-Preston [3] a pag. 38. Del resto il tutto sarà messo meglio in luce in un mio prossimo lavoro.

(6) Infatti, se ε' fosse un divisore sinistro dello zero, esisterebbe un $y \neq 0$ tale che $\varepsilon'\,y = 0$, sicchè si avrebbe pure $a\,\varepsilon'\,y = 0$, epperò $a\,y = 0$. Ma ciò è assurdo poichè a non divide lo zero a sinistra.

Poichè l'automorfismo $\Phi_{a'}$ di G^+ manda ε' in a, l'elemento $a'b$ sta in P; inoltre $a'b$ è diverso da $a = a'\varepsilon'$, perchè ε' è diverso da b e $\Phi_{a'}$ è un automorfismo. Inoltre $a'b \neq 0$ perchè $b \neq 0$ ed a' non divide lo zero a sinistra.

Si osservi infine che $a'b$ non divide lo zero a sinistra: altrimenti esisterebbe un $y \neq 0$ tale che $a'by = 0$, cioè $a'(by) = 0$; ma ciò è assurdo in quanto $by \neq 0$ (dal momento che b è stato scelto tra i non divisori dello zero a sinistra) ed a' non divide lo zero a sinistra.

Concludendo, abbiamo trovato due elementi, a ed $a'b$, che soddisfano alle condizioni dell'enunciato.

Lemma 13. – *Sia G uno stem p-singolare, ed a un suo elemento che non sia unità sinistra nè divisore dello zero a sinistra. Inoltre, per un certo x di G diverso da zero, sia $ax = x$. Allora la caratteristica di x è un numero primo con p.*

Infatti l'insieme C_a degli x di G per cui risulta $ax = x$ è un sottostem di G (7). Poichè G è p-singolare C_a non ha elementi di caratteristica p o multipla di p fuorchè nel caso in cui esso coincida con G (8), caso escluso dall'ipotesi che a non sia unità sinistra.

Corollario 14. – *Non esistono stems 2-singolari.*

Per il Teorema 12 un qualunque sottogruppo di ordine 2 di uno stem 2-singolare dovrebbe contenere due elementi distinti che non dividono lo zero a sinistra, ma ciò è impossibile perchè un tale sottogruppo è formato soltanto da due elementi uno dei quali (lo zero) per il Teorema 9 divide lo zero a sinistra.

Concludiamo il § con il

Teorema 15. *Uno stem di ordine pari contiene almeno un sottostem di ordine 2.*

Si tratta di una conseguenza immediata del Teorema 1 e del Corollario 14.

§ 3. - Caso semplice.

6. – Prima di studiare più dettagliatamente una classe di stems p-singolari che diremo semplici, riportiamo, per comodità del Lettore, cose note della teoria degli stems. Per le dimostrazioni si vedano i lavori [1] e [2] riportati nella Bibliografia. Si faccia però attenzione al fatto che la terminologia varia notevolmente da autore ad autore.

---

(7) Se infatti $ax = x$ ed $ay = y$, è $a(x-y) = ax - ay = x - y$ ed $a(xy) = (ax)y = xy$.

(8) Infatti se C_a avesse un elemento di caratteristica p o multipla di p, il suo ordine sarebbe divisibile per p. In tal caso C_a coinciderebbe con G per la definizione di stem p-singolare.

Siano G e G' due stems. Una funzione f che trasformi gli elementi di G in elementi di G' è per definizione un omomorfismo di G in G' se, qualunque siano gli elementi g ed h di G, è

$$f(g+h)=f(g)+f(h), \qquad f(g\,h)=f(g)\,f(h)\,.$$

L'insieme degli elementi che f manda nello zero di G' prende il nome di nucleo dell'omomorfismo f.

Un ideale-nucleo dello stem G è per definizione un sottoinsieme di G che è nucleo di qualche omomorfismo di G in un opportuno stem G' (9).

Un sottoinsieme I dello stem G è un ideale-nucleo di G se e solo se

a) I è un sottogruppo normale di G^+;

b) il prodotto di un elemento di G e di un elemento di I è ancora un elemento di I (I è cioè un ideale sinistro di G);

c) qualunque siano gli elementi i di I, g ed h di G, l'elemento $(g+i)h-g\,h$ è ancora un elemento di I.

