Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 217-223

GIACOMINO BATTIONI (*)

Collegamenti fra un sistema alle differenze e un suo sistema differenziale limite. (**)

1. - Introduzione.

Consideriamo il *sistema alle differenze, del primo ordine,*

$$(\mathrm{S}_h)\qquad \begin{cases} Y^{(1,h)}(x;\ h) = F(x,\ Y(x;\ h);\ h)\,, & x,\ x+h \in (a \ldots b) \\ Y(\xi;\ h) = K(\xi;\ h)\,, & \xi \in (a \ldots (a+h)-) \end{cases} \quad (^1),$$

dove:

1) x è la variabile indipendente in un intervallo chiuso $(a \ldots b)$, con $a < b$;

2) h è un parametro, con $0 < h \ll b - a$;

3) ξ è la variabile indipendente nell'intervallino $(a \ldots (a+h)-)$ (che si dirà *intervallo iniziale*);

4) $Y(x;\ h)$ è una funzione incognita, e si è posto

$$Y^{(1,h)}(x;\ h) = \frac{Y(x+h;\ h) - Y(x;\ h)}{h}\ ;$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C. N. R., per l'anno 1966-67. — Ricevuto: 12-XI-1966.

[1] Tale intervallino è aperto a destra (e chiuso a sinistra).

e inoltre:

5) $F(x, y; h)$ è una funzione univoca nota, definita nella striscia $\Sigma \equiv (a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y < +\infty)$, e tale che

$$(1) \quad \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0+} F(x, y; h) = f(x, y) \text{ uniformemente per } (x, y) \in \Sigma, \\ \text{con } f(x, y) \text{ continua per } (x, y) \in \Sigma \text{ e lipschitziana rispetto ad } y \\ \qquad \text{uniformemente rispetto ad } x; \end{cases}$$

6) $K(\xi; h)$ è un'altra funzione univoca nota (che si dirà *funzione iniziale*) tale che

$$(2) \qquad \lim_{h \to 0+} K(\xi; h) = k, \qquad \text{con } k \text{ costante determinata.}$$

A questo sistema (S_h) alle differenze, del primo ordine, colleghiamo ora il suo sistema differenziale limite, del primo ordine, nella funzione incognita $y(x)$,

$$(S_{0+}) \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in (a \dots b) \\ y(a) = k, \end{cases}$$

dove a si dirà *punto iniziale* e k *costante iniziale*.

Sussistono ora le due affermazioni seguenti:

Il sistema (S_h) *ha un'unica soluzione, il sistema* (S_{0+}) *ha pure un'unica soluzione*. La prima affermazione si prova elementarmente in modo facile (cfr. n. 2); la seconda affermazione si prova con metodi non elementari, in modo un po' delicato, com'è ben noto (cfr., ad es., G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Vol. 1°, N. Zanichelli, Bologna 1948).

Indicando poi, per semplicità, con gli stessi simboli $Y(x; h)$, $y(x)$, che indicano le funzioni incognite dei sistemi (S_h) e (S_{0+}), rispettivamente le soluzioni uniche di tali sistemi, in questa Nota mi propongo di dimostrare rigorosamente (cfr. nn. 3, 4) che *si ha*:

$$(3) \qquad \lim_{h \to 0+} Y(x; h) = y(x) \qquad \textit{uniformemente in } (a \dots b),$$

$$(4) \qquad \lim_{h \to 0+} Y^{(1,h)}(x; h) = y'(x) \qquad \textit{uniformemente in } (a \dots b).$$

Questa conclusione è stata affrontata anche da altri Autori (cfr. i « Riferimenti » alla fine del lavoro), ma non mi risulta che ancora sia stata impostata in tutta la sua generalità e ottenuta quindi con sufficiente completezza e semplicità.

Le conclusioni precedenti si estendono (con alcune modifiche nelle dimostrazioni) al capo di un numero N qualsiasi di equazioni del 1° ordine, in N funzioni incognite. Restano quindi considerati anche i sistemi alle differenze e differenziali di ordine maggiore di 1.

