Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 203-216

GIAMPAOLO MATTOLINI (*)

# Distribuzione di temperatura in un corpo di forma cilindrica indefinita, sottoposto a radiazione esterna. (**)

## 1. - Introduzione.

Tra gli innumerevoli problemi posti dall'esplorazione dello spazio mediante satelliti artificiali, uno di rilevante importanza è legato allo studio dello stato termico delle pareti della cabina e nell'interno di essa, non soltanto in corrispondenza allo strato superficiale di sorgenti che si vengono a creare sulle pareti per attrito con gli strati più densi della atmosfera, ma anche per l'irraggiamento solare specialmente negli strati più alti e cioè fuori dell'atmosfera terrestre. Molti studi sono stati fatti su questo argomento almeno per corpi di semplice forma geometrica; fra questi è stato particolarmente studiato il caso del corpo cilindrico di lunghezza così grande rispetto al raggio della sezione normale, da poter praticamente ritenere il cilindro indefinito e ridurre il problema da tridimensionale a piano. HEASLET e FULLER hanno studiato il caso del manicotto cilindrico a pareti sottili, cioè tale che si possa ritenere trascurabile il gradiente di temperatura fra superficie interna e superficie esterna del corpo, trovandone una soluzione in termini finiti [1] (1); OLMSTEAD e RAYNOR hanno invece trattato il corpo cilindrico pieno, trovando una soluzione formale sotto forma di serie di FOURIER [2].

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico U. DINI, Università, Viale Morgagni 67 A, Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 6 del Comitato Nazionale per le Scienze matematiche del C.N.R., per l'anno 1965-66. — Ricevuto: 4-III-1966.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

In questo lavoro viene affrontato il caso generale (manicotto cilindrico a pareti qualsiasi) e se ne trova una soluzione sotto forma di serie; si dimostra che le soluzioni ottenute nei due precedenti sono casi particolari di questa e si giustifica l'approssimazione fatta da HEASLET e FULLER nel trascurare il gradiente di temperatura in direzione radiale; si verifica inoltre che la serie ottenuta soddisfa a tutte le condizioni che la rendono una soluzione effettiva del problema. In un successivo lavoro si mostrerà che mediante una funzione che è la generalizzazione di quella usata da HEASLET e FULLER, è possibile trattare anche il caso del corpo cilindrico a pareti sottili rotante, trovando una soluzione in termini finiti.

Seguendo gli Autori citati, per rendere più agevole una soluzione analitica del problema, si fanno alcune ipotesi semplificatrici, oltre quella già indicata:

1) Si suppone che tutta l'energia provenga al corpo in studio da una sola sorgente di radiazioni uniformi parallele e di intensità costante. Questa ipotesi sarebbe completamente valida se il corpo fosse nel vuoto perfetto e fosse investito da una radiazione proveniente da una sorgente infinitamente lontana dal corpo. In effetti, la pressione nello spazio è molto bassa e le altre sorgenti di energia sono trascurabili rispetto al Sole, che, essendo molto lontano dal corpo, rende l'ipotesi quasi completamente verificata.

2) Si suppone che la conduttività $k$ del mezzo in esame sia così grande da ritenere la variazione della temperatura intorno alla media piccola rispetto alla media stessa. Questa ipotesi, oltre a rendere possibile la linearizzazione delle equazioni da risolvere, fa sì che siano valide le successive approssimazioni 3) e 4).

3) Si suppone che il materiale delle pareti abbia una emissività ed assorbività indipendente dalla temperatura delle pareti stesse. Allora per la legge di KIRCHHOFF l'emissività ed assorbività della superficie interna risulteranno uguali; invece per la superficie esterna tale uguaglianza non sussiste data la notevole diversità di temperatura e quindi di spettro di emissione fra la sorgente che emette ed il corpo che assorbe.

4) Per rimanere nel caso lineare la conduttività termica $k$ è supposta indipendente dalla temperatura, ipotesi questa difficilmente verificabile se le variazioni della temperatura non sono sufficientemente piccole.