Se $0\,G=0$ ed I è un ideale-nucleo di G, ponendo $g=0$ nella condizione c) si ottiene che $(0+i)h-0\,h=i\,h$ sta in I, cioè il prodotto di un elemento di I e di un elemento di G sta ancora in I. Allora I è, colla nostra nomenclatura, un ideale destro di G.

Adattiamo ora al caso che ci interessa la definizione di stem semplice data da BLACKETT in [2].

Definizione IV. – Uno stem finito G è *semplice* se:

I) $0\,G=0$;

II) G non ha ideali-nuclei proprii;

III) G non contiene ideali destri S diversi da $\{0\}$ tali che $S\,G=0$ (tali cioè che il prodotto di un elemento s di S e di un elemento g di G sia sempre nullo) (10).

---

(9) La maggior parte degli autori indica semplicemente come « ideali » gli ideali-nucleo.

(10) A parte la nomenclatura e la forma degli enunciati, le differenze tra la nostra definizione e quella di BLACKETT ([2], pag. 780) si riducono alle seguenti:

1) noi scriviamo esplicitamente la condizione I), che BLACKETT sottointende perchè in tutto il lavoro si interessa soltanto degli stems che soddisfano a tale condizione;

2) BLACKETT aggiunge una condizione catenaria di finitezza che noi sottointendiamo perchè ci occupiamo di stems finiti, in cui tale condizione è sempre soddisfatta;

3) i nostri ideali destri sono chiamati dal BLACKETT « right-modules », cioè moduli destri (cfr. [2], pag. 773).

7. – Possiamo ora enunciare il

Teorema 16. *Se G è uno stem p-singolare, si equivalgono le seguenti condizioni:*

I) *l'ordine di G è una potenza di p;*

II) *il gruppo additivo G^+ di G è speciale;*

III) *il gruppo additivo G^+ di G è abeliano elementare;*

IV) *le Φ_a: $x \to ax$ diverse dall'endomorfismo nullo e dall'identità sono automorfismi di G^+ privi di coincidenze (non banali)* (11);

V) *Una delle Φ_a è un automorfismo di G^+ che ha ordine primo ed è privo di coincidenze (non banali);*

VI) *G è uno stem semplice.*

Per la dimostrazione basta mostrare che:

I) $\Longrightarrow$ II) $\Longrightarrow$ III) $\Longrightarrow$ IV) $\Longrightarrow$ V) $\Longrightarrow$ II) $\Longrightarrow$ I) $\Longrightarrow$ VI) $\Longrightarrow$ I).

Il fatto che I) $\Longrightarrow$ II) è ovvio perchè, nel caso finito, tutti i p-gruppi sono speciali.

Mostriamo che II) $\Longrightarrow$ III). Se G^+ è speciale, esso è prodotto diretto di gruppi primari, uno dei quali è un p-gruppo non indentico. Il centro C^+ di G^+ è il prodotto diretto dei centri di tali gruppi, e, poichè il centro di ciascuno di questi non si riduce all'identità, l'ordine di C^+ è un multiplo di p. D'altronde C^+ è un sottogruppo caratteristico di G^+ e pertanto, per il Corollario 8, i suoi elementi formano un sottostem C di G.

Poichè G è p-singolare e l'ordine di C è multiplo di p, C coincide con G, e G^+ è abeliano. Poichè G^+ è generato dall'insieme dei suoi elementi di caratteristica p (Osservazione 2), G^+ risulta abeliano elementare, e la cosa è dimostrata.

Verifichiamo che III) $\Longrightarrow$ IV). Per il Lemma 13 le eventuali coincidenze non nulle di una Φ_a dovrebbero avere caratteristica prima con p, e ciò si esclude perchè G^+ è, per le ipotesi fatte, un p-gruppo.

Inoltre IV) $\Longrightarrow$ V) perchè le Φ_a non nulle, per il Teorema 5 e per l'osservazione che segue la definizione di stem fortemente monogeno, formano un gruppo $\{\Phi\}$, e tale gruppo contiene certamente un elemento di ordine primo.

