Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 237-241

GIULIANO SORANI (*)

Convessità e pseudoconvessità delle varietà reali e complesse. (**)

In questa Nota si introduce una nozione di q-convessità (e q-completezza) per una varietà reale e si dimostra un teorema di annullamento dell'omologia a coefficienti interi per tali varietà q-convesse (o q-complete).

Si considera poi una varietà complessa e si studiano i legami tra il grado di pseudoconvessità, rispetto alla struttura complessa, ed il grado di convessità rispetto alla sottogiacente struttura reale.

Si mostra che il grado di pseudoconvessità della complessificata di una varietà reale V uguaglia il grado di convessità di V.

1. – Sia X una varietà reale, a base numerabile, $\dim_{\mathbf{R}} X = n$. Sia $D \subset X$ un aperto, ∂D la frontiera di D. Si dice che una funzione φ definisce la frontiera di D in $x \in \partial D$, se esiste un intorno di x, $U \subset X$, tale che:

$$D \cap U = \{ x \in X \mid \varphi(x) < 0 \} \cap U .$$

Si dice che D ha frontiera di classe C^2 se per ogni punto $x \in \partial D$ esistono un intorno U di x e una funzione φ di classe C^2 in U tali che:

(i) $\quad (\mathrm{d}\varphi)_x \neq 0,$

(ii) $\quad D \cap U = \{ x \in X \mid \varphi(x) < 0 \} \cap U .$

Sia ∂D di classe C^2, $x \in \partial D$, $T_x(\partial D)$ lo spazio tangente a ∂D in x. Indicheremo

---

(*) Indirizzo: Via Vivaldi 15, Roma, Italia.
(**) Ricevuto il 20-V-1966.

con $H(\varphi)_x^D$ la restrizione a $T_x(\partial D)$ della forma quadratica:

$$H(\varphi)_x = \sum_{i,j} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \, \partial x^j}\right]_x t^i t^j$$

su $T_x(\partial D) \times T_x(\partial D)$.

$H(\varphi)_x^D$ è una forma quadratica in $n-1$ variabili. La segnatura di $H(\varphi)_x^D$, cioè il numero degli autovalori positivi, negativi o nulli, non dipende dalla funzione φ che definisce ∂D in x nè dalla scelta delle coordinate in U.

Definizione. *D è q-convesso in x se la forma quadratica $H(\varphi)_x^D$ è non degenere ed ha q autovalori negativi.*

Sia $f\colon \ X \to \boldsymbol{R}$ una funzione di classe C^2. I punti $x \in X$ nei quali $\mathrm{d}f = 0$ si chiamano punti critici di f su X. Un punto critico si dice non degenere se $H(f)_x$ è una forma quadratica non degenere.

Se x è un punto critico non degenere, il numero degli autovalori negativi di $H(f)_x$ si chiama indice del punto critico x e si indica con $i(x)$. Detto M_i il numero dei punti critici di indice i su X, si ha la disuguaglianza di MORSE:

$$M_i \geqslant \dim_k H_i(X,\ k)$$

per ogni corpo di coefficienti k.

Definizione. *Una varietà reale X si dice q-convessa se esistono un compatto $K \subset X$ e una funzione $f\colon \ X \to \boldsymbol{R}$ di classe C^2 su $X - K$, tali che:*

(i) *gli insiemi $B_c = \{x \in X \mid f(x) < c\}$ siano relativamente compatti in X, per ogni $c \in \boldsymbol{R}$,*

(ii) *la forma quadratica $H(f)_x^{B_c}$ abbia al più q autovalori negativi in ogni punto $x \in X - K$.*

Se $K = \varnothing$, X si dice q-completa.

Teorema 1. *Sia X una varietà q-convessa relativamente ad una funzione f. Sia $c_0 = \sup\limits_K f$. Per $c > c_0$ si ha:*

$$H_i(X \bmod B_c,\ Z) = 0 \qquad \textit{per } i > q+1,$$

$$H_{q+1}(X \bmod B_c,\ Z) \qquad \textit{privo di torsione};$$

se inoltre la frontiera di B_c è differenziabile allora $H_{q+1}(X \bmod B_c,\ Z)$ è libero.

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema è sostanzialmente la stessa di quella data in [1] per il caso delle varietà complesse, perciò ne diamo solo una indicazione.

Poichè $H(f)_x^{B_c}$ ha al più q valori propri negativi in ogni punto $x \in X - K$, ne segue che $H(f)_x$ ha al più $q+1$ valori propri negativi in ogni punto critico non degenere $x \in X - K$. Quindi $i(x) \leqslant q+1$ e $M_i = 0$ per $i > q+1$ su $X - K$.

Se supponiamo che f abbia solo punti critici non degeneri su $X - K$, si ha quindi che:

$$H_i(X \bmod B_c, k) = 0 \qquad \text{per} \qquad i > q+1 .$$

Le affermazioni del teorema seguono allora da una semplice applicazione del teorema dei coefficienti universali.

L'ipotesi che f abbia solo punti critici non degeneri su $X - K$ si rimuove poi in virtù di un teorema di THOM [2].

L'ipotesi che la frontiera di B_c sia differenziabile è soddisfatta per $c > c_0$ al di fuori di un insieme avente misura di LEBESGUE nulla (teorema di SARD).