5) Si considera inoltre valida la legge del coseno di LAMBERT sia per l'emissione che per la riflessione. Una ipotesi di questo tipo è utile per calcolare l'energia assorbita ed emessa in una data direzione relativa alla superficie. È stato mostrato sperimentalmente che questa legge è valida con grande approssimazione per superfici non metalliche e per ossidi metallici, [3]. Per superfici

metalliche lucide la legge non è più valida. Però un tentativo di usare la legge corretta porterebbe ad eccessive difficoltà analitiche; comunque si deve considerare che nelle nostre ipotesi la conducibilità è grande ed il calore sarà trasmesso in prevalenza per conduzione.

6) Infine, nell'interno del corpo si considera trascurabile la trasmissione del calore per convezione rispetto a quella per irraggiamento.

## 2. - Impostazione del problema.

Si fissi un sistema di coordinate cilindriche solidali col corpo in studio, tali che l'asse $z$ coincida con l'asse delle superfici cilindriche limitanti il manicotto ed il semipiano polare sia parallelo alla direzione delle radiazioni e rivolto verso la sorgente. Sia il corpo omogeneo ed isotropo e si indichi con $a$, $\varepsilon_1$ e $\alpha_1$ rispettivamente il raggio, l'emissività e l'assorbività della superficie esterna del corpo, con $b$, $\varepsilon_2$ ed $\alpha_2$ le analoghe grandezze relative a quella interna e con $\beta = b/a$ il rapporto dei raggi. Poichè per le ipotesi fatte la temperatura non dipende dalla coordinata $z$, il problema si riduce ad un problema piano; poichè si studia solo il caso in cui ogni punto del corpo ha raggiunto la temperatura di equilibrio, questa sarà indipendente dal tempo. Indicando con $T$ la temperatura assoluta, sarà perciò $T = T(r, \theta)$. Nelle espressioni successive non compariranno quindi la coordinata $z$ ed il tempo; è evidente però che nelle formule tutte le volte che ci riferiremo ad una quantità di energia irradiata od assorbita, si tratterà di una quantità di energia per unità di lunghezza lungo l'asse $z$ e per unità di tempo. Se si indica con $e$ la quantità di energia che arriva per unità di tempo su una unità di superficie posta in direzione normale alla radiazione, l'elemento di superficie esterna contiguo al punto di coordinate $(a, \theta)$ e di altezza unitaria, $\mathrm{d}\sum = a\,\mathrm{d}\theta$, riceverà una quantità di energia $e\,f(\theta)\,a\,\mathrm{d}\theta$, dove

$$f(\theta) = \begin{cases} \cos\theta, & -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2\,. \end{cases} \tag{1}$$

Se indichiamo con $B_1(\theta)\,a\,\mathrm{d}\theta$ l'energia emessa da un elemento di superficie contiguo al punto $(a, \theta)$ e con $B_2(\theta)\,b\,\mathrm{d}\theta$ l'energia emessa dal rispettivo elemento di coordinate $(b, \theta)$, si ha ($\sigma$ = costante di STEFAN):

$$B_1(\theta) = \varepsilon_1\,\sigma\,T^4(a,\ \theta) + (1 - \alpha_1)\,e\,f(\theta), \tag{2}$$

$$B_2(\theta) = \varepsilon_2\,\sigma\,T^4(b,\ \theta) + (1 - \alpha_2)\,H_2(\theta), \tag{3}$$

dove $H_2(\theta)\, b\, \mathrm{d}\theta$ è l'energia per unità di tempo che arriva dagli altri elementi della superficie interna. Per calcolare $H_2(\theta)$ si procede nel modo seguente [4]. Considerando valida la legge di LAMBERT, l'energia totale emessa dall'elemento $b\, \mathrm{d}\theta_1$ è data da

$$b\, \mathrm{d}\theta_1 B_2(\theta_1) = K\, b\, \mathrm{d}\theta_1\, B_2(\theta_1) \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi = 2K\, B_2(\theta_1)\, b\, \mathrm{d}\theta_1,$$

da cui $K = 1/2$.