Del resto V) $\Longrightarrow$ II) perchè, per un noto teorema di Thompson (12), se un gruppo G ammette un automorfismo di ordine primo e privo di coincidenze non banali, allora il gruppo è speciale.

---

(11) Una coincidenza non banale di Φ_a è un elemento $x \neq 0$ di G^+, tale che $\Phi_a(x) = x$, cioè tale che $a\,x = x$.

(12) Cfr. [6].

Evidentemente poi II) $\Longrightarrow$ I) perchè, essendo G p-singolare, se G^+ è speciale il suo unico p-gruppo di SYLOW (caratteristico in G^+) risulta (a norma del Corollario 8), un sottostem di G e dunque coincide con G.

Inoltre I) $\Longrightarrow$ VI). Infatti se G è p-singolare e primario, esso non contiene sottostems proprii e a maggior ragione non contiene ideali-nuclei proprii. Inoltre $0\,G = 0$ per il Teorema 9.

Per completare la dimostrazione del teorema resta da dimostrare che VI) $\Longrightarrow$ I). Ciò sarà acquisito al termine della dimostrazione del Teorema 17.

L'esistenza degli stems p-singolari semplici sarà discussa in un prossimo lavoro.

§ 4. - Caso non semplice.

8. – Ricordiamo che uno stem dicesi nilpotente quando esiste un intero n tale che il prodotto di n qualunque elementi di G sia nullo. Ciò posto introduciamo la seguente

Definizione V [13]. – Uno stem finito G dicesi *semisemplice* se $0\,G = 0$ e se G non ha ideali destri nilpotenti non nulli.

Facciamo presente che uno stem finito semplice è anche semisemplice (cfr. [2], pag. 780, Teorema 7).

Gli stems p-singolari che non sono semplici, che non soddisfano cioè alle condizioni del Teorema 16, soddisfano invece alle condizioni del seguente

Teorema 17. *Se G è uno stem p-singolare si equivalgono le seguenti condizioni:*

I) *l'ordine di G non è una potenza di p;*

II) *una delle Φ_a non è identica ed ammette una coincidenza non banale* [14];

III) *le coincidenze di ciascuna delle Φ_a non identiche e non nulle formano un p'-gruppo non banale* [15] *costituito da elementi x tali che $x\,G = 0$;*

IV) *G non è semisemplice.*

Per la dimostrazione basta mostrare che:

$$\text{I)} \Longrightarrow \text{II)} \Longrightarrow \text{III)} \Longrightarrow \text{IV)} \Longrightarrow \text{I)}.$$

---

(13) Cfr. [2], pag. 775. La definizione di BLACKETT ha qui subito un ritocco analogo a quello subito dalla definizione di stem semplice. Anche qui nei casi che ci interessano la nostra definizione coincide con quella di BLACKETT.

(14) Esistono cioè in G un a che non è una unità sinistra ed un $x \neq 0$ tali che $a\,x = x$.

(15) Chiamiamo p'–gruppo un gruppo avente ordine primo con p.

Verifichiamo che I) $\Longrightarrow$ II). Per i commi I), V) del Teorema 16, se ciascuna Φ_a non identica e non nulla fosse priva di coincidenze non banali, il gruppo additivo G^+ sarebbe un p-gruppo, cosa esclusa dall'ipotesi I).

Mostriamo che II) $\Longrightarrow$ III). Se una Φ_a non identica e non nulla ammette una coincidenza non banale non vale la condizione IV) del Teorema 16, e dunque neppure la V). Pertanto ogni Φ_a non identica e non nulla ammette un gruppo C_a non identico di coincidenze. Per il Lemma 13 se x sta in C_a (se cioè $a\,x = x$), x ha caratteristica prima con p. Pertanto C_a è un p'–gruppo non indentico. Inoltre Φ_x è l'endomorfismo nullo (vale a dire $x\,G = 0$). Invero, se ciò non accadesse, si dedurrebbe dal Lemma 4 che Φ_a è l'automorfismo identico, cosa assurda. Questo completa la dimostrazione.