2. - Determinazione univoca della soluzione di (S_h).

Fissato un h e detto n il massimo intero tale che $a + nh \leqslant b$, i punti

$$a, \qquad a+h, \qquad a+2h, \qquad \ldots, \qquad a+nh, \qquad b$$

suddividono l'intervallo $(a \ldots b)$ in $n+1$ intervallini, che si riterranno chiusi solo a sinistra, tranne l'ultimo (eventualmente ridotto a un punto) che si riterrà chiuso anche a destra. Quando la variabile ξ descrive il primo intervallino, $\xi + rh$ è la variabile che descrive, per $r = 1, 2, \ldots, n$, ordinatamente gli altri n intervallini [tenendo presente che, per $r = n$, l'ultimo intervallino è descritto da $\xi + nh$ quando ξ descrive solo una parte conveniente del primo intervallino].

Dopo ciò, la $Y(x;\,h)$ per $x \in (a \ldots b)$ si può riguardare spezzata nelle $n+1$ funzioni seguenti:

$$Y(\xi;\,h), \qquad Y(\xi+h;\,h), \qquad Y(\xi+2h;\,h), \qquad \ldots, \qquad Y(\xi+nh;\,h).$$

Allora, la $(S_h)_1$ (²), scritta nella forma equivalente

$$Y(x+h;\,h) = Y(x;\,h) + h\,F\big(x,\; Y(x;\,h);\; h\big), \tag{5}$$

si spezza nelle n seguenti:

$$Y\big(\xi + (r+1)h;\,h\big) = Y(\xi + rh;\,h) + h\,F\big(\xi + rh,\; Y(\xi + rh;\,h);\; h\big)$$
$$(r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1).$$

Ne segue che la $Y(\xi;\,h) \equiv K(\xi;\,h)$ individua $Y(\xi+h;\,h)$, a sua volta la $Y(\xi+h;\,h)$ individua $Y(\xi+2h;\,h)$, ..., infine la $Y\big(\xi+(n-1)h;\,h\big)$ individua $Y(\xi+nh;\,h)$. Pertanto la funzione $Y(x;\,h)$ risulta univocamente individuata in tutto $(a \ldots b)$.

(²) Con tale simbolo $(S_h)_1$ si indica, come ormai è consueto, la prima uguaglianza del sistema (S_h), ed analogamente dicasi per $(S_h)_2$.

3. - Dimostrazione della (3).

3.1. – Per il seguito è utile introdurre, anzitutto, le seguenti quantità:

1) Sia L un numero positivo tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2| \qquad \text{per } x \in (a \dots b) \text{ e } y_1,\ y_2 \text{ qualsiasi}$$

[L esiste finito per l'ipotesi che $f(x, y)$ è lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto a x].

2) $$M = \max |f(x, y(x))| \qquad \text{per } x \in (a \dots b)$$

[M esiste finito perchè la $f(x, y(x))$, come funzione composta della x, è continua nell'intervallo chiuso $(a \dots b)$].

3) Per ogni h, con $0 < h \ll b - a$, sia

$$\varepsilon(h) = \sup |f(x_1, y(x_1)) - f(x_2, y(x_2))| \qquad \text{per } x_1,\ x_2 \in (a \dots b), \quad |x_1 - x_2| < h,$$

dove $\varepsilon(h)$ è finito [certamente non maggiore dell'oscillazione della $f(x, y(x))$ in $(a \dots b)$], ed è infinitesimo per $h \to 0+$. [in virtù della uniforme continuità della $f(x, y(x))$ in $(a \dots b)$].