Pertanto l'energia emessa nell'angolo compreso fra i due raggi di coordinate $\varphi$ e $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ è data da

$$(1/2)\, B_2(\theta_1)\, b\, \mathrm{d}\theta_1 \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi .$$

Avendosi poi

$$\varphi = \frac{\pi - |\,\theta - \theta_1\,|}{2}, \qquad \cos\varphi = \sin\frac{|\,\theta - \theta_1\,|}{2}, \qquad |\,\mathrm{d}\varphi\,| = \frac{|\,\mathrm{d}\theta\,|}{2},$$

l'energia che proviene da $b\, \mathrm{d}\theta_1$ e arriva su $b\, \mathrm{d}\theta$ è data da:

$$\frac{1}{4}\, B_2(\theta_1) \sin\frac{|\,\theta - \theta_1\,|}{2}\, \mathrm{d}\theta_1\, b\, \mathrm{d}\theta ,$$

da cui si ha per l'energia complessiva che arriva in $b\, \mathrm{d}\theta$:

$$b\, \mathrm{d}\theta \cdot \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} B_2(\theta_1) \sin\frac{|\,\theta - \theta_1\,|}{2}\, \mathrm{d}\theta_1 .$$

È quindi

$$H_2(\theta) = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} B_2(\theta_1) \sin\frac{|\,\theta - \theta_1\,|}{2}\, \mathrm{d}\theta_1 . \tag{4}$$

L'equazione differenziale della conduzione del calore diviene in coordinate cilindriche ($T$ indipendente da $z$ e dal tempo):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0, \qquad b < r < a . \tag{5}$$

Le condizioni al contorno si ottengono imponendo che per $r = a$ e per $r = b$ la quantità di calore che arriva per conduzione su un elemento della faccia interna e di quella esterna sia uguale alla differenza fra l'energia che esce da un elemento e quella che arriva per irraggiamento:

$$(6)\qquad -k\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=a} = B_1(\theta) - e\, f(\theta) = \varepsilon_1\, \sigma\, T^4(a,\ \theta) - \alpha_1\, e\, f(\theta),$$

$$(7)\qquad k\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=b} = B_2(\theta) - H_2(\theta) = \varepsilon_2\, \sigma\, T^4(b,\ \theta) - \alpha_2\, H_2(\theta) =$$

$$= \frac{\varepsilon_2\, \sigma\, T^4(b,\ \theta) - \alpha_2\, B_2(\theta)}{1 - \alpha_2},$$

dove $B_2(\theta)$ si ricava dall'equazione

$$(8)\qquad B_2(\theta) = \varepsilon_2\, \sigma\, T^4(b,\ \theta) + \frac{1 - \alpha_2}{4}\int_{-\pi}^{+\pi} B_2(\theta_1)\, \sin\frac{|\theta - \theta_1|}{2}\, d\theta_1 .$$

Conviene per prima cosa linearizzare le condizioni al contorno; per questo poniamo:

$$(9)\qquad T(r,\ \theta) = T_0\, [1 + u(r,\ \theta)],$$

con $T_0$ temperatura media. Come abbiamo già accennato nell'Introduzione, l'ipotesi che faremo è quella di supporre che la variazione di temperatura sia piccola rispetto alla temperatura media stessa in modo che si possa considerare lecita l'approssimazione:

$$(10)\qquad T^4(r,\ \theta) = T_0^4\, [1 + 4\, u(r,\ \theta)] .$$

Calcoliamo adesso il valore di $T_0$. Si ponga

$$\mathfrak{T}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(r,\ \theta)\, d\theta .$$

Poichè $T(r,\ \theta)$ è supposta continua e derivabile rispetto alle sue variabili, sarà ([5], pag. 262):

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\partial r}\, d\theta .$$

Poichè la funzione $T(r,\ \theta)$ deve soddisfare alla (5), essa è armonica per $b \leqslant r \leqslant a$ e quindi integrando la (5) nella regione piana $\sigma_{r_0}$ compresa fra le due circonferenze concentriche di raggi rispettivamente $b$ e $r_0$, con $r_0$ qualsiasi $b \leqslant r_0 \leqslant a$, si ha per il lemma di GREEN nel piano ([5], pag. 300):

$$0 = \int\limits_{\sigma_{r_0}} \nabla^2 T \, d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=r_0} r_0 \, d\theta - \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=b} b \, d\theta \, .$$