Corollario. *Se X è una varietà reale q-completa, allora:*

$$H_i(X, Z) = 0 \ \text{per} \ i > q+1, \qquad H_{q+1}(X, Z) \ \text{è libero}.$$

2. – Sia ora X una varietà complessa, $\dim_{\boldsymbol{C}} X = n$. Ricordiamo che se D è un aperto di $\boldsymbol{C}^n$, una funzione di classe C^2, $\varphi \colon D \to \boldsymbol{R}$ si dice q-plurisubarmonica in D se la forma di LEVI $L(\varphi) = \partial\bar{\partial}\varphi$ ha almeno $n - q$ autovalori positivi in ogni punto $x \in D$ (1).

La varietà X si dice q-pseudoconvessa se esistono un compatto $K \subset X$ e una funzione $\varphi \colon X \to \boldsymbol{R}$ tali che:

(i) $\varphi \mid X - K$ sia q-plurisubarmonica,

(ii) per ogni $c \in \boldsymbol{R}$ gli insiemi $B_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$ siano relativamente compatti in X.

Se $K = \varnothing$, X si dice q-completa; se inoltre è $q = 0$, X è una varietà di STEIN.

Rispetto alla struttura reale sottogiacente alla struttura complessa di X si possono anche definire le nozioni, introdotte al n. **1**, di q-convessità e di q-com-

(1) Seguendo un recente indirizzo, diciamo qui q-plurisubarmonica una funzione che in [1] è chiamata $(q+1)$-plurisubarmonica.

pletezza (reale). Indichiamo con $g_{\boldsymbol{R}}(X)$ e con $g_{\boldsymbol{C}}(X)$ il grado di completezza rispetto alla struttura reale e, rispettivamente, complessa.

Si ha: $0 \leqslant g_{\boldsymbol{R}} \leqslant 2n-1$, $0 \leqslant g_{\boldsymbol{C}} \leqslant n$.

Sia $x \in X$ e siano $z^\alpha = x^\alpha + i\, x^{n+\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ coordinate complesse locali in un intorno di x. Si ha il seguente

Lemma. *Sia φ: $X \to \boldsymbol{R}$ una funzione differenziabile. Sia $x \in X$ e sia $\nu(\varphi)$ il numero degli autovalori positivi della forma Hermitiana* $\partial\bar\partial\varphi = \sum_{\alpha,\beta} \left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\, \partial \overline{z^\beta}}\right]_x u^\alpha \overline{u^\beta}$ *nel punto x. Posto $u^\alpha = t^\alpha + i\, t^{n+\alpha}$, sia $i(\varphi)$ il numero dei valori propri negativi della forma quadratica* $\sum_{i,j} \left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\, \partial x^j}\right]_x t^i t^j$. *Allora:*

$$\nu(\varphi) + i(\varphi) \leqslant 2n\,.$$

Per la dimostrazione di questo lemma vedasi [**1**].

Dal precedente lemma si traggono immediatamente i seguenti risultati.

Teorema 2. *Sia X una varietà complessa,* $\dim_{\boldsymbol{C}} X = n$. *Si ha:*

$$g_{\boldsymbol{R}}(X) = g_{\boldsymbol{C}}(X) + n - 1\,.$$

Ne segue che per una varietà complessa X si ha sempre $g_{\boldsymbol{R}}(X) \geqslant n-1$. In particolare si ha:

Teorema 3. *Se X è una varietà di Stein, allora* $g_{\boldsymbol{R}}(X) = n - 1$.

Questo teorema esprime, tramite il corollario del teorema 1, il risultato noto che se X è una varietà di Stein allora $H_i(X, Z) = 0$ per $i > n$.

Osservazione. Analoghe relazioni sussistono fra il grado di q-convessità e il grado di q-pseudoconvessità.

Sia X una varietà complessa ottenuta per complessificazione di una varietà reale V di dimensione reale n. Se indichiamo con $\boldsymbol{J}: X \to X$ la struttura complessa, si ha $V = \{x \in X \mid \boldsymbol{J}x = x\}$.

Teorema 4. *Se X è q-pseudoconvessa, allora V è q-convessa.*

Dimostrazione. Per ipotesi esistono un compatto $K \subset X$ e una funzione reale φ tali che la forma di Levi $L(\varphi)$ ha almeno $n-q$ autovalori positivi in ogni punto di $X - K$. Inoltre gli insiemi $B_c = \{ \varphi(x) < c \}$ sono relativamente compatti in X.

Consideriamo la funzione $\varphi \mid V \colon V \to \boldsymbol{R}$. La forma quadratica $H(\varphi \mid V)$ ha al più q autovalori negativi in ogni punto di $V - (V \cap K)$ e gli insiemi $B'_c = \{ x \in V \mid \varphi \mid V(x) < c \}$ sono relativamente compatti in V. Quindi V è q-convessa.

Bibliografia.

[1] G. Sorani, *Omologia degli spazi q-pseudoconvessi.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 16 (1962), 299-304.

[2] R. Thom, *Les singularités des applications differentiables.* Ann. Inst. Fourier 6 (1955-56), 43-87.

Summary.

We define a concept of the degree of convexity (and completeness) for a real manifold. We consider the relations between the degree of convexity and that of pseudoconvexity of a complex manifold.

* * *