4) Per ogni h, con $0 < h \ll b - a$, sia

$$\varepsilon_1(h) = \sup |F(x, y;\ h) - f(x, y)| \qquad \text{per } (x, y) \in \Sigma,$$

$$\varepsilon_2(h) = \sup |K(\xi;\ h) - k| \qquad \text{per } \xi \in (a \dots (a + h)-),$$

dove: $\varepsilon_1(h)$, in virtù della (1), è certamente finito per ogni h sufficientemente piccolo ed è infinitesimo per $h \to 0+$; $\varepsilon_2(h)$, in virtù della (2), soddisfa alle stesse affermazioni precedenti per $\varepsilon_1(h)$.

3.2. – Per il teorema del valor medio esiste uno $\bar{\xi}$, con $a < \bar{\xi} < \xi$, tale che

$$y(\xi) = y(a) + (\xi - a)\, y'(\bar{\xi}),$$

o anche, per (S_{0+}),

$$y(\xi) = k + (\xi - a)\, f(\bar{\xi}, y(\bar{\xi})).$$

Questa uguaglianza, sottratta dalla $(S_h)_2$, ci dà:

$$Y(\xi;\ h) - y(\xi) = \{K(\xi;\ h) - k\} - (\xi - a)\, f(\bar{\xi},\ y(\bar{\xi}))\,,$$

da cui

$$|\ Y(\xi;\ h) - y(\xi)\ | \leqslant |\ K(\xi;\ h) - k\ | + (\xi - a)\ |\ f(\bar{\xi},\ y(\bar{\xi}))\ |\,,$$

e in virtù del n. **3.1**:

$$|\ Y(\xi;\ h) - y(\xi)\ | < \varepsilon_2(h) + M\,h\,. \tag{6}$$

3.3. – Per il teorema del valor medio esiste un $\bar{x}$, con $x < \bar{x} < x + h$, tale che

$$y(x + h) = y(x) + h\,y'(\bar{x})\,, \qquad x,\ x + h \in (a \ldots b),$$

o anche, per $(S_{0+})_1$,

$$y(x + h) = y(x) + h\,f(\bar{x},\ y(\bar{x}))\,.$$

Questa uguaglianza, sottratta dalla (5), ci dà:

$$Y(x + h;\ h) - y(x + h) =$$

$$= \{Y(x;\ h) - y(x)\} + h\{F(x,\ Y(x;\ h);\ h) - f(\bar{x},\ y(\bar{x}))\},$$

da cui

$$\left\{\begin{aligned} &|\ Y(x + h;\ h) - y(x + h)\ | \leqslant \\ &\leqslant |\ Y(x;\ h) - y(x)\ | + h\ |\ F(x,\ Y(x;\ h);\ h) - f(\bar{x},\ y(\bar{x}))\ |\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ma avendosi (in virtù del n. **3.1**)

$$|\ F(x,\ Y(x;\ h);\ h) - f(\bar{x},\ y(\bar{x}))\ | \leqslant$$

$$\leqslant |\ F(x,\ Y(x;\ h);\ h) - f(x,\ Y(x;\ h))\ | + |\ f(x,\ Y(x;\ h)) - f(x,\ y(x))\ | +$$

$$+ |\ f(x,\ y(x)) - f(\bar{x},\ y(\bar{x}))\ | \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1(h) + L\ |\ Y(x;\ h) - y(x)\ | + \varepsilon(h)\,,$$

dalla (7) segue:

$$|\ Y(x + h;\ h) - y(x + h)\ | \leqslant (1 + L\,h)\ |\ Y(x;\ h) - y(x)\ | + h\{\varepsilon_1(h) + \varepsilon(h)\}.$$

Questa disuguaglianza, tenendo conto dello spezzamento considerato al n. 2, si può scrivere:

$$(8)\qquad \begin{cases} \mid Y(\xi + (r+1)h;\ h) - y(\xi + (r+1)h) \mid \leqslant \\ \leqslant (1 + L\,h) \mid Y(\xi + rh;\ h) - y(\xi + rh) \mid + h\left\{\varepsilon_1(h) + \varepsilon(h)\right\} \\ (r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1). \end{cases}$$

3.4. - Valgono poi le disuguaglianze:

$$(9_r)\qquad \begin{cases} \mid Y(\xi + rh;\ h) - y(\xi + rh) \mid < \\ < \left\{\varepsilon_2(h) + M\,h\right\}(1 + L\,h)^r + \left\{\varepsilon_1(h) + \varepsilon(h)\right\}\left\{(1 + L\,h)^r - 1\right\}/L \\ (r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n). \end{cases}$$

Dimostriamo ciò per induzione.