Ma se entro la cavità non esistono corpi che assorbono o emettono energia, l'energia totale irradiata dalla superficie interna deve essere uguale a quella riassorbita. Ricordando la (7), nella quale il secondo membro esprime la differenza fra l'energia emessa ed assorbita per irraggiamento in ciascun punto di coordinata $r = b$, integrando su tutta la circonferenza si ha evidentemente:

$$k\, b \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=b} d\theta = 0,$$

da cui

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=r_0} r_0 \, d\theta = r_0 \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=r_0} d\theta = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{T}}{dr} = 0 \, ,$$

e perciò

$$\mathfrak{T}(r) = \text{costante} = T_0 \, . \tag{11}$$

Ricordiamo adesso che in condizioni stazionarie la quantità totale di calore emessa dalla intera faccia esterna deve essere uguale a quella assorbita, cioè:

$$\varepsilon_1\, \sigma \int\limits_0^{2\pi} T^4(a,\ \theta) \, d\theta = \alpha_1\, e \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \, d\theta = \alpha_1\, e \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta \, d\theta = 2\, \alpha_1\, e;$$

poichè si ha

$$T_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} T_0 \left[1 + u(r,\ \theta)\right] d\theta = 0 \, ,$$

segue

$$\int\limits_0^{2\pi} u(r,\ \theta) \, d\theta = 0 \, , \tag{12}$$

qualunque sia $r$ e quindi

$$\varepsilon_1 \, \sigma \int_0^{2\pi} T_0^4 [1 + 4\, u(a,\ \theta)] \, d\theta = 2\, \alpha_1 \, e \,, \qquad T_0^4 = \frac{\alpha_1 \, e}{\pi \, \varepsilon_1 \, \sigma} \,.$$

Si torni adesso alla equazione ed alle condizioni al contorno; tenuto conto di (9) e (10) si ha:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \,, \qquad b < r < a \,;$$

$$- k \, T_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{r=a} = \varepsilon_1 \, \sigma \, T_0^4 + 4 \, \varepsilon_1 \, \sigma \, T_0^4 \, u(a,\ \theta) - \alpha_1 \, e \, f(\theta) \,;$$

$$k \, T_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{r=b} = \frac{\varepsilon_2 \, \sigma \, T_0^4 + 4 \, \varepsilon_2 \, \sigma \, T_0^4 \, u(b,\ \theta) - \alpha_2 \, B_2(\theta)}{1 - \alpha_2} \,;$$

$$B_2(\theta) = \varepsilon_2 \, \sigma \, T_0^4 + 4 \, \varepsilon_2 \, \sigma \, T_0^4 \, u(b,\ \theta) + \frac{1 - \alpha_2}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} B_2(\theta_1) \sin \frac{|\theta - \theta_1|}{2} \, d\theta_1 \,.$$

Facciamo adesso un cambiamento di variabili ponendo $s = r/a$; poniamo inoltre $(a/(kT_0)) \, B_2(\theta) = R(\theta)$, $\sigma \, T_0^3 \, a/k = M$ e $e \, a/(k \, T_0) = L$; l'equazione e le condizioni al contorno divengono:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \,, \qquad \beta < s < 1 \,; \tag{13}$$

$$- \left[\frac{\partial u}{\partial s}\right]_{s=1} = \varepsilon_1 M + 4 \, \varepsilon_1 \, M \, u(1,\ \theta) - \alpha_1 \, L \, f(\theta) \,; \tag{14}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial s}\right]_{s=\beta} = \frac{\varepsilon_2 \, M + 4 \, \varepsilon_2 \, M \, u(\beta,\ \theta) - \alpha_2 \, R(\theta)}{1 - \alpha_2} \,; \tag{15}$$

$$R(\theta) = \varepsilon_2 \, M + 4 \, \varepsilon_2 \, M \, u(\beta,\ \theta) + \frac{1 - \alpha_2}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} R(\theta_1) \sin \frac{|\theta - \theta_1|}{2} \, d\theta_1 \,. \tag{16}$$

**3. - Soluzione del problema.**

Per evidenti ragioni fisiche si cerca la soluzione nella classe $C_2$ delle funzioni continue con derivate parziali prime e seconde continue; la soluzione deve essere inoltre periodica di periodo $2\pi$ nella variabile $\theta$. Se la soluzione esiste può quindi essere sviluppata in serie di FOURIER. Inoltre per il significato fisico della funzione $R(\theta)$ anche questa deve essere periodica di periodo $2\pi$. Poniamo quindi, riservandoci di giustificarlo successivamente,

$$u(s,\ \theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\ u_n(s)\, e^{in\theta}, \tag{17}$$

$$R(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\ R_n\, e^{in\theta}. \tag{18}$$