Dimostriamo ora che III) $\Longrightarrow$ IV). Consideriamo una Φ_a non identica e non nulla (che esiste certamente, per l'Osservazione 11), e l'insieme C_a delle sue coincidenze. Per ipotesi $C_a\,G = 0$, e dunque C_a è un ideale destro nilpotente di G (in quanto $C_a\,C_a = 0$). Poichè per ipotesi C_a non si riduce allo zero, G contiene un ideale destro nilpotente non nullo e pertanto G non è semisemplice.

Inoltre IV) $\Longrightarrow$ I). Invero se, per assurdo, G^+ fosse un p-gruppo, lo stem G sarebbe semplice, a norma del Teorema 16, mentre abbiamo ricordato poco sopra che uno stem semplice è anche semisemplice.

Possiamo ora completare la dimostrazione del Teorema 16.

Infatti se G è uno stem p-singolare semplice [vale a dire soddisfa la condizione VI) del Teorema 16], esso non soddisfa alla condizione IV) del Teorema 17, e pertanto non soddisfa nemmeno alla condizione I) di quest'ultimo Teorema. Si conclude che l'ordine di G è una potenza di p, come volevasi dimostrare.

9. – Corollario 18. – *Uno stem G il cui ordine non sia potenza di un numero primo non può essere singolare rispetto a tutti i numeri primi che dividono il suo ordine.*

Se infatti G fosse singolare rispetto a ciascun divisore primo del suo ordine, allora ogni C_a, gruppo delle coincidenze di una Φ_a non identica e non nulla, dovrebbe avere ordine ν primo con tutti i fattori primi dell'ordine n di G [Teorema 17, condizione III)], quindi ν sarebbe primo con n, il che è assurdo, essendo C_a un sottogruppo di G.

Corollario 19. – *Si considerino uno stem finito G privo di elementi nilpotenti ed un qualunque numero primo p che divida l'ordine di G. Lo stem G contiene un sottostem S il cui ordine è una potenza di p (S può eventualmente coincidere con G).*

Infatti se G non contiene sottostems di ordine p, esso contiene, per il Teorema 1, uno stem p-singolare. Quest'ultimo stem, essendo privo di elementi nilpotenti non soddisfa la condizione III) del Teorema 17 ([16]). Si tratta pertanto di uno stem p-singolare semplice ed il suo ordine è una potenza di p.

Osservazione 20. – Se G è uno stem finito i cui p-gruppi di SYLOW sono ciclici, G possiede un sottostem di ordine p, oppure un elemento nilpotente di caratteristica prima con p.

Se G non ha sottostems di ordine p, esso contiene un sottostem p-singolare G'. Se G' non è semplice, esso contiene un elemento nilpotente di caratteristica prima con p, e la proposizione è allora dimostrata.

D'altronde G' non può essere semplice perchè in tal caso il suo gruppo additivo sarebbe un p-gruppo abeliano non ciclico, il che contraddice l'ipotesi che i p-gruppi di SYLOW di G siano ciclici.

([16]) Infatti la condizione III) implica che l'insieme delle coincidenze x di ciascuna Φ_a non identica non sia vuoto. Inoltre, poichè $x\,G = 0$ risulta pure $x^2 = 0$, in altri termini x è nilpotente.

Bibliografia.

[1] G. BETSCH, *Struktursätze für Fastringe*, Dissertation, Tübingen 1963.

[2] D. H. BLACKETT, *Simple and semisimple near-rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 772-785.

[3] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. 1, Mathematical Surveys n. 7, American Mathematical Society, Providence 1961.

[4] G. FERRERO, *Sulla struttura aritmetica dei quasi-anelli finiti*, Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **97** (1962-63), 1114-1130.

[5] G. FERRERO, *Sui problemi «tipo Sylow» relativi ai quasi-anelli finiti*, Atti Acc. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **100** (1965-66), 645-657.

[6] J. THOMPSON, *Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order*, Proc. Math. Acad. Sci. U.S.A. **45** (1959), 578-581.

Summary.

In a previous work the existence of near-rings the order of wich is a multiple of a prime p, non containing, however, sub-near-rings of order p, is proved. This paper gives a first contribution to the theory and classification of the near-rings somewhat minimal satisfying the above mentioned property.

* * *