1) La (9_r) per $r = 0$, cioè la (9_0), si riduce alla (6) già dimostrata.

2) Dalla (9_r), supposta valida per un certo r con $0 < r < n$, si deduce la (9_{r+1}). Infatti, maggiorando il secondo membro della (8) mediante la (9_r), si ha

$$\mid Y(\xi + (r+1)h;\ h) - y(\xi + (r+1)h) \mid <$$

$$< (1 + L\,h)\left[\left\{\varepsilon_2(h) + M\,h\right\}(1 + L\,h)^r + \left\{\varepsilon_1(h) + \varepsilon(h)\right\}\left\{(1 + L\,h)^r - 1\right\}/L\right] +$$

$$+ h\left\{\varepsilon_1(h) + \varepsilon(h)\right\},$$

ossia, facendo le opportune semplificazioni nel secondo membro, esattamente la (9_{r+1}).

Per il principio di induzione matematica, la (9_r) resta così conclusa in ogni suo caso.

3.5. - Avendosi $1 + L\,h < e^{Lh}$, da cui $(1 + L\,h)^r < e^{Lhr} \leqslant e^{Lhn} \leqslant e^{L(b-a)}$, dalla (9_r) si ha (sostituendo nel primo membro $\xi + rh$ con x, come è lecito):

$$\mid Y(x;\ h) - y(x) \mid < \left\{\varepsilon_2(h) + M\,h\right\}e^{L(b-a)} + \left\{\varepsilon_1(h) + \varepsilon(h)\right\}(e^{L(b-a)} - 1)/L\,.$$

Poichè qui il secondo membro è infinitesimo con h, l'affermazione (3) risulta così dimostrata.

4. - Dimostrazione della (4).

Sottraendo membro a membro le $(S_h)_1$, $(S_{0+})_1$, si ha:

$$Y^{(1,h)}(x;\,h) - y'(x) = F(x,\,Y(x;\,h);\,h) - f(x,\,y(x))\,,$$

da cui (in virtù del n. 3.1)

$$\begin{aligned}&|\,Y^{(1,h)}(x;\,h) - y'(x)\,| \leqslant \\ \leqslant |\,F(x,\,Y(x;\,h);\,h) - f(x,\,&Y(x;\,h))\,| + |\,f(x,\,Y(x;\,h)) - f(x,\,y(x))\,| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon_1(h) + L\,|\,Y(x;\,h) - y(x)\,|\,.\end{aligned}$$

Poichè qui l'ultimo membro è infinitesimo con h, anche l'affermazione (4) risulta così dimostrata.

Riferimenti.

[1] G. Boole, *Calculus of Finite Differences*, 4th edition, Chelsea Publishing Co., New York (cfr. Chapt. X).

[2] N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer, Berlin 1924 (cfr. n. 149).

[3] A. Walther, *Zum Grenzübergange von Differenzengleichungen in Differentialgleichungen*, Math. Ann. **95** (1926), 257-266.

[4] W. M. Whyburn, *On related difference and differential systems*, Amer. J. **51** (1929), 265-286.

[5] H. Flath, *Zum Grenzübergang von der Differenzenrechnung zur Differentialrechnung*, Darmstadt, Technische Hochschule, Diss. Dr.-Ing. (1933).

[6] T. Fort, *Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain*, Clarendon Press, Oxford 1948 (cfr. Chapt. XI).

[7] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York 1962 (cfr. Chapt. 1 e Chapt. 2).

Summary.

It is considered a difference system and its differential limit-system. It is established a relationship between the solutions of these systems.

* * *