Cominciamo col trovare i termini dello sviluppo in serie di $R(\theta)$ in funzione dei corrispondenti termini in $u(\beta,\ \theta)$. Sostituendo le espressioni (17), (18) nella (16) e avendosi:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta_1} \sin\frac{|\theta-\theta_1|}{2}\, d\theta_1 = 4\,\frac{e^{in\theta}}{1-4n^2},$$

risulta

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\ R_n\left[1-\frac{1-\alpha_2}{1-4n^2}\right] e^{in\theta} = \varepsilon_2 M + 4\varepsilon_2 M \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\ u_n(\beta)\, e^{in\theta}.$$

Moltiplicando per $e^{-in\theta}/(2\pi)$ ($n$ intero qualsiasi) ed integrando fra $0$ e $2\pi$, si ha per $n=0$:

$$\alpha_2 R_0 = \varepsilon_2 M + 4\varepsilon_2 M\, u_0(\beta),$$

e per $n \neq 0$

$$\frac{4n^2-\alpha_2}{4n^2-1} R_n = 4\varepsilon_2 M\, u_n(\beta).$$

Supponiamo che la serie che dà la soluzione sia derivabile termine a termine almeno due volte rispetto alle variabili, ipotesi questa che giustificheremo a posteriori; si potrà scrivere:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[\frac{d^2u_n}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{du_n}{ds}-\frac{n^2}{s^2}u_n\right] e^{in\theta} = 0,$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[-\left[\frac{du_n}{ds}\right]_{s=1} - 4\varepsilon_1 M\, u_n(1)\right] e^{in\theta} = \varepsilon_1 M - \alpha_1 L\, f(\theta),$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[\frac{du_n}{ds}\right]_{s=\beta} e^{in\theta} = \frac{\varepsilon_2 M}{1-\alpha_2} + \frac{1}{1-\alpha_2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,[4\varepsilon_2 M\, u_n(\beta) - \alpha_2 R_n] e^{in\theta}.$$

La funzione $f(\theta)$, essendo continua e con derivata prima continua a tratti e tale che $f(\pi) = f(-\pi)$, è sviluppabile in serie di FOURIER ([**6**], pag. 78) e la serie converge uniformemente verso la funzione data ([**6**], pag. 83) .Per risolvere il problema cominciamo col trovare il valore di $u_0(s)$. In questo caso si dovranno moltiplicare l'equazione e le condizioni al contorno per $1/(2\pi)$ e quindi integrare; si ha:

$$\frac{d^2u_0}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{du_0}{ds} = 0\,,$$

$$-\left[\frac{du_0}{ds}\right]_{s=1} = \varepsilon_1 M + 4\,\varepsilon_1 M\,u_0(1) - \frac{\alpha_1 L}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta\,d\theta\,,$$

$$\left[\frac{du_0}{ds}\right]_{s=\beta} = \frac{\varepsilon_2 M + 4\,\varepsilon_2 M\,u_0(\beta) - \alpha_2 R_0}{1-\alpha_2}\,.$$

Ricordando il valore di $R_0$ e poichè è $\varepsilon_1 M = \alpha_1 L/\pi$, le condizioni al contorno si semplificano in

$$\left[\frac{du_0}{ds}\right]_{s=\beta} = 0\,, \qquad -\left[\frac{du_0}{ds}\right]_{s=1} = 4\,\varepsilon_1 M\,u_0(1).$$

Risolvendo l'equazione si ha

$$u_0(s) = a_0 + b_0 \log s\,,$$

e per le condizioni al contorno

$$b_0/\beta = 0, \qquad -b_0 = 4\,\varepsilon_1 M a_0\,,$$

da cui

$$b_0 = 0, \qquad a_0 = 0, \qquad u_0(s) = 0\,.$$

Si ritrova così, come è naturale, il risultato (12):

$$\int_0^{2\pi} u(r,\,\theta)\,d\theta = 0\,,$$

qualunque sia $r$. Moltiplicando invece per $e^{-in\theta}/(2\pi)$ con $n \neq 0$ ed integrando fra 0 e $2\pi$, si ha per l'equazione e per le condizioni al contorno:

$$\frac{d^2 u_n}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{du_n}{ds} - \frac{n^2}{s^2} u_n = 0 , \tag{19}$$

$$-\left[\frac{du_n}{ds}\right]_{s=1} = 4\varepsilon_1 M u_n(1) - \frac{\alpha_1 L}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta\, e^{-in\theta}\, d\theta , \tag{20}$$

$$\left[\frac{du_n}{ds}\right]_{s=\beta} = \frac{4\varepsilon_2 M\, u_n(\beta) - \alpha_2 R_n}{1-\alpha_2} ;$$

e, ricordando il valore di $R_n$,

$$\left[\frac{du_n}{ds}\right]_{s=\beta} = \frac{4\varepsilon_2 M\, u_n(\beta)}{1-\alpha_2}\left[1 - \frac{(4n^2-1)\alpha_2}{4n^2-\alpha_2}\right] = 4\varepsilon_2 M \frac{4n^2}{4n^2-\alpha_2} u_n(\beta) . \tag{21}$$

La soluzione dell'equazione sarà:

$$u_n(s) = a_n s^n + b_n s^{-n},$$

con $a_n$ e $b_n$ da determinarsi per mezzo delle condizioni al contorno (20), (21). Si ha per $n = 1$:

$$[4\varepsilon_1 M + 1]a_1 + [4\varepsilon_1 M - 1]b_1 = \alpha_1 L/4,$$

$$\left[\frac{16\,\varepsilon_2 M\beta}{4-\alpha_2} - 1\right]a_1 + \left[\frac{16\,\varepsilon_2 M}{(4-\alpha_2)\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right] b_1 = 0;$$

e per $|n| > 1$:

$$[4\varepsilon_1 M + n]\, a_n + [4\varepsilon_1 M - n] b_n = -\frac{\alpha_1 L}{\pi(n^2-1)} \cos\frac{n\pi}{2} ,$$

$$\left[4\varepsilon_2 M \frac{4n^2}{4n^2-\alpha_2}\beta^n - n\beta^{n-1}\right]a_n + \left[4\varepsilon_2 M \frac{4n^2}{4n^2-\alpha_2} \beta^{-n} + n\,\beta^{-n-1}\right]b_n = 0 .$$

Calcolato il valore delle costanti, si vede che $u_n(s)$ è una funzione reale tale che

$u_n(s) = u_{-n}(s)$; ricordando il valore di $\cos(n\pi/2)$, si ha infine per la soluzione:

$$u(s,\ \theta) = \frac{\alpha_1 L}{2}\left[\frac{A_1(s) + B_1(s)}{C_1 + D_1}\cos\theta + \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\frac{A_{2n}(s) + B_{2n}(s)}{C_{2n} + D_{2n}}\cos(2n\theta)\right],$$

dove

$$A_n(s) = \left[4\varepsilon_2 M\frac{4n^2}{4n^2-\alpha_2}\right]\left[\left[\frac{s}{\beta}\right]^n - \left[\frac{\beta}{s}\right]^n\right],$$

$$B_n(s) = \frac{n}{\beta}\left[\left[\frac{s}{\beta}\right]^n + \left[\frac{\beta}{s}\right]^n\right],$$

$$C_n = \left[16\varepsilon_1\varepsilon_2 M^2\frac{4n^2}{4n^2-\alpha_2} + \frac{n^2}{\beta}\right]\left[\frac{1}{\beta^n} - \beta^n\right],$$

$$D_n = n\left[\frac{4\varepsilon_1 M}{\beta} + 4\varepsilon_2 M\frac{4n^2}{4n^2-\alpha_2}\right]\left[\frac{1}{\beta^n} + \beta^n\right].$$

Ci resta adesso da stabilire l'uniforme convergenza della serie $u(s,\ \theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n u_n(s)\, e^{in\theta}$, per $\theta$ qualsiasi e $\beta \leqslant s \leqslant 1$, l'uniforme convergenza della serie $R(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n R_n\, e^{in\theta}$, per $\theta$ qualsiasi e da giustificare le derivazioni termine a termine fatte sulla prima serie. Poichè si ha $\beta < 1$, $s/\beta \geqslant 1$, $\beta/s \leqslant 1$, è

$$0 \leqslant A_{2n}(s) < 5\varepsilon_2 M/\beta^{2n} < 5\varepsilon_2 M/\beta^{2n+1}, \qquad 0 \leqslant B_{2n}(s) < 4n/\beta^{2n+1}.$$

D'altra parte esisterà un numero intero $n_0 > 5\varepsilon_2 M$ e per questo e per i successivi è:

$$0 \leqslant A_{2n}(s) + B_{2n}(s) < 5n/\beta^{2n+1};$$

si ha inoltre, ponendo $1/K = 1 - \beta^4$,

$$C_{2n} + D_{2n} > \frac{4n^2}{\beta}\left[\frac{1}{\beta^{2n}} - \beta^{2n}\right] > \frac{4n^2}{\beta^{2n+1}}[1 - \beta^{4n}] > \frac{4n^2}{K\beta^{2n+1}},$$

da cui per $n > n_0$:

$$\left|\frac{A_{2n}(s) + B_{2n}(s)}{C_{2n} + D_{2n}}\right| < \frac{5n}{\beta^{2n+1}}\frac{K\beta^{2n+1}}{4n^2} < \frac{5}{4}\frac{K}{n};$$

indicando perciò con $\bar{u}_{2n}(s,\ \theta)$ il termine generico della serie che dà la soluzione, si ha:

$$\left|\bar{u}_{2n}(s,\ \theta)\right| < \frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\frac{5}{4}\frac{K}{n} = \frac{5K}{\pi}\frac{1}{4n^3}\frac{1}{1-1/(4n^2)} \leqslant \frac{5K}{3\pi}\frac{1}{n^3}.$$

Si ha quindi che la serie (22), essendo minorante della serie convergente a termini costanti $\sum_1^\infty{}_n \frac{5K}{3\pi}\frac{1}{n^3}$, è totalmente e quindi uniformemente convergente ([**7**], pag. 203). Poichè è $R_n = 4\varepsilon_2 M \frac{4n^2-1}{4n^2-\alpha_2} u_n(\beta)$, anche la serie $R(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n R_n e^{in\theta}$ è uniformemente convergente. Analogamente si dimostra che la serie che si ottiene derivando una volta rispetto ad $s$ i termini della serie data è minorante in valore assoluto della serie convergente a termini costanti $\sum_1^\infty{}_n \frac{8K}{3\pi\beta}\frac{1}{n^2}$, qualunque sia $s$, $\beta \leqslant s \leqslant 1$; la serie derivata è uniformemente convergente, per cui la serie è derivabile termine a termine ([**7**], pag. 267) e sono lecite le operazioni che si sono fatte per le condizioni al contorno. Si scelga adesso un valore $s_0$, tale che $\beta < s_0 < 1$; si ha qualunque sia $s$, $\beta \leqslant s \leqslant s_0 < 1$, per $n \geqslant n_0$, procedendo in modo analogo a quanto fatto sopra,

$$\left|\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left[s\frac{\partial^2 \bar{u}_{2n}(s,\ \theta)}{\partial s}\right]\right| = \left|\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_{2n}(s,\ \theta)}{\partial\theta^2}\right| < \frac{20K s_0^{2n}}{3\pi\beta^2\, n} \leqslant \frac{20K}{3\pi\beta^2} s_0^{2n}.$$

Perciò le serie considerate sono minoranti della serie geometrica $\sum_1^\infty{}_n \frac{20K}{3\pi\beta^2} s_\theta^{2n}$; sarà lecita la derivazione termine a termine qualunque sia $\theta$ e qualunque sia $s$, $\beta \leqslant s \leqslant s_0 < 1$. Per l'arbitrarietà di $s_0$, sarà perciò lecita la derivazione termine a termine per $\beta \leqslant s < 1$.

### 4. - Confronto con le soluzioni particolari ottenute nei precedenti lavori.

Si tratta adesso di confrontare il risultato ottenuto nel caso generale del corpo cilindrico a pareti qualsiasi con i due casi: 1) del corpo cilindrico pieno e 2) del corpo cilindrico a pareti sottili.

Caso 1). Si ha $b = 0$, $\beta = 0$. Poichè si deve far tendere $\beta$ a zero, al numeratore e denominatore di ogni termine della serie si trascurano tutti gli addendi tranne quello nella potenza di $\beta$ di grado più basso; semplificando la formula ottenuta si ha:

$$u(s,\ \theta) = \frac{\alpha_1 L}{2}\left\{\frac{s}{1+4\varepsilon_1 M}\cos\theta + \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\frac{s^{2n}}{2n+4\varepsilon_1 M}\cos(2n\theta)\right\}.$$

Si ritrova così la formula di Olmstead e Raynor [**2**].

Caso 2). Se indichiamo con $t$ lo spessore della parete deve essere per l'ipotesi delle pareti sottili $t \ll a$. Poniamo, come in [1], $N = \sigma T_0^3 a^2/(kt)$; si avrà:

$$M = Nt/a, \qquad L = \left(r/(\sigma T_0^4)\right) N(t/a)\,.$$

Notiamo che in questo caso si ha $\beta = 1 - (t/a)$, $s = 1 - (\varepsilon t/a)$, con $\varepsilon$ che varia da 0 a 1. Se eseguiamo le sostituzioni precedenti nella (22) e poi facciamo tendere $t/a$ a zero, si ottiene:

$$u(s,\,\theta) = \frac{\alpha_1 r}{2\sigma T_0^4} N \left\{ \frac{\cos\theta}{1 + 4N\varepsilon_1 + 16N\varepsilon_2/(4-\alpha_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} {}_n \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \frac{\cos(2n\theta)}{4n^2 + 4N\varepsilon_1 + 4N\varepsilon_2(16n^2/(16n^2-\alpha_2))} \right\},$$

cioè si ritrova il risultato ottenuto da HEASLET e FULLER, quando si sviluppi in serie di FOURIER la funzione che dà il risultato stesso [1]. Si noti che in prima approssimazione la funzione non dipende da $\varepsilon$, e quindi da $r = a - \varepsilon t$; si giustifica così a posteriori l'ipotesi fatta dagli Autori, che suppongono che, se $t \ll a$, il gradiente di temperatura fra la superficie interna e quella esterna del corpo possa considerarsi trascurabile.

## Bibliografia.


[1] M. A. HEASLET and F. B. FULLER, *Temperature distribution on conducting cylindrical shells including the effects of thermal radiation*, J. Soc. Indust. Appl. Math. **12** (1964), 136-155.

[2] W. E. OLMSTEAD and S. RAYNOR, *Solar heating of a rotating solid cylinder*, Quart. Appl. Math. **21** (1963), 81-90.

[3] L. D. NICHOLS, *Surface-temperature distribution on thin-walled bodies subjected to solar radiation in interplanetary space*, N.A.S.A. T.N. D-584 (1961).

[4] L. M. JACOB, *Heat transfer*, Vol. II, John Wiley and Sons, New York 1963.

[5] G. SANSONE e R. CONTI, *Lezioni di Analisi matematica*, Vol. II, C.E.D.A.M., Padova 1959.

[6] R. V. CHURCHILL, *Fourier series and boundary values problems*, Mc Graw-Hill, London 1941.

[7] G. SANSONE e R. CONTI, *Lezioni di Analisi matematica*, Vol. I, C.E.D.A.M., Padova 1958.

## Summary.

*Temperature distribution in an indefinite cylinder subjected to external radiation has been studied; the body is supposed to be in interplanetary space and to receive radiant energy from the Sun. It has a cavity inside and its wall may have any thickness. It is supposed also to be a gray radiator and the influence on temperature distribution of internal and external radiation and of thermal conductivity is considered. On the contrary convection heat transfer within the object, as well as radiation emitted and reflected from stars and planets, is neglected. The governing equations have been derived; if the temperature is supposed to deviate slightly from the average, they may be linearized. Under these assumptions, a solution in form of Fourier series is found; the solutions of other authors for a thin-walled cylinder and for a solid one are seen to be two particular cases of it.*

* * *